考研辅导资料

仅供内部讨论使用

工科数学分析

思考题集

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

请您多多思考！

第一章　函数

思考题：

1．何谓函数，函数关系，函数值？

2．函数 y=f(x)与方程 y=f(x)在概念上有何区别？

3．怎样确定函数的定义域？

4．怎样才算完全确定了一个函数？应该如何规定两个函数相等？下面各对函数是否相等？

(1)$f(x)=x$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$；

(2)$f(x)=x-1$，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$；

(3)$f(x)=|x|$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(4)$f(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$，$g(x)=\sqrt{x^2-1}$；

(5)$f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\ge 1\\ 1, & x<1\end{cases}$，$g(x)=\sqrt{(x-1)^2}+x$；

(6)$f(x)=\begin{cases}-1, & x<-1\\ x, & -1\le x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$，$g(x)=\dfrac{1}{2}\{|1+x|-|1-x|\}$.

5．若函数 y=f(x)的反函数就是它本身，试问此函数的图象有什么样的特点？

6．下列函数是否是初等函数？说明理由.

(1)$f(x)=|x|$；

(2)$f(x)=(x+\sin x)^{x\cos x}$；

(3)$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，

(4)$f(x)=\begin{cases}-c, & x<-c\\ x, & -c\le x\le c\\ c, & x>c\end{cases}$.

7．设 f(u)与 $u=\varphi(x)$ 能复合为 $f(\varphi(x))$，

(1)若 f(u)递增(递减)，$\varphi(x)$ 递减，试研究 $f(\varphi(x))$的单调性.

(2)若 f(u)为奇(偶)函数，$\varphi(x)$ 为偶(奇)函数，试研究 $f(\varphi(x))$的奇偶性.

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

(3)若 f(u)为任意函数，$\varphi(x)$ 为偶函数，试研究 $f(\varphi(x))$的奇偶性.

(4)若 f(u)为有界函数，$\varphi(x)$ 为任意函数，试问 $f(\varphi(x))$是否一定是有界函数？

(5)若 f(u)为任意函数，$\varphi(x)$ 为周期函数，试问 $f(\varphi(x))$是否一定是周期函数？

8．判断下列命题是否正确，为什么？

(1)若 f(x)在 $\forall[\alpha, \beta]\subset(a, b)$ 上有界，则 f(x)在(a, b)上有界.

(2)设 f(x)在[a, b]上有定义，且在 $\forall(\alpha,\beta)\subset[a, b]$ 上有界，则 f(x)在[a, b]上有界.

9．适合下列条件的函数存在吗？为什么？

(1)在 $R=(-\infty,+\infty)$上严格递增的有界函数.

(2)在 $R=(-\infty,+\infty)$上严格递增的偶函数.

(3)在 $R=(-\infty,+\infty)$上严格递减的奇函数.

(4)在$(-\ell,\ell)$内为偶函数，且在 $R=(-\infty,+\infty)$上又为奇函数.

(5)在 R 上严格递增的周期函数.

10．设 f(x)在 R 上有定义，且满足 $f(x)\neq 0$，$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$，试求 f(1990).

11．用肯定语气叙述：在$(-\infty,+\infty)$上

(1)f(x)不是偶函数； (2)f(x)不是周期函数；

(3)f(x)不是单增函数； (4)f(x)不是单调函数.

12．用肯定语气叙述：

(1)f(x)在[a, b]上无下界；

(2)f(x)在[a, b) 上没有零点；

(3)f(x)在(a, b)上没有比中点函数值大的点.

13．若 f(x)是一一对应的奇函数，试证其反函数也是奇函数.

14．设 f(x)满足关系式 $2f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{k}{x}$ (k 为常数)，证明：f(x)为奇函数.

15．设 f(x)为$(-\infty,+\infty)$上的奇函数，且在$[0,+\infty)$上严格增，求证：f(x)在$(-\infty,+\infty)$上严格增.

16．设 $0\le a\le 1$，函数 f(x)及 g(x)对任意的 x_1, x_2 分别满足

$$f[ax_1+(1-a)x_2]\ge af(x_1)+(1-a)f(x_2)\ 及$$

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

$$g[ax_1+(1-a)x_2]\le ag(x_1)+(1-a)g(x_2)$$

且 g(x)为单减函数，试证：

$$g[f(ax_1+(1-a)x_2)]\le ag[f(x_1)]+(1-a)g[f(x_2)].$$

17．设 f(x)在$(-\infty,+\infty)$上严格增，且恒有 f[f(f(x))]=f(x)，试证：必有 f(x)=x.

18．若 f(x)是在$(-\infty,+\infty)$上单增的偶函数，且 f(0)=0，则 $f(x)\equiv 0$.

19．若 f(x)满足条件：对 $\forall x\in R$ 有 $f(x+\ell)=-f(x)$ $(\ell>0)$，

证明：f(x)是以 ℓ 为周期的函数.

20．设常数 a>0，函数 $f(x)\ne 0$，且 $f(x+a)=\dfrac{1}{f(x)}$，$x\in R$，试证：f(x)是以 2a 为周期的周期函数.

21．若 y=f(x)($x\in R$)的图形关于两直线 x=a 与 x=b(a<b)对称，试证 f(x)为周期函数.

22．设 f(x)和 g(x)分别是以 ℓ_1 和 ℓ_2 为周期的函数，且 $\dfrac{\ell_1}{\ell_2}=\dfrac{n}{m}$(m, n 为互质的正整数)，证明：

$$F(x)=f(x)+g(x),$$

$$G(x)=f(x)\cdot g(x),$$

是以 $\ell=m\ell_1=n\ell_2$ 为周期的函数.

23．证明：若 f(x)是以 T 为周期的周期函数，则 f(ax)(a>0)是以 $\dfrac{T}{a}$ 为周期的周期函数.

24．函数 y=f(x)具有反函数的充要条件是什么？

25．选择填空：

(1)奇、偶函数的定义域一定是________.

(A)R　　(B)关于原点对称的区间

(C)关于原点对称的点集　　(D)A、B、C 都不对

(2)函数 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 是________.

(A)有界函数　　(B)单调函数

(C)周期函数　　(D)偶函数

(3)函数 $D(x)=\begin{cases}1, x\text{为有理数}\\0, x\text{为无理数}\end{cases}$ 是________.

(A)非奇非偶函数　　　　(B)有界函数

(C)非周期函数　　　　(D)偶函数

(E)有界周期偶函数

(4)若 f(x)为奇函数，则下列________款中的函数也是奇函数.

(A)$f(x)+a$ ($a\neq 0$，为常数)　　　　(B)$f[f(x)]$

(C))$f(-x)+a$ ($a\neq 0$，为常数)　　　　(D)$f(x)+f(-x)$

(5)设 $f(x)\begin{cases}2-x^2, & |x|\le 1\\2+x^2, & |x|>1\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases}2, & |x|\le 1\\0, & |x|>1\end{cases}$，

则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 由____________款表示.

(A)$f[\varphi(x)]=\begin{cases}-2, & |x|\le 1\\2, & |x|>1\end{cases}$　　　　(B)$f[\varphi(x)]=\begin{cases}6, & |x|\le 1\\2, & |x|>1\end{cases}$

(C)$f[\varphi(x)]=\begin{cases}2+x^2, & |x|\le 1\\2, & |x|>1\end{cases}$　　　　(D)$f[\varphi(x)]=\begin{cases}2+x^2, & |x|\le 1\\2-x^2, & |x|>1\end{cases}$

(6)函数 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数是___________.

(A) $y=\dfrac{\log_2 x}{\log_2(1-x)}$　　　　(B) $y=\log_2 x-\log_2(1-x)$

(C) $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$　　　　(D) $y=\lg\dfrac{x}{1-x}$

补充题

1．(1) $\sqrt[n]{a^n}=|a|$ 对吗？

(2)如果在 $|x|>b$ 中去掉绝对值记号，应该怎样写？

(3)试用 $|a+b|$，$|a-b|$ 表示 Max{a, b}，Min{a, b}.

2．证明下列不等式：

(1)$n!>2^n$　(n>3)

(2) $2^n > n^2 \quad (n \ge 5)$

(3) $n^n \le (n!)^2 \quad (n \ge 3)$

(4) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

(5) $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad (n>1)$

(6)若 $x>-1$，则 $(1+x)^n \ge (1+nx)(n \in N)$ (这个不等式称为 Bernoulli 不等式)

(7)设 $a_i > 0 \quad (i=1, 2, \cdots, n)$ 且 $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 1$，则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ge n$.

(8)设 $a_i>0(i=1, 2, \cdots, n)$，则

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 \ldots a_n}{n},$$

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \le \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

(9) $|x + x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \ge |x| - (|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)$

(10)设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$； $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为两组实数，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

3．解下列不等式

(1) $|2x+4| > 10$；　　(2) $|x(x-1)| < 0.1$；

(3) $|x-5| < |x+1|$ ；　　(4) $|x+1| - |x-1| < 1$；

(5) $|x+2| + |x-2| \le 12$；　　(6) $|x+2| - |x| > 1$；

(7) $2 < \frac{1}{|x+2|} < 3$.

4．设 $f(x)=\operatorname{arctg} x$， $g(x)=\operatorname{tg} x$，求 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$.

5．设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$， $g(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$，求 $f[g(x)]$; $g[f(x)]$; $f[f(x)]$; $g[g(x)]$.

6．设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & 0\le x<2\\ 2^x, & 2\le x\le 4\\ 6-x, & 4<x\le 6\end{cases}$，求 f(1), f(2), f($\pi$), f(4.5).

7．验证：

$$\mathrm{Max}\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$$

$$\mathrm{Min}\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]$$

8．设 f(x), g(x)在(a, b)上单增，求证：

(1)Max{f(x), g(x)}　　　　(2)min{f(x), g(x)}

也在(a, b)上单增.

9．设 f(x)在 $(0,+\infty)$ 上有定义，$x_1>0$, $x_2>0$，求证：

若 $\frac{f(x)}{x}$ 单增，则 $f(x_1+x_2)\ge f(x_1)+f(x_2)$.

10．一半径为 a 的圆铁片，自中心剪去一角形，将剩余部分(中心角为 θ)围成一个无底圆锥，试建立圆锥容积 V 与中心角 θ 之间的函数关系.

11．证明：函数 $f(x)=a^x$ $(a>0, a\ne 1)$，对一切实数 $x_1\ne x_2$ 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)].$$

12．设 $f(x)=\dfrac{ae^x+be^{-x}}{a+b}$　$(a\ne -b)$，证明：

$$f(2x)-f(-2x)=f^2(x)-f^2(-x).$$

13．设 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$，试证：

$$f(y)+f(z)=f\left(\frac{y+z}{1+yz}\right).$$

14．设 $f(x)=\dfrac{x+3}{2x-1}$，解方程 $f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=f\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

15．(1)设 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$，求 f(x).

(2)设 $f(\sin\frac{x}{2})=1+\cos x$，求 $f(\cos\frac{x}{2})$.

16．设 f(x)为(−∞, +∞)上的奇函数，f(1)=a，且对任意 x 值均有：f(x+2)−f(x)=f(2)

(1)试用 a 表示 f(2)与 f(5)；

(2)问 a 取什么值时，f(x)是以 2 为周期的周期函数？

17．研究下列函数有界性

(1)$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$；

(2)$f(x)=x^2$ 分别在(a, b)及(−∞, +∞)上；

(3)$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$；

(4)$f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$.

