

数学试题

第 I 卷(选择题)

注意事项:

1、答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2、回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号,回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

一、单选题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -2 < x < 5\}$, $B = \{x | -3 < x \leq 1\}$, 则 $A \cap B =$ (▲)

A. $\{x | -2 < x \leq 1\}$ B. $\{x | -3 < x < -2\}$ C. $\{x | -3 < x < 5\}$ D. $\{x | 1 \leq x < 5\}$

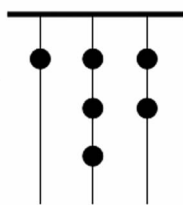
2. 已知复数 z 满足 $1 + i = zi$, 则其共轭复数为 (▲)

A. $-1 - i$ B. $-1 + i$ C. $1 - i$ D. $1 + i$

3. 4 名护士和 2 名医生站成一排, 2 名医生顺序固定, 则不同的排法种数为 (▲)

A. 480 B. 360 C. 288 D. 144

4. 远古时期,人们通过在绳子上打结来记录数量,即“结绳计数”,就是现在我们熟悉的“进位制”,右图所示的是一位母亲记录的孩子自出生后的天数,在从右向左依次排列的不同绳子上打结,满五进一,根据图示可知,孩子已经出生的天数是 (▲)



A. 27 B. 42 C. 55 D. 210

5. 根据天气预报,某一天 A 城市和 B 城市降雨的概率均为 0.6, 假定这一天两城市是否降雨相互之间没有影响, 则该天这两个城市中, 至少有一个城市降雨的概率为 (▲)

A. 0.16 B. 0.48 C. 0.52 D. 0.84

6. 已知函数 $f(x) = 2^x - x - 1$, 则不等式 $f(x) > 0$ 的解集是 (▲)

A. $(-1, 1)$ B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

C. $(0, 1)$ D. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

7. 已知向量 $\vec{a} = (\sqrt{3}, 0)$, $\vec{b} = (x, -2)$, 且 $\vec{a} \perp (\vec{a} - 2\vec{b})$, 则 $x =$ (▲)

A. $-\sqrt{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 已知函数 $f(x) = \lg(x^2 - 4x - 5)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增, 则 a 的取值范围是 (▲)

- A. $(2, +\infty)$ B. $[2, +\infty)$ C. $(5, +\infty)$ D. $[5, +\infty)$

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对得 3 分。

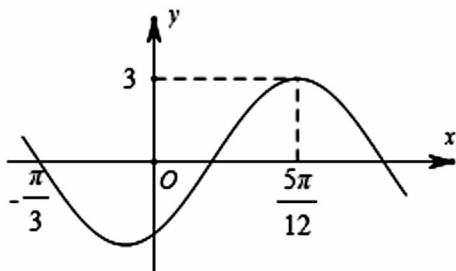
9. 若直线 $l: 2x + by + 3 = 0$ 过椭圆 $C: 10x^2 + y^2 = 10$ 的一个焦点, 则实数 b 的值可以是 (▲)

- A. -1 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $-\frac{1}{2}$

10. 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图像如图所示, 将函数 $f(x)$ 的图像向左

平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得到 $y = g(x)$ 的图像, 则下列说法正确的是 (▲)

- A. 函数 $g(x)$ 为奇函数
 B. 函数 $g(x)$ 的最小正周期为 π
 C. 函数 $g(x)$ 的图像的对称轴为直线 $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$ ($l \in Z$)
 D. 函数 $g(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{12} + k\pi]$ ($k \in Z$)

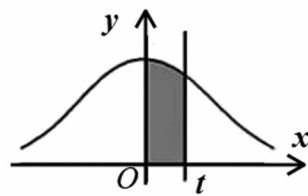


11. 设正实数 a, b 满足 $a + b = 1$, 则 (▲)

- A. \sqrt{ab} 有最大值 $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 有最大值 4
 C. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 有最大值 $\sqrt{2}$ D. $a^2 + b^2$ 有最小值 $\frac{1}{2}$

12. 右图是正态分布 $N(0, 1)$ 的正态曲线图, 可以表示图中阴影部分面积的式子有 (▲)

- A. $\frac{1}{2} - p(x \leq -t)$ B. $p(x \leq 1 - t) - \frac{1}{2}$
 C. $p(x \leq t) - \frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2} - p(x \geq t)$



第 II 卷 (非选择题)

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 计 20 分

13. 函数 $f(x) = \frac{1}{x-1} + \ln x$ 的定义域是 ▲.