18．在物理及工程技术中还用到“双曲函数”，它们的定义为：

双曲正弦 $\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

双曲余弦 $\mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

双曲正切 $\mathrm{th}x=\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

双曲余切 $\mathrm{cth}x=\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

试证：

(1) $\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$

(2) $\mathrm{sh}(x+y)=\mathrm{sh}x\mathrm{ch}y+\mathrm{ch}x\mathrm{sh}y$

(3) $\mathrm{ch}2x=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x$，　　$\mathrm{sh}2x=2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x$

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

(4) $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = 1 - \mathrm{th}^2 x$

(5) $\mathrm{sh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \qquad (-\infty < x < +\infty)$

$\mathrm{ch}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \qquad (x \geq 1)$

第二章 数列极限

思考题：

1．下列说法能否表明 a 是数列$\{a_n\}$的极限(与$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$的定义是否等价？)

(1)对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，有$a_n - a < \varepsilon$.

(2)对$\forall\varepsilon>0$，存在无限多项a_n，使$|a_n - a| < \varepsilon$.

3)对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n\geqslant N$时，有$|a_n - a| < \varepsilon$.

(4)对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，有$|a_n - a| < \varepsilon^{100}$.

(5)对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，有$|a_n - a| < k\varepsilon$，(其中 k 是与ε，n 无关的常数).

(6)对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，有$|a_n - a| < N\varepsilon$.

(7)对$\forall\varepsilon>0$，$\exists A\in R$，当$n>A$时，有$|a_n - a| < \varepsilon$.

(8)$\exists N$，对$\forall\varepsilon>0$，当$n>N$时，有$|a_n - a| < \varepsilon$.

(9)对$\forall\varepsilon\in(a,+\infty)$ $(a>0)$，$\exists N$，当$n>N$时，有$|a_n - a| < \varepsilon$.

(10)对$\forall\varepsilon$：$0<\varepsilon<1$，$\exists N$，当$n>N$时，有$|a_n - a| < \varepsilon$.

(11)对无限个$\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，有$|a_n - a| < \varepsilon$.

(12)对$\forall m\in N$，$\exists N$，当$n>N$时，有$|a_n - a| < \dfrac{1}{m}$.

(13)设$\varepsilon_k \to 0$ $(k\to\infty)$，$\varepsilon_k>0$，对每个ε_k，$\exists N_k$，当$n>N_k$时有$|a_n - a| < \varepsilon_k$.

2. 有人说，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$定义与“对$\forall(\alpha,\beta)$ $(a\in(\alpha,\beta))$，$\exists N$，当$n>N$时，有$x_n\in(\alpha,\beta)$”等价，对吗？

3．一个数列去掉或添加或改变有限项是否会改变它的收敛性与它的极限值？

4．证明：设 a, b 为两个定数，

(1)若对$\forall\varepsilon>0$都有 $a\le b+\varepsilon$，则$a\le b$；

(2)若对$\forall\varepsilon>0$都有 $|a-b|<\varepsilon$，则 a=b.

5．若$\{a_n\}$收敛，$\{b_n\}$发散，则$\{a_n\pm b_n\}$、$\{a_nb_n\}$收敛性如何？举例说明.

6．$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均发散，则$\{a_n \pm b_n\}$、$\{a_n b_n\}$是否发散？举例说明.

7．若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，是否必有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$？又能否断定 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

8．若对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，就有$|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$，则$\{a_n\}$是否收敛？

9．下列命题是否正确？为什么？

(1)设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，$\{b_n\}$为任意数列，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

(2)若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，则可断定或 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

(4)若$\{a_n\}$收敛于 a，则将 a_n 的顺序重新排列后所得的数列$\{a_n'\}$仍收敛于 a.

10．下面的计算方法有无错误，原因何在？

$$(1)\ 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = \lim_{n\to\infty} (\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n个})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \cdots + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

$$(2)\ \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty} [(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{1}{n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n}) \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n}) \cdots \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n}) = 1.$$

$$(3)\ \lim_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{1}{n+2})\cdots(1-\frac{1}{2n}) = \overbrace{1\cdot 1\cdots 1}^{n个} = 1.$$

(4)假设 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = a\ (q>1)$，则因 $q^{n+1} = q \cdot q^n$，两边同时取极限得：$q=q \cdot a$，从而 a=0，

故有 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0\ (q>1)$.

$$(5)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = n^0 = 1.$$

11．若 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$， $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$，请看下面的证法是否正确？

$$\because 0 = \lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n - a$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} y_n = a\,.$$

定义：在给定的数列 a_1，a_2，…，a_n，…中，如果任意地挑选出无穷多项，并按照原有的次序排列出

a_{n_1}，a_{n_2}，…，a_{n_k}，… ($n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$)

就得到一个足标为 k 的数列$\{a_{n_k}\}$，称为原数列的子数列.

12．若数列$\{a_n\}$的两个子列$\{a_{2n}\}$与$\{a_{2n-1}\}$都收敛，则$\{a_n\}$是否也收敛？

13．举例给出满足下列要求的数列

(1)无界数列，但不趋于无穷；

(2)非单调的收敛数列；

(3)无收敛子列的数列.

14．若把满足柯西准则条件的数列叫做柯西列(或基本列)

(1)若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时有$|a_n - a_N| < \varepsilon$，能否断定$\{a_n\}$为柯西列？

(2)若对 $\forall\varepsilon>0$ 和 $p\in N$, $\exists N$，当 $n>N$ 时有$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$，

能否断定$\{a_n\}$为柯西列？

(3)$\{a_n\}$、$\{b_n\}$为两个柯西列，能否断定$\{a_n+b_n\}$、$\{a_nb_n\}$也是柯西列？

15．下面的证法有无错误？

设 $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$，(n=1, 2, …)，证明 $\{x_n\}$ 收敛.

证：$\because |x_{n+p} - x_n| = \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{n+p}$

$$< \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+1} = \frac{p}{n+1}$$

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

$\forall\varepsilon>0$，取 $N=[\frac{p}{\varepsilon}-1]+1$，则当 $n>N$ 时，就有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$.

根据柯西准则知数列$\{x_n\}$收敛.

16．用“ε—N”语言叙述$\{a_n\}$不是柯西列.

17．数列$\{x_n\}$收敛的充要条件有哪几个？

18．证明数列$\{x_n\}$发散有哪些方法？

19．用肯定语气叙述

(1)$\{x_n\}$不是单调数列；

(2)数列$\{x_n\}$无上界；

(3)区间[a, b]上每个数都不是数列$\{x_n\}$的极限；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq+\infty$.

20．若对任给 $x\in R,\exists\varepsilon_0>0$，对 $\forall N\in\mathbf{N}$ ，$\exists n_0>N$，使 $|x_{n_0}-x|\geq\varepsilon_0$，

能说明数列$\{x_n\}$具有什么性质？

22．证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，则在$\{x_n\}$中至少有一项 x_{n_0}，使

$$x_{n_0}\leq x_n \quad (n=1, 2, \cdots).$$

23．选择填空

(1)若$\{a_n\}$有界，则$\{a_n\}$_________.

(A)收敛　　(B)发散

(C)可能收敛，也可能发散　　(D)A、B、C 中结论都不对

(2)若$\{a_n\}$无界，则$\{a_n\}$___________.

(A)为无穷大量　　(B)发散

(C)可能收敛，也可能发散　　(D)A、B、C 中结论都不对

(3)若$\{a_n+b_n\}$发散，则____________.

(A)$\{a_n\}$、$\{b_n\}$都发散　　(B)$\{a_n+b_n\}$无界

(C)$\{a_n\}$与$\{b_n\}$中至少有一个发散　　(D)A、B、C 中结论都不对

(4)若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$， $\lim_{n\to\infty} b_n = a$， 则数列 $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n, \cdots$__________.

(A)收敛，但极限未必是 a　　(B)一定收敛于 a

(C)未必收敛　　(D)A、B、C 中结论都不对

(5)设$\{a_n\}$中有无穷多项 $a_n=1$，则$\{a_n\}$=__________.

(A)可能是正无穷大量　　(B)可能是无穷小量

(C)一定收敛于 1　　(D)A、B、C 中结论都不对

(6)若$\{a_n\}$中有无穷多个子列都趋于 a，则$\{a_n\}$__________.

(A)一定收敛于 a　　(B)可能是无穷大量

(C)未必收敛，但一定不是无穷大量　　(D)A、B、C 中结论都不对

(7)设非常数数列$\{a_n\}$收敛，且 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，则__________.

(A)$\{a_n\}$为单调有界数列

(B)$\{a_n\}$非单调有界数列

(C)在$\{a_n\}$中必存在一个子列是单调有界数列

(D)在$\{a_n\}$中不一定存在单调有界的子列

补充题

1．按定义证明下列极限

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+5}{3n^2+2n-4}=\frac{1}{3}$　　(2) $\lim_{n\to\infty}[\ln(n+1)-\ln n]=0$

2．求下列极限

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}-5n}$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$

(3) $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{1+2+\cdots+n}$　　(4) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{2n-1}{n^2}\right)$

(5) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$　　(6) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\sin^2 n+\cos^2 n}$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\cdots\left(1+x^{2^n}\right)$ $\quad(|x|<1)$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}$ $\quad(a\neq-1)$

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a+\cdots+a^{n-1}}$ $\quad(a>0)$

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-1}{n^3-2}\right)^{4n^3}$

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

(14) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n}\right)$

(15) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

(16) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot5\cdots(2n)}}$

(17) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{n^2+n}$

(18) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$

提示：利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\right)=C$ $\quad C$ 为欧拉常数

(19) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}$ $\quad$(提示：利用两边夹定理)

(20) $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1-\dfrac{n^2}{m^2}\right)^{m}$

(21) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

3．设 $\{a_n\}$ 为正项数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=0$，证明 $\{a_n\}$ 当 n 充分大后为单调数列.

4．证明：若数列 $\{a_n\}$ 无上界，则必有严格增加且趋于 $+\infty$ 的子数列.

5．若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\ell\,(\ell\neq0)$且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

6．设数列 $\{a_n\}$ 满足 $0<a_n<1$，$(1-a_n)a_{n+1}>\dfrac{1}{4}$，证明 $\{a_n\}$ 单调增加，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{2}$.

7．设 $\{a_n\}$ 为单调数列，它的某一子列 $a_{n_k}\to a$ $(k\to\infty)$，试证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

8．设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Max}(x_n,y_n)=\mathrm{Max}(a,b)$.

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

9．利用柯西收敛准则，判断下列数列$\{a_n\}$的收敛性.

(1) $a_n=\dfrac{\cos 1}{1\cdot 2}+\dfrac{\cos 2!}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{\cos n!}{n(n+1)}$

(2) $a_n=\dfrac{a\cos 2+b\sin 2}{2(2+\sin 2!)}+\dfrac{a\cos 3+b\sin 3}{3(3+\sin 3!)}+\cdots+\dfrac{a\cos n+b\sin n}{n(n+\sin n!)}$ (a，b 是常数)

(3) $a_n=1+\dfrac{1}{2^h}+\dfrac{1}{3^h}+\cdots+\dfrac{1}{n^h}$ $(h\leqslant 1)$

(4) $a_n=\dfrac{1}{\ln 2}+\dfrac{1}{\ln 3}+\cdots+\dfrac{1}{\ln n}$ (n=2，3，…)

(5)若对$\forall n\geqslant 1$，有$|a_{n+2}-a_{n+1}|\leqslant\dfrac{1}{2}|a_{n+1}-a_n|$，证明$\{a_n\}$收敛.

10．试证：$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{\sin x}{x}$.

11．利用单调有界定理求证下列极限

(1)求数列$a_n=\dfrac{n!}{(2n-1)!!}$ (n=1，2，…)的极限.

(2)设数列$\{x_n\}$满足$x_1<1$，且$(2-x_n)x_{n+1}=1$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(3)证明数列$x_n=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$收敛.

12．设$a_n>0$ (n=1，2，…)且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}=a$，

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.

13．设$a_n>0$ (n=1，2，…)且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$.

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

14．设$\{a_n\}$为单增数列，$S_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，试证：若$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

例题：

例 1．试证：$x_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$ 收敛(其极限值称为欧拉常数).

证：$x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln\left(\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n}{n-1}\right)=\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\dfrac{1}{k-1}-\ln\dfrac{k}{k-1}\right)+\dfrac{1}{n}$

而 $\dfrac{1}{k-1}-\ln\dfrac{k}{k-1}=\dfrac{1}{k-1}\left[1-\ln\left(1+\dfrac{1}{k-1}\right)^{k-1}\right]>\dfrac{1}{k}(1-\ln e)=0$

(注意$\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k$严格增且趋于 e)

∴ $x_n>0$，(n=1，2，…)

又 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{n+1}+\ln\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{1}{n+1}\left(1-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right)<0$

(∵$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+!}$↘且→e(当 n→∞时))

可见$\{x_n\}$为单调减少，且有下界的数列，所以收敛.

记其极限值为 C，故有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=C.$$

例 2．设$0<a_1<b_1$，$a_n=\dfrac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}$，$b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$ (n=2，3，…)，试证$\{a_n\}$单增，$\{b_n\}$单减，且有相同的极限.

证：①先证$a_n\leqslant b_n$

由$\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{2a_{n-1}b_{n-1}}{(a_{n-1}+b_{n-1})\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}}=\dfrac{2\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}}{a_{n-1}+b_{n-1}}\leqslant 1$ 立明.

②次证$\{a_n\}$↑

$$a_{n+1}-a_n=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}-a_n=\frac{a_nb_n-a_n^2}{a_n+b_n}\geqslant 0$$

∴$a_{n+1}\geqslant a_n$

③再证 $\{b_n\}\downarrow$

$$b_{n+1}=\sqrt{a_n b_n}\leqslant\sqrt{b_n b_n}=b_n$$

从而有 $a_1\leqslant a_n\leqslant b_n\leqslant b_1$，(n=1，2，…)

$\Rightarrow\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$.

$\Rightarrow b>0$

④后证 a=b

在 $b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$ 中令 $n\to\infty$ 得 $b=\sqrt{ab}$

$\sqrt{b}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)=0$，$\because b\neq 0$ $\therefore a=b$.

例 3．证明施笃兹(stolz)定理.

设 1) $y_{n+1}>y_n$ (n=1，2，…) 2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$.

证：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时有

$$\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是下面的分数

$$\frac{x_{N+1}-x_N}{y_{N+1}-y_N},\ \frac{x_{N+2}-x_{N+1}}{y_{N+2}-y_{N+1}},\ \cdots,\ \frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{y_{n-1}-y_{n-2}},\ \frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$$

都在 $a-\dfrac{\varepsilon}{2}$ 和 $a+\dfrac{\varepsilon}{2}$ 之间，从而

$$a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}<a+\frac{\varepsilon}{2}$$

即 $\left|\dfrac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-a\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

又 $\dfrac{x_n}{y_n}-a=\dfrac{x_N-ay_N}{y_n}+\left(1-\dfrac{y_N}{y_n}\right)\left(\dfrac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-a\right)$

可得

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right| \leqslant \left|\frac{x_N-ay_N}{y_n}\right|+\left|\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-a\right|$$

由上知，当 $n>N$ 时，右端第二项小于 $\frac{\varepsilon}{2}$.

又当 $n\to\infty$ 时，第一项→0，故 $\exists N' \geqslant N$，当 $n>N'$ 时，第一项 $<\frac{\varepsilon}{2}$，于是，当 $n>N'$ 时，有 $\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|<\varepsilon$.

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a$.

注 1：若将条件 3)改为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=+\infty$ (或 $-\infty$)，结论仍然成立.

注 2：($\frac{0}{0}$ 型 stolz 定理)

设对一切充分大的 n，$\{b_n\}$ 严格递减，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 也存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}$.

证：设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}=S$，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时有

$$S-\varepsilon<\frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}<S+\varepsilon \qquad \Rightarrow$$

$$(S-\varepsilon)(b_n-b_{n+1})<a_n-a_{n+1}<(S+\varepsilon)(b_n-b_{n+1})$$

把上式中 n 改为 n+1，n+2，…，n+p−1，并把结果相加得

$$(S-\varepsilon)\left(b_n-b_{n+p}\right)<a_n-a_{n+p}<(S+\varepsilon)\left(b_n-b_{n+p}\right)$$

当 $p\to\infty$ 时，上式取极限得

$$(S-\varepsilon)b_n\leqslant a_n\leqslant(S+\varepsilon)b_n$$

故当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-S\right|\leqslant\varepsilon.$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=S.$$

注 3．应用 stolz 定理立得

(1)若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}\quad(k\geqslant 0)=\dfrac{1}{k+1}$.

(3)若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=a$.

(4)设有两个数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 且 $b_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}b_k=+\infty$，

则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$.

(5)设 $a_k>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=b.$$

(6)设 $\{x_n\}$ 满足 $x_n-x_{n-2}\to 0(n\to\infty)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n+x_{n-1}}{n}=0.$$

(7)设数列 $\{s_n\}$，令 $\delta_n=\dfrac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1},(n=0,1,2,\cdots)$

对 $n\geq 1$，再设 $a_n=s_n-s_{n-1}$，证明：

若 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，且 $\{\delta_n\}$ 收敛，则 $\{s_n\}$ 也收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n$.

(提示：$\because s_n-\delta_n=\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}Ka_k$，再用 stolz 定理)

(8)若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}=a$.

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

(9)若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\dfrac{a}{2}$.

例 4．证明： $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!})=e$.

证：记 $x_n=(1+\dfrac{1}{n})^n=1+n\dfrac{1}{n}+\dfrac{n(n-1)}{2!}(\dfrac{1}{n})^2+\cdots+(\dfrac{1}{n})^n$

$$=2+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$>2+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})$$

固定 k，令 $n\to+\infty$，在上式两端取极限

$$e\ge 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}$$

于是当 k=n 时

$$e\ge 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}>x_n$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e$， $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(2+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!})=e$

例 5．证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在.

证：“反证法” 假定 $\{\sin n\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=a$.

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+2)=a$，有

$$\lim_{n\to\infty}[\sin(n+2)-\sin n]=\lim_{n\to\infty}2\sin 1\cos(n+1)=0$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\cos(n+1)=0$， $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\cos n=0$

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sin 2n = \lim_{n\to\infty} 2\sin n \cos n = 0$$

$$\Rightarrow a = 0$$

从而 $\lim_{n\to\infty} \sin n = 0,\quad \lim_{n\to\infty} \cos n = 0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \sin n$ 不存在.

例 6．设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim_{n\to\infty} b_n = b$，证明：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab.$$

证：由 $a_n \to a$，$b_n \to b$ 可得 $|a_n| \le c, (n = 1, 2, \cdots)$

$$A_n = \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_n - a|}{n} \to 0$$

$$B_n = \frac{|b_1 - b| + |b_2 - b| + \cdots + |b_n - b|}{n} \to 0$$

故对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$，当 $n > N$ 时，$A_n < \varepsilon, B_n < \varepsilon$，

从而当 $n > N$ 时，有

$$\left|\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} - ab\right| = \left|\frac{(a_1 b_n - ab) + \cdots + (a_n b_1 - ab)}{n}\right|$$

$$= \left|\frac{(a_1 b_n - a_1 b + a_1 b - ab) + \cdots + (a_n b_1 - a_n b + a_n b - ab)}{n}\right|$$

$$\le \left|\frac{a_1(b_n - b) + a_2(b_{n-1} - b) + \cdots + a_n(b_1 - b)}{n}\right| + |b|\left|\frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n}\right|$$

$$\le cB_n + |b| A_n < c\varepsilon + |b|\varepsilon = (c + |b|)\varepsilon$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab.$$

例 7．证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0 \qquad (a > 1).$

证：对 $\forall\varepsilon>0\Rightarrow a^{\varepsilon}>1$　　$\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，故

$\exists N$，当 n>N 时，有 $\sqrt[n]{n}<a^{\varepsilon}$

从而 $\dfrac{1}{n}\log_a n<\varepsilon$

即当 n>N 时有 $\left|\dfrac{1}{n}\log_a n-0\right|=\dfrac{1}{n}\log_a n<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\log_a n=0$.

例 8．若已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{p}-1}{\frac{1}{n}}=\ln p$　(p>0，为常数)，

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$　(a>0，b>0，c>0).

解：$\because \left(\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$

$$=\left[\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}-3}{3}\right)^{\frac{3}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}-3}}\right]^{\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}-3}{3}n}$$

$$=e^{\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}-3}{3}n\ln\left[\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}-3}{3}\right)^{\frac{3}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}-3}}\right]}$$

$$\therefore 原式=e^{\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{\sqrt[n]{c}-1}{\frac{1}{n}}\right)\ln\left[\lim\limits_{n\to\infty}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right]}$$

(其中 $h=\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}-3}{3}\xrightarrow{n\to\infty}0$)

$$=e^{\frac{1}{3}[\ln a+\ln b+\ln c]\ln e}$$

$$=e^{\frac{1}{3}\ln abc}=\sqrt[3]{abc}.$$

第三章　函数极限

思考题

1．函数极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 定义与下列形式是否等价？为什么？

(1) $\forall \dfrac{1}{2^n}, \exists \delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\dfrac{1}{2^n}$.

(2) $\forall \varepsilon>0, \exists \dfrac{1}{n}>0$，当 $0<|x-a|<\dfrac{1}{n}$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

(3) $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，当 $0<|x-a|<\varepsilon\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

(4) $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\sqrt{\varepsilon}$.

(5) $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\delta\varepsilon$.

2．f(x)在 a 点极限与 f(x)在 a 处的情况是否有关？

3．定义：称 $a\in D$ 为 D 的孤立点，当且仅当存在开区间 I，使 $I\cap D=\{a\}$.

试问，讨论 f(x)在 a 点极限时，a 可否是 f(x)定义域的孤立点？

4．若对 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，当 $|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，试问，$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 是否存在？如果存在，极限值 A 等于什么？

5．$\forall \varepsilon>0$，对 $\forall \delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，均有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，问 f(x)的变化情况如何？

6．若 $\exists \varepsilon>0$，对 $\forall \delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，问 f(x)的变化情况如何？

7．对 $\forall \varepsilon: 0<\varepsilon<1, \exists \delta: 0<\delta<1$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，

问 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 成立否？

8．设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 f(x)在 x_0 点有定义，问在 $x\to x_0$ 的过程中是否可以取 $x=x_0$? f(x)能取值 A 吗？又是否必有 $A=f(x_0)$?

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

9.试用“$\varepsilon-\delta$”语言写出当 $x\to x_0^+$ 时，f(x)不以 A 为极限.

10．若 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=A$，则是否成立 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = A$？反之是否成立？

11．举出满足下列各要求的例子.

(1)虽然 $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2)$存在，但 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)|$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在；

(3)f(x)在其定义域内每一点都不存在极限；

(4)f(x)在其定义域内仅在一点极限存在.