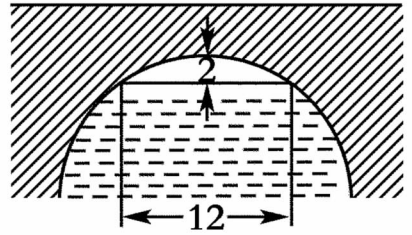
14. 设抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l . 则以 F 为圆心, 且与 l 相切的圆的方程为 ▲.

15. 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1 = 0$, 若 $a_{n+1} = [1 + (-1)^n]a_n + (-2)^n (n \in N^*)$, 则 $S_{100} =$

▲.

16. 如右图所示, 一座圆拱桥, 当水面在某位置时, 拱顶离水面

$2m$, 水面宽 $12m$, 当水面下降 $1m$ 后, 水面宽为 ▲ m .



四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

在① $\sin(B + \frac{\theta}{6}) = \cos B + \frac{1}{2}$, ② $2a - c = 2b \cos C$,

③ $\vec{m} = (a + b, c - a)$, $\vec{n} = (a - b, c)$, 且 $\vec{m} \perp \vec{n}$ 在以上三个条件中任选一个补充在下面的问题中, 并给出解答.

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 ▲.

(1) 求角 B ;

(2) 若 $b = 4$, 求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.

(注: 第一问多种选择作答按照第一种选择解答判分)

18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $a_{n+1} = S_n - 1 (n \in N_+)$, $a_1 = 2$,

(1) 求证: 数列 $\{S_n - 1\}$ 为等比数列;

(2) 记 $b_n = nS_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (本小题满分 12 分)

在中国,不仅是购物,还是从共享单车到医院挂号再到公共缴费,日常生活中几乎全部领域都支持手机支付。出门不带现金的人数正在迅速增加。中国人民大学和法国调查公司益普索合作,调查了腾讯服务的 6000 名用户,从中随机抽取了 60 名,规定:随身携带的现金在 100 元以下(不含 100 元)的为“手机支付族”,其他为“非手机支付族”,统计如图如示。

	男性	女性	合计
手机支付族	10	12	22
非手机支付族	30	8	38
合计	40	20	60

- (1) 根据上述样本数据判断有多大的把握认为“手机支付族”与“性别”有关?
- (2) 用样本估计总体,若从腾讯服务的用户中随机抽取 3 位女性用户,这 3 位用户中“手机支付族”的人数为 ζ ,求随机变量 ζ 的期望。
- (3) 某商场为了推广手机支付,特推出两种优惠方案,方案一:手机支付消费每满 1000 元可直减 100 元;方案二:手机支付消费每满 1000 元可抽奖 2 次,每次中奖的概率同为 $\frac{1}{2}$,且每次抽奖互不影响,中奖一次打 9 折,中奖两次打 8.5 折。如果你打算用手机支付购买某样价值 1200 元的商品,请从实际付款金额的数学期望的角度分析,选择哪种优惠方案更划算?

附:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.050	0.010	0.001
k_0	3.841	6.635	10.828

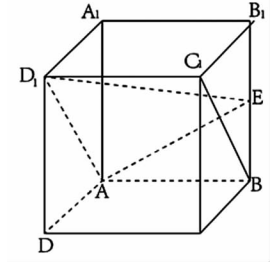
$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$$

20. (本小题满分 12 分)

如图,在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 BB_1 的中点.

(I) 求证: $BC_1 \parallel$ 平面 AD_1E ;

(II) 求直线 AA_1 与平面 AD_1E 所成角的正弦值.

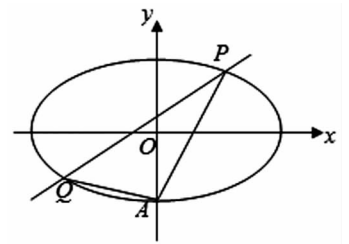


21. (本小题满分 12 分)

如图,椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $A(0, -1)$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 经过点 $(1, 1)$, 且斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 P, Q (均异于点 A), 证明: 直线 AP 与 AQ 的斜率之和为定值.



22. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = e^x + ax^2 - x$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq \frac{1}{2}x^3 + 1$, 求 a 的取值范围.