12．选择填空：

(1)若 f(x)在点 x_0 的某邻域内有界，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$________.

(A)存在　　(B)不存在　　(C)未必存在

(2)若 f(x)在点 x_0 某邻域内无界，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$________.

(A)存在　　(B)不存在　　(C)可能存在

(3)若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，则 f(x)在 x_0 点处______定义.

(A)有　　(B)无　　(C)不一定有

13．设 f(x)在 D 上有定义，则 f(x)在 D 上无上界的充要条件是：

$\exists x_n \in D\,(n=1, 2, \cdots)$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$.

14．若对 $\forall \varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon) > 0$, 使当 x>M 时，有 $|f(2x)-f(x)| < \varepsilon$，

则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$是否一定存在？

15．下列说法是否正确？

(1)无穷小量是非常小的量；无穷大量是非常大的量；

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

(2)无穷小量小于任何实数；无穷大量大于任何实数；

(3)无穷大量总大于无穷小量；

(4)无穷大量与有界量的乘积是无穷大量；

(5)两个无穷大量之和仍为无穷大量；

(6)无穷大量与无穷小量的乘积为无穷小量；

(7)无穷大量与无穷小量的乘积为无穷大量.

16．证明 f(x)在 x_0 点极限不存在，有哪些常用的方法？

17．若 f(x)在$(x_0, x_0+\eta)(\eta>0)$上单增有上界，问 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$是否存在？

18．下列算法是否有误？错在哪里？

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{0}{0}=1$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2^x}=\dfrac{+\infty}{+\infty}=1$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=1^\infty=1$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$；

(5) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\mathrm{tg}x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x}{\sin x}=1$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$；

(8) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}(x-3)\cdot\lim\limits_{x\to 3}(x+3)}{\lim\limits_{x\to 3}(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=6$.

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

19.设 f(x)= $\begin{cases} x^3, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$，证明：$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$.

试问下面两种证法是否有错误？

证法 1：当 x≠1 时，$|f(x)-1| = |x^3-1| = |x-1| \cdot |x^2+x+1|$

先设 0<$|x-1|$<1，这时 $|x| \le |x-1|+1 < 2 \Rightarrow |f(x)-1| = |x-1| \cdot |x^2+x+1| \le 7|x-1|$

对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{7}$，则当 0<$|x-1| < \delta$ 时

$$|f(x)-1| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = 1.$$

证法 2：当 x≠1 时，$|f(x)-1| = |x-1| \cdot |x^2+x+1|$

令 $|x| \le 1$, 则 $|x^2+x+1| \le 3$，要使

$|f(x)-1| \le 3|x-1| < \varepsilon$，只要 0<$|x-1| < \dfrac{\varepsilon}{3}$，

对 $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = \min\{1, \dfrac{\varepsilon}{3}\}$，则当 $0 < |x-1| < \delta$ 时，有

$$|f(x)-1| < \varepsilon$$

$\therefore \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$.

补充题

1．求下列极限

(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$；

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+x}-\sqrt[n]{x+1}}{x}$;

(4) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}$；

(5) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)^x$；

(6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$

(7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{tg}x - \sin x}{x^3}$；

(8) $\lim\limits_{x \to 1} (1-x)\,\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{\sin^2 x}$;　　(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{1-\cos x}}$;

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3\mathrm{tg}^2 x\right)^{\mathrm{ctg}^2 x}$;　　(12) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$;

(13) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$;$(a>0)$　　(14) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\ldots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a_i>0)$.

2．讨论单侧极限

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^x}, & 0<x\le 1\\ x^2, & 1<x<2\\ 2x, & 2<x<3\end{cases}$，在在 0，1，2 三点.

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right]$在$x=\dfrac{1}{n}$各点.

3．证明下列关系式

(1) $\sqrt{1+\mathrm{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}\sim\dfrac{1}{4}x^3\ (x\to 0)$.

(2) $\sin 2\pi\sqrt{n^2+1}\sim\dfrac{\pi}{n}\qquad(n\to\infty)$.

(3) $\dfrac{\sin x}{1+x^2}=O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\qquad(x\to\infty)$.

(4) $\dfrac{x+2}{x^4+3}=o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\qquad(x\to\infty)$.

4．设 f(x)在$(a,+\infty)$上单调上升，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，若$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，

求证：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$. (A 可以为无穷)

5．设 f(x)在$(a,+\infty)$上严格增，若$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$，

You stupid cunt !
cunnilingus   penis   vagina

求证：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

6. 设 f(x)在[a,b]上严格递增，如果对于 $x_n \in [a,b]$,(n=1, 2, …)有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = f(a)$ 成立，

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

7. 设 f(x)是 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期函数，又 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$，求证：$f(x) \equiv 0$.

8.设 $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 - ax^2 - x + 4}{x+1}$ 有有限极限值 L，试求 a=?　　L=?

9. 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ (点 x_0 可能例外)内有定义，

试证：如果对任意点列

$$\{x_n | x_n \in U(x_0),\ x_n \to x_0 (n \to \infty),\ 0 < |x_{n+1} - x_0| < |x_n - x_0|\}$$

都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. [提示：可用反证法]

10. 证明：若 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = 0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{m} a_i \cdot \sqrt{x+i} = 0$.

第四章　函数的连续性

函数 f(x)在点 x_0 连续有下列各种等价叙述

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

(2) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，$\forall x:|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

(3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,(其中$\Delta x=x-x_0,\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$).

(4) $f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$.

(5) $\forall x_n:x_n\to x_0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$.

(6) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\Rightarrow f[U(x_0,\delta)]\subset U(f(x_0),\varepsilon)$.

引进记号：用 C[a,b]表示定义在[a,b]上所有连续函数全体.

思考题：

1．(1)试用“$\varepsilon-\delta$”言语写出 f(x)在 $x=x_0$ 点左连续的定义.

(2)如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，那么 f(x)在 x_0 点是否连续，若不连续，有哪些可能的间断情况？

2．能否补充定义 f(0)，使得下列函数 f(x)在 x=0 点连续？

(1)f(x)=$(1+x)^{\frac{1}{x}}$,　　　$x\neq 0$.

(2) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$,　　　$x\neq 0$.

(3) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$,　　$x\neq 0$.

3.证明

(1)设对于所有的 x，函数 f 满足$|f(x)|\le|x|$，则 f(x)在 x=0 点连续.

(2)设函数 g 在 0 点连续，且 g(0)=0 及$|f(x)|\le|g(x)|$，则 f(x)在 x=0 连续.

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

(3)设 f 只可能有可去不连续点，定义 g(x)= $\lim\limits_{y\to x} f(y)$, 则 g(x)为连续函数.

(4)设 y=f(x)在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 f(x+t)=f(x)+f(t)，且在 x=0 点连续，则 f(x)在 $(-\infty,+\infty)$ 上任一点 a 处连续.

4．设在点 x_0 处，f(x)连续，g(x)不连续，问 f(x)+g(x)与 $f(x)\cdot g(x)$在 x_0 点是否连续？若 f(x)与 g(x)在点 x_0 处都不连续，结果怎样？

5．试作出两个处处不连续的函数的复合函数是处处连续函数的例子.

6．试作出一个定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上只有两个连续点的函数.

7．作一函数 f(x)，使它在 $(-\infty,+\infty)$ 处处不连续，而 $|f(x)|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处连续.

8．设 $g(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{有无理数}\end{cases}$， $x\in[-1,1]$，研究函数 $x\cdot g(x)$， $x\in[-1,\ 1]$ 的连续性.

9．设 $f(x)\in C[a,b]$ 且 $f(a)<f(b)$，则它的值域是否就是 $[f(a),f(b)]$？

若 f(x)在[a,b]上还是单增的，结果如何？

10．若 f(x)在[a,b]上仅有一个 $x_0\in(a,b)$ 第一类间断点，证明 f(x)在[a,b]上有界.

11．试举例说明，根的存在性定理(零值定理)对于在[a,b]上有定义，在(a,b)内连续的函数不一定成立.

12．若 f(x)是连续的奇函数，则 f(x)至少有一个根.

13．设 f(x)在(a, b)内连续，且恒为正，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，

证明：至少存在一点 $\zeta\in(a,b)$，使 $f(\zeta)=\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)}$.

14．设 f(x)，$g(x)\in C[a,b]$，且 f(a)>g(a), f(b)<g(b)，

求证：在(a,b)内至少有一点 ζ，使 $f(\zeta)=g(\zeta)$.

15．设 f(x)在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 f[f(x)]=x，

求证：存在 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，使 $f(x_0)=x_0$.

16．若 $f(x)\in C[a,b]$，且对任何 $x\in[a,b]$，存在相应的 $y\in(a,b)$

使得 $|f(y)|\le\frac{1}{2}|f(x)|$，则至少存在一点 $\zeta\in[a,b]$，使 $f(\zeta)=0$.

17．设 $f(x)\in C[a,b]$，

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

令 $f_t(x)=\begin{cases} f(x), & f(x)>t\text{的}x\in[a,b] \\ t, & f(x)\le t\text{的}x\in[a,b] \end{cases}$，求证：$f_t(x)\in C[a,b]$.

18．设 f(x)，g(x)$\in$C[a,b]，若在一切有理点 $x\in[a,b]$上 f(x)=g(x)，证明：

在[a,b]上$f(x)\equiv g(x)$.

19．研究函数

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{当}x\text{为大于0的无理数} \\ \dfrac{1}{q}, & \text{当}x=\dfrac{p}{q}, p, q\text{为互质的正整数} \end{cases}$$ 的连续性.

20．设 f(x)在 x=0 处连续，且对 $\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$ 恒有

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)-2x_1x_2$$

证明：(1)f(c)=0.

(2)f(x)在$(-\infty,+\infty)$上连续.

21．设 f(x)$\in$C(0, $+\infty$)，且满足 f(x^2)=f(x)，(x>0)

证明：f(x)为一常数.

22．设$f(x)\in C[0,1]$，值域为[0,1]，则至少存在一点$x\in[0,1]$，使$f(x)=x$.

23．若$f(x)\in C[a,b]$且 f(x)恒为有理数，问 f 应为怎样的函数？

24．设 f(x)满足介值性，并且对每一值，f 只取得一次，证明 f 是连续的.

25．设 f 是连续函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^n}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^n}=0$，证明：

当 n 是奇数时，必有一数ζ满足$\zeta^n+f(\zeta)=0$.

26．设 f(x)在[a,b]上递增，且有介值性，证明$f(x)\in C[a,b]$.

27．设$f(x)\in C[a,b]$，且 f(a)=f(b)，证明：

一定存在$x_0\in[a,\dfrac{a+b}{2}]$，使$f(x_0)=f(x_0+\dfrac{b-a}{2})$.

28．下面说法是否成立？为什么？

(1)若 f(x)分别在[a,b]与[c,d]上都一致连续，则 f(x)在[a,b]$\cup$[c,d]上也一致连续.

(2)若 f(x)分别在(a,b)与(b,c)上均一致连续，则 f(x)在(a,b)$\cup$(b,c)上也一致连续.

(3)若 f 和 g 在区间 I 上一致连续，则$f(x)\pm g(x)$在 I 上也一致连续.

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

29．有人说：若 f(x)在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 必存在，对吗？

30．证明：若 f(x)在(a,b)内连续，单调有界，则 f(x)在(a,b)内一致连续. 若在条件中将单调去掉，结论是否还成立？

31．证明：设 f 在 $(a,+\infty)$ 上连续，且当 $x\to+\infty$ 时，y=f(x)以直线 y=bx+c 为渐近线，即满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(bx+c)]=0$，则 f(x)在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

(提示：方法 1，按一致连续定义证. 方法 2，先考虑函数 φ(x)=f(x)−(bx+c)的一致连续性)

补充题：

1．试决定常数 a, b, c 使函数

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c, & 0<|x|<1 \\ -1, & x=0 \\ 1, & |x|\ge 1 \end{cases}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处连续.

2．证明 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases} 1, & x\text{为有理数} \\ 0, & x\text{为无理数} \end{cases}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处不连续.

3．用定义证明

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\text{为有理数} \\ 0, & x\text{为无理数} \end{cases}$$

仅在 x=0 连续.

4．证明：方程 x=asinx+b　　(a>0,b>0)

至少有一个正根，并且它不超过 a+b.

5．设 f(x)在(a,b)上连续，极限 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 都存在且异号，证明：必有一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

6．已知 f(x)在[0，1]上非负连续，且 f(0)=f(1)=0，则对任意实数$\ell \in (0,1)$，必有点 $x_0 \in [0,1]$，使$f(x_0) = f(x_0 + \ell)$.

7．设 f(x)在(a,b)内连续，若有数列$x_n, y_n \in (a,b), x_n \to a, y_n \to a$，使极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = B$存在，则对 A 与 B 之间的任意数$\mu$，必可找到数列$z_n \to a$，使$\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \mu$.

8．若 f(x)在[a,b]上只有第一类间断点，则 f(x)在[a, b]上有界.

9．证明：若 f(x)在(a,b)上连续，且 f(a+0), f(b−0)存在有限，则 f(x)可取到 f(a+0)与 f(b−0)之间的所有值，但 f(a+0),f(b−0)不一定能取到.

10．设 f(x)在区间 I 上有定义，$x_0 \in I$，则

f(x)在 x_0 点连续$\Leftrightarrow$对$\forall x_n \in I, x_n \to x_0$，都有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

11．试证：若 f(x)为连续但不等于常数的周期函数，则 f(x)必有最小正周期.

12．设$f(x) \in C[a,b]$,若数列$x_n \in [a,b]$存在极限$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$，则必存在$x_0 \in [a,b]$，使 $f(x_0)=A$.

13．举例

(1)有上界无下界的无界集.

(2)既无上界又无下界的无界集.

(3)有最小上界，无最大下界的数集.

(4)含有最小上界但不含有最大下界的数集.

(5)既含有最小上界又含有最大下界的数集.

14．证明：若 f(x),g(x)在有限的区间 I 上一致连续，则 f(x)·g(x)在 I 上一致连续，并举例说明此命题对无限区间不成立.

15．证明：若 f(x)在(a, b)内连续，且$f(a+0) = f(b-0) = +\infty$，则

f(x)在(a,b)内能取得最小值.

16．证明：若 f(x)在(a, b)上连续：a<c<d<b，且 k,ℓ 为正数，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $kf(c)+\ell f(d)=(k+\ell)f(\xi)$.

17．设 f(x)定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上，对 $\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 且 f(x)在 x=0 点连续.

(1)求 f(0)=?

(2)证明 f(x)为奇函数.

(3)证明 f(x)在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

18．用“$\varepsilon-\delta$”语言写出 f(x)在(a,b)上不一致连续的涵义.

19．求证：$f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$ 在(−1，0)和(0，1)上都一致连续，但在 $0<|x|<1$ 上并非一致连续.

20．证明：

(1) $f(x)=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

(2) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在(0，1)上不一致连续.

(3) $f(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上一致连续.

(4) $f(x)=\sin^2 x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续.

(5) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

21．设 f(x)为 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期连续函数，证明：f(x)在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

定义：设函数 f(x)定义在(a,b)上，若存在常数 M>0，使对一切 $x_1,x_2\in(a,b)$，有

$$|f(x_2)-f(x_1)|\le M|x_2-x_1|$$

则称 f(x)在(a,b)上满足李普希兹(Lipschitz)条件.

22．若 f(x)在(a,b)上满足 lipschitz 条件，证明 f(x)在(a,b)上一致连续.

23．设 f(x)在 $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 上满足 lipschitz 条件，证明 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

24．设 $f(x)\in C[a,b]$,且只有唯一的最小值点 x_0,又设 $x_n\in[a,b]$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

定义：若对 $\forall[\alpha,\beta]\subset I$, $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上都一致连续，则称 f(x)在区间 I 上内闭一致连续.

25．下列说法是否正确，为什么？

(1)若 f(x)在有限区间 I 上无界，则 f(x)在 I 上必非一致连续.

(2)若 f(x)在区间 I 上无界，则 f(x)在 I 上必非一致连续.

(3)f(x)在(a, b)上一致连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在(a, b)上内闭一致连续.

(4)f(x)在区间 I 上内闭一致连续 $\Leftrightarrow$ f(x)在 I 上连续.

(5)f(x)在区间 I 上一致连续 $\Leftrightarrow$ 对区间 I 中满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 的任何两个数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 总有 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0$.

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

第五章 导数与微分

思考题：

1．是否成立？

(1) $f'(x_0)=[f(x_0)]'$； $f'_+(x_0)=f'(x_0+0)$．

(2)若 $f'(x_0)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n[f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0)]=f'(x_0)$．

2. 若连续函数 f(x)在 $x=x_0$ 处不可导，问曲线 y=f(x)在点(x_0,f(x_0))处的切线能否存在？

3. 设 f(x)在 x_0 点可导，g(x)在 x_0 点不可导，问 f(x)+g(x)及 f(x)·g(x)在 x_0 点是否可导？

4．能否说：初等函数在其定义域内都是可导的？

5. 若 f(x)在 x_0 点可导，能否推出必存在点 x_0 的某邻域 U(x_0),使 f(x)在 U(x_0)内可导？

6．设 f(x)在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且满足：

(1)f(x)=f(x^2)，$x\in(-\infty,+\infty)$，

(2)在 x=0 点可导，

求 df(0).

7．设 f(x)对 $\forall x_1$，$x_2\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$,且 f '(0)=1，

证明：f '(x)=f(x).

8．若 f(x)在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且存在常数 k 与 a>1，使对 $\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|\le k(x_1-x_2)^a$，证明 f(x)为一常数.

9．设 f(x)在 $(-\infty,+\infty)$ 内有连续导函数 f '(x)，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$，证明：至少存在一点 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使 $f'(\xi)=0$．

10．证明：若 f(x),g(x)在 x=0 处可导，且 g'(0)≠0，又 f(0)=g(0)=0，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(0)}{g'(0)}.$$

补充题：

1．研究函数

① $f(x)=\begin{cases} x\,\mathrm{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$

在 x=0 点的可导性.

② $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

在 x=0 的可导性.

2．设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\ge 0 \\ x^3, & x<0 \end{cases}$，求 $f'(x)$.

3．设 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，你能用几种方法求出 $f'(0)$？

4．设 f(x)在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶导数连续，且 f(0)=0，对于函数 $g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & x\ne 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$

(1)确定 a 的值，使 g(x)在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

(2)证明确定的 a 值，可使 g(x)在 $(-\infty,+\infty)$ 上一阶导数连续.

5．设 $\varphi(x)$ 当 $x\leqslant x_0$ 有定义，并且二阶导数存在，应该怎样选取系数 a,b,c，才能使函数 $f(x)=\begin{cases} \varphi(x), & x\le x_0 \\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, & x>x_0 \end{cases}$ 的二阶导数存在？

6．设 a 为常数，$f(x)=\begin{cases} x^a\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$，请回答下列问题：

(1)在什么情况下，f(x)不是连续函数？

(2)在什么情况下，f(x)是有界函数？

(3)在什么情形下，f(x)连续，但不可导？

(4)在什么情形下，f(x)可导，但 $f'(x)$不连续？

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

(5)在什么情形下，$f'(x)$连续？

7．设 $f(x)$在 $x_0\in(a,b)$ 处可导，而 $a<\alpha_n<x_0<\beta_n<b$，$(n=1,2,\cdots)$ 及 $\alpha_n\to x_0$，$\beta_n\to x_0$，试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\alpha_n)-f(\beta_n)}{\alpha_n-\beta_n}=f'(x_0)$.

8.设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{2x}, & x>0\\ (1-x^2)^{\frac{4}{3}}+\cos 2x-1, & x\le 0\end{cases}$

(1)研究 $f(x)$在 $x=0$ 处连续性与可导性.

(2)求 $f'(x)$.

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

第六章　中值定理与导数应用

思考题：

1．在 Rolle 定理中，它的条件是否缺一不可？使导数为零的点ξ是否唯一？试举例说明.

2．设 f(x)在[a,b]上连续，在(a,b)内可导，且在(a,b)内某点ξ有$f'(\xi)=0$,问是否一定有 f(a)=f(b)?

3．设$f(x),\ g(x)\in C[a,b]$，在(a, b)内可导，则函数$G(x)=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & 1 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix}$

应用 Rolle 定理会得出什么结论？

4．Lagrange 中值公式有哪几种形式？

5．Lagrange 定理条件是充要条件还是充分但非必要条件？

6．当 f(x)在[a,b]上满足 Lagrange 定理的条件时，对(a, b)内任一点ξ，是否在这区间内一定存在 x_1, x_2，使

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\quad (x_1<\xi<x_2)\ 成立？$$

请研究区间[–1，1]上的函数 $f(x)=x^3$.

7．验证函数$f(x)=\begin{cases} \dfrac{20+x^2}{8}, & 0\le x\le 2 \\ \dfrac{x^2+2}{x}, & 2<x<+\infty \end{cases}$，在[0，4]上满足 Lagrange 定理条件，并求出中值公式的中间值ξ.

8.假定 a_k 和 b_k 分别是 f(x)和 g(x)在点 $x=x_0$ 处的 Taylor 多项式的系数,即$a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$和$b_k=\dfrac{g^{(k)}(x_0)}{k!}$，试问函数

(1)f(x)+g(x);　　(2)f(x)·g(x);　3)$f'(x)$

在点 $x=x_0$ 处的 Taylor 多项式的系数是什么？

9．求函数 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 x=0 处的 Taylor 多项式.

10．在用洛必达法则求极限时，若 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在，是否 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 也不存在，为什么？试研究

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 2x}$

11．怎样利用洛必达法则求未定式 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}$ 的数列极限？试求

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\operatorname{arctg}\frac{a}{n}-\operatorname{arctg}\frac{a}{n+1})$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 e^{-n}$

12．试用洛必达法则求两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \text{ 与 } \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$$

问能否以此来代替第三章中两个重要极限的证明？为什么？

13．下面说法是否正确？为什么？

(1)设 f(x)定义在 D 上，若对一切 $x\in D$，都有 $f'(x)=0$，则 f(x)在 D 上为一常数.

(2)若可导函数 f(x)在(a,b)上严格递增，则 $f'(x)>0, x\in(a,b)$.

(3)设 f(x)定义在(a, b)上，$x_0\in(a,b)$，若 $f'(x_0)>0$，则必存在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 使 f(x)在 $U(x_0)$ 内最是严格递增的.

(4)若在区间 I 上 $f'(x)>g'(x)$，则在 I 上 f(x)>g(x).

(5)f(x)在[a,b]上的最大值，必是 f(x)的极大值.

(6)若 f(x)与 g(x)都在点 $x=x_0$ 处取极大值，则乘积 $f(x)\cdot g(x)$ 也在 $x=x_0$ 处取极大值.

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

(7)假设 f(x)在[a,b]上可导，若 f(x)在[a,b]上最小值在 a 点取到，则 $f'(a)\ge 0$.

(8)当 $b^2-3ac<0\ \ (a>0)$ 时， $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 无极值.

(9)设 g(x)在 $(-\infty,+\infty)$ 内严格增大，则 f(x)与 g[f(x)]在同一点达到极值.

(10)设 f(x)是二次连续可微的偶函数，且 $f''(0)\ne 0$,则 x=0 必为函数的极值点.

(11)f(x)是 n 次多项式 $\Leftrightarrow f^{(n+1)}(x)=0$.

(12)若 f(x)是非负函数，则 $cf^2(x)(c>0)$与 f(x)有相同的极值点.

补充题：

1．设 $f(x)=\begin{vmatrix}1 & x-1 & 2x-1\\ 1 & x-2 & 3x-2\\ 1 & x-3 & 4x-3\end{vmatrix}$ 证明：存在 $\xi\in(0,\ 1)$，使 $f'(\xi)=0$

2．证明：若 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(a)=f(b)=0,\ \ f'(a)\cdot f'(b)>0$，则 f(x)在(a,b)内至少有一个零点.

3．设 f(x)在 x_0 的某邻域 $U(x_0,\ \delta)$ 内连续，在 $U^o(x_0,\delta)$ 内可导，并且 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=A$ 存在，求证： $f'(x_0)$ 存在，且 $f'(x_0)=A$.

4．设 f(x)在 $[a,+\infty)$ 上连续，在 $(a,+\infty)$ 内可微，f(a)<0,

且 $f'(x)\ge k>0$， $x\in(a,+\infty)$ (k 是常数)

证明：方程 $f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 内有且仅有一个根.

5．设 $f(x)$ 在点 a 的某邻域 $U(a)$ 内可微，且 $f'(0)=0$，证明：必有一串 $x_n\to a\ (n\to\infty)$ 使

$$\lim_{n\to\infty} f'(x_n)=0.$$

6．设 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上满足罗尔定理条件，且不恒等于常数，则必有两点 ξ， $\eta\in(a,\ b)$ 使 $f'(\xi)>0$， $f'(\eta)<0$.

7. 设 $f(x)\in C[a,\ b]$，在 $(a,\ b)$ 内可导，且在有限个点上 $f'(x)=0$ 外，都有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上严格增大.

8．设 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 内二阶可微，且 $f''(\xi)\ne 0$， $\xi\in(a,\ b)$，试证：

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

存在两点 x_1，$x_2 \in (a, b)$ 使

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi).$$

9．设(1) $f(x)$，g(x)在 $[a, b]$ 上二阶可导，

(2)a＜c＜b，$g(c)\neq 0$，

(3) $f(a)=f(b)=0$，$g(a)=g(b)=0$，

则存在一点 $\xi \in (a, b)$，使

$$\frac{f(c)}{g(c)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$

10．设 $f(x)$ 满足条件 $f(0)=0$，$f''(x)<0$，

证明：当 x>0 时

(1) $f'(0)>\dfrac{f(x)}{x}>f'(x)$；

(2) $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 严格递减.

11．设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\beta>0$，则必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\beta$.

12．设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导，试证 $\exists\xi(a, b)$，使

$$2\xi[f(b)-f(a)]=\left(b^2-a^2\right)f'(\xi).$$

13．若 $f(x)$ 可导，试证：在 $f(x)$ 的两个零点之间一定有 $f(x)+f'(x)$ 的零点.

14．若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，试证：对 $\forall n\in N$，在 $(0, 1)$ 内存在 n 个不同的点 ξ_1，ξ_2，$\cdots\xi_n$，使 $\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{1}{f'(\xi_i)}=n$.

15．设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微，对于每一 $x\in[0, 1]$，$0<f(x)<1$，且 $f'(x)\neq 1$，试证：在 $(0, 1)$ 内有且仅有一个 x，使 $f(x)=x$.

16．设 $f(x)$ 满足

(1)在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)=0$，

You stupid cunt !
cunnilingus　penis　vagina

(2)在(a, b)内有二阶导数$f''(x)$，且$f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，

证明：至少存在一点$\xi\in(a, b)$，使$f''(\xi)<0$.

(提示：先证$\exists x_0\in(a, b)$，使$f(x_0)>0$，再在$[a, x_0]$，$[x_0, b]$上使用拉格朗日中值公式，最后再用一次拉格朗日公式.)

17．设$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导，且 0<a<b，试证：

在(a, b)内存在ξ，η使$f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$成立.

(提示：先用柯西定理，再用拉格朗日定理.)

18．设$f(x)$在$[0, 1]$上连续，在$(0, 1)$内可导，且$f(0)=f(1)=0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，证明：在$(0, 1)$内有一点$x_0$，使$f'(x_0)=1$.

19．设$f(x)$在$[0, 1]$上连续，在$(0, 1)$内可导，且$f(1)=0$，

试证：至少存在一点$\xi\in(0, 1)$，使$f'(\xi)=-\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$.

20．设$f(x)$在$[-1, 1]$上可导，且$f(0)=0$，$|f'(x)|\le M$，(M 为正常数)

证明：在$[-1, 1]$上有$|f(x)|\le M$.

21．设$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导，$f(a)=f(b)=0$，$M=\max\{|f(x)|\,|x\in[a, b]\}$，证明：

存在点$\xi\in(a, b)$使$|f'(\xi)|\geqslant\dfrac{2M}{b-a}$.

22．设$f(x)$在$[0, 1]$上连续，$f(0)=0$，且在$(0, 1)$可导，$0\leqslant f'(x)\leqslant 2f(x)$，

求证：$f(x)\equiv 0$.

23．设$f(x)$在$[0, +\infty)$上可导，且$0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}$，

证明：存在$\xi>0$，使$f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{\left(1+\xi^2\right)^2}$.

(提示：考虑辅助函数$\varphi(x)=\dfrac{x}{1+x^2}-f(x)$)

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

24．若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且有最大值 1，最小值 0.

试证：(1)必有点 $\xi\in(0,1)$ 使 $|f'(\xi)|>1$.

(2)必有点 $\eta\in(0,1)$ 使 $f''(\eta)>2$.

25．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有一阶连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$，

证明：对 $\forall$ 实数 a 及 $[0,1]$ 上任何一个可微函数 $g(x)$，都存在 $\xi\in(0,1)$，使

$$f'(\xi)=af(\xi)g'(\xi)$$

(提示：考虑函数 $F(x)=f(x)e^{-ag(x)}$)

26．证明：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内有唯一的一个极值点 x_0，若 f 在 x_0 达到极大(极小)，则 f 在 x_0 达到最大(最小).

27．证明不等式

$$\frac{\sin x_2-\sin x_1}{x_2-x_1}>\frac{\sin x_3-\sin x_2}{x_3-x_2}.\ (\text{此处 } 0\leqslant x_1<x_2<x_3<\pi)$$

28．设 $f''(x)\neq 0$，微分中值公式为

$$f'(x+\theta h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$.

29．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，又 $F(x)=(x-a)f(x)$，那么在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $F''(\xi)=0$.

30．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=0$，$f(x)>0$，$x\in(a,b)$，

证明：不存在常数 M>0 使 $\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|\leqslant M \quad x\in(a,b)$.

(提示：用反证法)

31．证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$，则在 (a,b) 内至少存在一点 c 使

$$|f''(c)|\geq\frac{2}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

(提示：在区间$\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$与$\left[\dfrac{a+b}{2}，b\right]$上用微分中值定理)

32．设$f(x)$在$[0，1]$上二阶可导，$f(0)=f(1)$，且$|f''(x)|\leqslant 2$，试证：$|f'(x)|\leqslant 1$.

33．设$f(x)$二阶可导，证明下述两结论

(1) $f''(x)\geqslant 0$

(2)对$\forall x_1$与x_2总有$f(x_1)\geqslant f(x_2)+f'(x_2)(x_1-x_2)$

是等价的.

34．设$f(x)$在$[0，2]$上二阶可导，并且当$x\in[0，2]$时$|f(x)|\leqslant 1$，$|f''(x)|\leqslant 1$，证明：$|f'(x)|\leqslant 2$，$x\in[0，2]$.

35．设$f(x)$在$[a，b]$上满足

(1) $f(a)=f(b)=0$，

(2) $f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$，其中$g(x)$为任一函数.

证明：在$[a，b]$上，$f(x)\equiv 0$

36．已知$f(x)$在$(0，1)$内取得最大值，在$[0，1]$上二阶可微，且在$[0，1]$上$|f''(x)|\le 1$.

证明：$|f'(0)|+|f'(1)|\le 1$.

37．设$f(x)$在全数轴上二次可微，且有界，试证：必有x_0，使$f''(x_0)=0$.

38．设$f(x)$在$[0，1]$上具有连续的三阶导数，且$f(0)=1$，$f(1)=2$，$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，证明：在$(0，1)$内至少存在一点$\xi$，使$|f'''(\xi)|\geqslant 24$.

39．证明：若在$(a，b)$内$f''(x)>0$，对$\forall x_1$，$x_2\in(a，b)$及$\forall$两正数λ_1，λ_2，$\lambda_1+\lambda_2=1$，则有不等式

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)<\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2).$$

(提示：利用微分中值定理)

40．应用第39题($\lambda_1=\lambda_2=\dfrac{1}{2}$)证明下列不等式.

(1) $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n<\dfrac{1}{2}\left(x^n+y^n\right)$，$x>0$，$y>0$，$n>1$.

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

(2) $e^{\frac{x+y}{2}} < \frac{1}{2}\left(e^x + e^y\right)$， $x \neq y$.

(3) $(x+y)\ln\frac{x+y}{2} < x\ln x + y\ln y$　　x>0，y>0，x≠y.

41．设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的邻域内有连续的二阶导数，证明：

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{(x-a)f'(a)}\right]=-\frac{f''(a)}{2[f'(a)]^2}.$$

42．作函数 $y=\frac{\ln x}{x}$ 的图形，注明极值点，拐点和渐近线.

43．设 $f'(x)$ 在 $[a，b]$ 上连续，在 $(a，b)$ 内可导，且 $f''(x)>0$.若 x_0 为 $[a，b]$ 上的一点. 证明：对一切 $x\in[a，b]$，不等式 $f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 成立，等号仅在 $x=x_0$ 时成立.

44．设 $f(x)$ 在 $[0，c]$ 上严格单调下降，且可导，$f(0)=0$，

证明：对满足不等式 $0<a<b<a+b<c$ 的 a，b，恒有 $f(a)+f(b)>f(a+b)$.

45．设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，在 $(a,+\infty)$ 内可微，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(a)$，

证明：必存在 $\xi\in(a,+\infty)$，使 $f'(\xi)=0$.

46．设 $f(x)$ 在[a，b]上满足 Rolle 定理条件，证明：对任一实数 λ，存在 $\xi\in(a，b)$，使 $f'(x)=\lambda f(\xi)$.

47．设 $f(x)$ 在[a，b]上连续，在(a，b)内存在二阶导数，且 $\max\{f(a)，f(b)\}<f(c)$，其中 a<c<b.证明：在(a，b)内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)<0$.

48．设 $f(x)\in C[a，b]$，且 $f(a)=f(b)=0$，又设 $f(x)$ 在(a，b)内存在二阶导数，且 $f''(x)\le 0$，求证：在区间[a，b]上，$f(x)\geqslant 0$.

49．设 $f(x)$ 在[a，b]上二次可微，且 $f''(x)>0$，试证：当 a<x<b 时，有不等式

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

第五章　补充练习

1．求 $f'(x)$

You stupid cunt !
cunnilingus　penis　vagina

①$f(x)=\sin\left(x^2\cdot\sqrt{x}\right)$　　②$f(x)=\lg^3 x^2$

③$f(x)=\dfrac{x^3}{1+x}$　　④$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{x}+(\operatorname{tg}2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$

⑤$f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\dfrac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}$，(a>0，b>0)　　⑥$f(x)=e^{-3x}\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)$

⑦$f(x)=\sec^2\left(\dfrac{x}{a}\right)+\csc^2\left(\dfrac{x}{a}\right)$　　⑧$f(x)=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\left(\dfrac{x}{a}\right)^b$

⑨$f(x)$由方程确定

i) $xy-\ln y+1=0$　　ii) $x^y=y^x$

⑩$y=f(x)$由参数方程确定

i) $\begin{cases}x=a\cos^3\theta\\ y=a\sin\theta\end{cases}$　　ii) $\begin{cases}x=e^t\cos t\\ y=e^t\sin t\end{cases}$

2．求$\dfrac{dy}{dx}$

①$y=\dfrac{\sin^2 x}{1+\operatorname{ctg}x}+\dfrac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg}x}$　　②$y=\ln\left(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}\right)$

③$y=\dfrac{3}{2}\left(1-\sqrt[3]{1+x^2}\right)+\ln\left(1+\sqrt[3]{1+x^2}\right)$　　④$y=x+x^x+x^{x^x}$

3．求下列函数的 n 阶导数

①$y=\dfrac{1}{x(x+1)}$　　②$y=\dfrac{1}{1-x^2}$

③求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$，y 与 x 满足

i) $\begin{cases}x=\ln\left(1+t^2\right)\\ y=t-\operatorname{arctg}t\end{cases}$　　ii) $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$

④y 与 $y(x)$ 由方程 $3y-x=(x-y)\ln(x-y)$ 确定，求 y''_{xx}.

⑤证明 $\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)}=(-1)^n\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$.

4．求 dy

① $y=\dfrac{x\ln x}{1-x}+\ln(1-x)$

② $y=\sqrt{x^2+1}-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

③ $y=\sqrt[5]{x^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$

④ $y^3=x^2+xy+y^2$

⑤ $y=e^{-ax\sin bx}$

⑥ $y=\operatorname{arctg}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)$

⑦ $y=\ln\left(\ln^2\left(\ln^2(x)\right)\right)$

⑧ $y=x|x|$

5．计算

①求 $dy|_{x_0=0}$．

i) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

ii) $e^{x+y}-xy=1$

② $y=\operatorname{arctg}x$　求 $y^{(k)}(0)$． k=0，1，2…

③ $f(x)=[x]$，求 $f'\left(\dfrac{3}{2}\right)$．

④求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x_0=1}$， $f(x)=x+(x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$．

⑤求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$， $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$．

第七章 极限与连续性(续)

一、问答题

1．何谓数列的柯西条件、闭区间套、数集的确界、点集的聚点、开覆盖、有限子覆盖及有限覆盖定理.

2．在闭区间套定理中将闭区间列改为开区间列，或舍去条件 $(b_n - a_n) \to 0$ $(n \to +\infty)$ 结论如何？

3．数集与数列的本质差别何在？

4．上(下)确界与最大(小)值有何区别？有何联系？

5．举例说明实数连续性的六个等价命题中的任何一个在有理数系内都不成立，由此领会将有理数系扩充到实数系在极限理论从而在数学分析中的意义？

6．举例说明有限覆盖定理中 i)被覆盖的是一个闭区间[a，b]，这个闭性很重要，若把它改为[a，b)、(a，b]或(a，b)，定理结论未必成立；ii)覆盖[a，b]的是一个开区间族，这个开字也很重要，否则定理结论亦未必成立.

7．举例

i)有上确界无下确界的数列.

ii)含有上确界但不含有下确界的数列.

iii)既含有上确界又含有下确界的数列.

iv)既不含有上确界，又不含有下确界，但上、下确界都有限的数列.

8．用实数连续性的六个等价例题中的任意一个都可以证明闭区间上的连续函数的四个性质吗？

9．试从数列 $\left\{a_n = n^{(-1)^n}\right\}$ 中 (1)选出二个不同的收敛于 0 的子列.

(2)选出二个不同的发散子列.

二、是非题

1．一个数列是否存在极限，不仅与数列本身有关，而且与我们把数列放置在哪个数系有关.

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

2．若数集$\{a_n\}$不只一个聚点，则数列$\{a_n\}$必发散.

3．若数集$\{a_n\}$有唯一聚点，则数列$\{a_n\}$必收敛，若再加“有界”条件，结论如何.

4．收敛数列对应的点集必有聚点.

5．发散数列对应的点集必无聚点.

6．$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \rightleftarrows$ 数集$\{a_n\}$以 a 为聚点.

7．ξ为数集 S 的聚点 $\Leftrightarrow$ $\forall\delta>0$，$U^o(\xi，\delta)\cap S$为无穷点集.

8．ξ为数集 S 的聚点 $\Leftrightarrow$ $\forall\delta>0$，$U^o(\xi，\delta)\cap S\neq\phi$.

9．有界无穷点列至少有一个子列为柯西列.

10．若$\{a_n\}$的一切收敛子都以 a 为极限，则$\{a_n\}$也以 a 为极限.

11．$\{a_n\}$收敛$\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$的任一子列都收敛.

12．若单增数列有一子列收敛，或有一子列上有界，则原数列收敛.

13．有上(下)界的数集必有上(下)确界.

14．有界点集至少有一聚点.

15．有确界的数集必有聚点.

16．有聚点的数集必有上或下确界.

17．收敛数列必至少达到其上、下确界之一.

18．若$a=\sup A$，且$a\notin A$，则 a 为 A 的聚点.

19．$\{a_n\}$单增上有界，则$\sup\limits_n\{a_n\}$与$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$均存在，且$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\sup\limits_n\{a_n\}$.

20．若$f(x)>0$，$x\in D$，则$\inf\limits_D\{f(x)\}>0$.若再加条件“$\min\limits_D\{f(x)\}$存在”，结论如何？

21．设 A、B 为二个非空有界数集，且$A\subset B$，则$\inf B\leqslant\inf A\leqslant\sup A\leqslant\sup B$.

22．若$[a_n，b_n]\subset[a_{n+1}，b_{n+1}]$，n=1，2，…，则闭区间列$\{[a_n，b_n]\}$必有公共点.

23．收敛数列必有界，有界数列未必收敛，但它必有收敛子列，单调有界必收敛.

24．无界数列未必趋于无穷大，但有趋于无穷大的子列，单调无界数列必为无穷大.

25．二个基本点列的和与积均为基本点列.

26．二个一致连续函数的积必为一致连续.

三、证明下列结论.

1．令 $x_0 = a$， $x_1 = b$， $x_n = \dfrac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$，n=2，3，…，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在，并求其值.

2．实数 a 是 $\{a_n\}$ 某子列的极限 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$，存在无穷多个 n，使 $|a_n - a| < \varepsilon$.

3．实数 a 不是 $\{a_n\}$ 任一子列的极限 $\Leftrightarrow \exists\varepsilon_0 > 0$ 使 $U(a，\varepsilon_0)$ 中至多含有 $\{a_n\}$ 的有限多项.

4．若数集 E 的上确界 $\sup E \notin E$，则存在严格增加数列 $\{x_n\} \subset E$，使 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sup E$.

5．若数列 $\{a_n\}$ 的如下子列：$\{a_{2k}\}$、$\{a_{2k+1}\}$、$\{a_{3k}\}$ 都收敛，则 $\{a_n\}$ 收敛.若仅有 $\{a_{2k}\}$、$\{a_{2k+1}\}$ 收敛，结论如何？

6．证明：若 $\{x_n\}$、$\{x_n\}$ 均为有界数列，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$，则一定存在下标号相同的子列 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$、$\{y_{n_k}\} \subset \{y_n\}$，使 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{k\to+\infty} y_{n_k}$，即 $\{x_{n_k}\}$、$\{y_{n_k}\}$ 收敛于同一个数.

7．若定义在[a，b]上的函数 $f(x)$ 在[a，b]上处处有有限极限，则 $f(x)$ 在[a，b]上有界.

8．点集 $S = \left\{0,\ 1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \cdots,\ \dfrac{1}{n},\ \cdots\right\}$ 被开区间集 H 所覆盖，则 H 中能找出有限个开区间覆盖 S.

9．若函数 $f(x)$ 在[a，b]上连续，且对任意的 $x \in [a，b]$，有 $f(x) > 0$，则存在 r>0，对任意 $x \in [a，b]$，有 $f(x) > r$.(要求：用有限覆盖定理证)

10．用确界存在定理证有限覆盖定理.

证明思路：设开区间族 $\{I_\alpha\}$ 为闭区间[a, b]的一个覆盖，则 $\exists I_\alpha$，使 $a \in I_\alpha \Rightarrow \exists c$: a<c≤b 使 $[a，c] \subset I_\alpha$，令 $S = \{c | [a，c]$ 可被 $\{I_\alpha\}$ 中有限个开区间覆盖，c≤b}，由确界存在定理可令 $\sup S = C^*$，下面用反证法证明 $C^* = b$，且 $b \in S$.

注： 用确界存在定理证明闭区间[a，b]具有某个性质 P 时，一般均可采用上述方法，其步骤为第一步令 $S=\{c\le b$: [a，b]具有性质 P$\}$，证 $S\ne\phi$；第二步令 $C^*=\sup S$，用反证法证 $C^*=b$，且 $b\in S$.

11．若函数 $f(x)$ 在[a，b]上连续，且有无限多个零点，则函数 $f(x)$ 在[a，b]内必有最大的零点.(提示：令 $S=\{x:x\in[a，b], f(x)=0\}$，证 S 非空有界，由上确界存在定理，可令上确界 $\sup S=x_0$，最后由 $f(x)$ 的连续性证明 x_0 即为所求.)

12．用聚点存在定理证明确界存在定理.

13．用有限覆盖定理证明柯西收敛准则.

(注：第 10 题用确界存在定理证有限覆盖定理是用反证法，此处也用反证法.事实上，凡用有限覆盖证其它几个等价定理或用其它几个等价定理证有限覆盖定理均采用反证法.)

14．函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的几个等价叙述.

i)函数 $f(x)$ 在闭区间[a，b]上一致连续的充要条件为 f(x)在[a，b]上连续.

ii)函数 $f(x)$ 在有限开区间(a，b)内一致连续的充要条件为 $f(x)$ 在(a，b)内连续且 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 均存在(第七章总复习题 3).

注：ii)中的有限开区间改为无限区间，则充分性仍真，但必要性不成立.例如，$f(x)=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致连续，但 $\lim\limits_{x\to\infty}x$ 不存在.

iii)函数 $f(x)$ 在有限区间 I 上一致连续的充要条件为 $f(x)$ 把 I 上的柯西列变为柯西列.

注：iii)中充分性对无穷区间不成立，但必要性在无穷区间中仍真.

iv)函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的充要条件为：对区间 I 上的任意二个数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，当 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-y_n)=0$ 时，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0$.

注：iv)常用于验证函数在 I 上不一致连续.

15．设开区间族 $H=\{I_n|\quad n\in N\}$，其中 $I_n=\left(\frac{1}{n}，2\right)$，求证：H 为(0，2)的一个开

覆盖，但 H 中不存在(0，2)的有限子覆盖.

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

第八章　不定积分

一、思考题

1．正确理解微分运算和积分运算的互逆关系？下列式子正确吗？

$\int f'(x)dx = f(x)$，　　　$d\int f(x)dx = f(x)$．

2．如果函数的定义域不是区间，而是一般的数集，(例如二个分离区间的并)它的二个不同的原函数是否亦仅相差一个常数.

3. 哪类函数一定有原函数？初等函数在其定义区间上一定有原函数吗？哪类函数一是定无原函数？为什么？

4．若函数 f(x) 在区间 I 上的不定积分存在，则对 $\forall k \in R$，一定有 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$，你认为对吗？

5. 若 F(x)是 f(x)的一个原函数，G(x)为 $1/f(x)$ 的一个原函数，且 $F(x)\cdot G(x)=-1$，$f(0)=1$，求 f(x).

6．f(x)的原函数存在与不定积分可求出(即可用初等函数表示)等价吗？

7．下面的推导错误何在？

$$\because \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{1}{\sin x}d\sin x = 1 - \int \sin x d\frac{1}{\sin x} = 1 + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$\therefore 1 = 0$

8．有的同学在求分段函数 $f(x) = \begin{cases} -\sin x, & x \ge 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$ 的不定积分时得

$$\int f(x)dx = \begin{cases} \int -\sin x dx = \cos x + c, & x \ge 0 \\ \int x dx = \dfrac{x^2}{2} + c, & x < 0 \end{cases}$$

，你认为正确吗？

9．请指出在计算 $I = \int \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$ 的下列过程中的两处错误.

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

解：令 $x=\pi-t$，

则 $I=\int\frac{(\pi-t)\sin t}{\cos^3 t}dt=\pi\int\frac{\sin t}{\cos^3 t}dt-\int\frac{t\sin t}{\cos^3 t}dt$

$$=\pi\int tgtdtgt-I=\frac{\pi}{2}tg^2t-I=\frac{\pi}{2}tg^2x-I$$

$\therefore\ I=\frac{\pi}{4}tg^2x$.

10．求 $\int\sin 2xdx$

解法一：$\int\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\cos 2x+c$.

解法二：$\int\sin 2xdx=2\int\sin x\cos xdx=2\int\sin xd\sin x=\sin^2x+c$.

两种解法结果形式不同，能否判断其中至少有一解法有误？如何解释这种现象.

11．设 $f(x)$的一个原函数为 $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，求 $\int xf'(x)dx$.

12．若 $\int f'(\sin^2x)dx=\cos^2x+c$，求 $f(x)$.

二、填空

1． $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=$________________

2． $\int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=$________________

3． $\int\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}dx=$________________

4． $\int\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx=$________________

5． $\int\frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)\pm a^2}}dx=$________________

6． $\int\sqrt{f^2(x)\pm a^2}\ f'(x)dx=$____________

7． $\int\frac{xdx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}dx=$____________

8． $\int tg\sqrt{1+x^2}\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ ____________

9． $\int\frac{(1+\ln x)^2}{x}dx$ ________________

10． $\int\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}dx=$________________

11. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^6}}dx =$ ______________

已知 F(x)为 f(x)的一个原函数，则

12. $\int f(ax+b)dx =$ ____________________________ $(a \neq 0)$.

特别地 $\int f(x+b)dx =$ ____________，$\int f(ax)dx =$ ____________ $(a \neq 0)$.

13. $\int xf(ax^2+b)dx =$ _____________，$\int x^m f(ax^{m+1}+b)dx =$ __________.

14. $\int a^x f(a^x+b)dx =$ _____________，特别地 $\int e^x f(e^x+b)dx =$ ______________.

15. $\int \frac{1}{x} f(\log_a^x + b)dx =$ __________，特别地 $\int \frac{1}{x} f(\ln x + b)dx =$ ______________.

16. $\int f(\sin x)\cos x dx =$ __________________________.

$\int f(\cos x)\sin x dx =$ ____________，$\int \frac{1}{\cos^2 x} f(\mathrm{tg} x)dx =$ ___________________.

17. $\int f(\arcsin\frac{x}{a})\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$ __________，$\int f(\mathrm{arctg}\frac{x}{a})\frac{dx}{a^2+x^2} =$ ____________.

三、补充练习题

1. $\int (8x+9)^{99}dx$

2. $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$

3. $\int x\sqrt[3]{1-x^2}dx$

4. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$

5. $\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x}\cdot\frac{dx}{x}$

6. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx$

7. $\int \ln(\cos x)\mathrm{tg}x dx$

8. $\int \sin 3x \cos x dx$

9. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$

10. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$

11. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}x}}{1+x^2}dx$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

13. $\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ (提示：原式$=\frac{1}{2}\int \frac{\sin x+\cos x-\cos x+\sin x}{\sin x+\cos x}dx$)

14. $\int \frac{dx}{x(x^n+1)}$ (令 $x=\frac{1}{t}$)

15. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx$

16. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$(先令 $x=\sin t$，再作万能代换)

17. $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$ (令 $u=x+\frac{1}{x}$)

18. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$ $(a>0)$,(令$x=\sqrt{a}\sec t$)

19. $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx$ $(a>0$, 令$x=2a\sin^2 t, 0\le t<\frac{\pi}{2})$

20. $\int \sqrt{x+x^2}dx$

21. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$

22. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$

23. $\int \sqrt{x}\ln x dx$

24. $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$ (三角代换或改写$-\frac{1}{2}\int xd(\frac{1}{1+x^2})$再分部积分)

25. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$

26. $\int xe^x\sin x dx$

27. $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

28. $\int \operatorname{Max}(1,x^2)dx$

四、自我检查题、积分.

1. $\int (1-\frac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}dx$

2. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$

3. $\int \frac{3^{x+1}-4^{x-1}}{12^x}dx$

4. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[n]{\sin x-\cos x}}dx$

5. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

6. $\int \frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)}dx$

7. $\int \frac{a^x}{a^{2x}+2}dx$

8. $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

9. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$

10. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x-x^2}}dx$

11. $\int [\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}]dx$

12. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)}dx$

13. $\int \arccos\sqrt{x}dx$

14. $\int \frac{1}{(e^x+e^{-x})^4}dx$

15. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$

16. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx$

17. $\int e^{-|x|}dx$

18. $\int \frac{x^3 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

19. $\int x\operatorname{arctg} x \ln(1+x^2)dx$

20. $\int \operatorname{tg}^n dx \quad (n \in N)$

第九章　定积分

一、判断下列命题的正确性，并说明理由.

1．(a，b)上的单调函数在[a，b]上一定 R—可积.

2．在[a，b]上仅有有限个间断点的函数在[a，b]上必 R—可积.

3．f(x)在 x=0 处连续，则 $\exists\delta>0$，使 $f(x)\in R[-\delta,\delta]$.

4．若 f(x)在[a，b]上有无穷个不连续点，则 f(x)在[a，b]上一定不 R—可积.

5．若仅改变可积函数在[a，b]上有限个点的值，不会影响 f(x)在[a, b]上的可积性和积分值.

6．$f(x)\in R[a,b]$，且 f(x)>0，则 $1/f(x)\in R[a,b]$，若将 $f(x)\in R[a,b]$ 改为 $f(x)\in C[a,b]$ 呢？

7. 若 $\varphi(u)$ 在[A，B]上可积，f(x)在[a，b]上可积，且当 $x\in[a,b]$ 时，$u=f(x)\in[A,B]$，则 $\varphi[f(x)]$ 在[A，B]上可积.

8．达布上和与下和都是特殊的 Riemann 和.

9．$f(x)\in C[a,b]$，则对 $\forall T$，总存在某个 $\{\xi i\}$，使 $\sum_f(T,\xi_i)=\int_a^b f(x)dx$.

10．$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx=f(b)$.

11．f(x), g(x)在 R 上连续，且 $\forall x\in R$，且 $f(x)\le g(x)$，则对 $\forall\alpha,\beta\in R$，有 $\int_\alpha^\beta f(x)dx\le\int_\alpha^\beta g(x)dx$.

12．奇函数的原函数皆为偶函数,偶函数的原函数中有一个为奇函数.

13．周期函数的原函数必是周期函数.

14．$f(x)\in C[a,b]\rightleftarrows f(x)\in R[a,b]\rightleftarrows f(x)\in B[a,b]$.

二、问答题

1．在定积分定义中强调了二个任意性，一是区间[a,b]分法的任意性，二是介点ξi 在

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

$[x_{i-1},x_i]$上选取的任意性，试证明ξ_i迭取的任意性已经蕴含了二个任意性.

2．在[a,b]上 R—可积的函数是否在[a,b]上一定存在原函数，反之，在[a,b]上存在原函数的函数是否一定在[a,b]上 R—可积.在什么条件下，f(x)在[a,b]上既 R—可积，又存在原函数，这时变上限的定积分$\int_a^x f(t)dt$就是 f(x)在[a,b]上的一个原函数，且 f(x)在[a,b]的定积分等于它的一个原函数在[a,b]上的增量.

3．牛顿—莱布尼兹公式在定积分的计算中起着无可替代的作用，但它成立的条件常被一些同学忽视，第九章总练习题 1 修改了 §4 的定理 2 给出的条件，事实上这个条件还可以减弱为：设$f(x)\in R[a,b],F(x)$在[a, b]上连续，且在[a, b]内除有限个点外均有$F'(x)=f(x)$，则$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$，对照这些条件，指出下列计算的错误所在：

(1) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-2$.

(2) $\int_0^{\pi}\frac{dx}{2+\cos 2x}$

$$\because\int\frac{dx}{2+\cos 2x}=\int\frac{\sec^2 x}{3+tg^2x}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{tgx}{\sqrt{3}})+c$$

$$\therefore\int_0^{\pi}\frac{dx}{2+\cos 2x}=[\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{tgx}{\sqrt{3}})]_0^{\pi}=0.$$

(3) $\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}[\operatorname{arctg}\frac{1}{x}]dx=[\operatorname{arctg}\frac{1}{x}]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}$.

4．定积分的换元积分法在计算中起着化难为易的作用，但注意换元条件是确保计算无误所必不可少的，请判断下列给定的变量替换合适吗？

(1) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{-dt}{1+t^2}\qquad(x=\frac{1}{t})$

$$=-\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}\Rightarrow\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=0.$$

(2) $\int_{-1}^{1}dx=\pm\int_{1}^{1}\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}dt\quad(t=x^{\frac{2}{3}})$

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

$= 0$.

(3) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

令 $tgx = t, \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{\sec^2 x}{\sec^2 + tg^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{dtgx}{1+2tg^2 x} = \int_0^0 \frac{dt}{1+2t^2} = 0$.

5．试举例说明积分第一中值定理中条件：“g(x)在[a,b]中不变号”不可少.

6．举例说明变上限积分运算不完全是微分逆运算.

三、计算

1． $F(x) = \int_a^{\int_1^x \sin^3 tdt} \frac{1}{1+\sin^6 t + t^2} dt$，求 $F'(x)$.

2． $F(x) = \int_x^b \frac{dt}{1+t^2+\sin^2 t}$，求 $F'(x)$.

3． $F(x) = \sin[\int_0^x (\int_0^y \sin^3 tdt) dy]$，求 $F'(x)$.

4．已知函数的参数方程为

$$\begin{cases} x = \int_1^t u \ln u du \\ y = \int_{t^2}^1 u^2 \ln u du \end{cases}，求 \frac{dy}{dx}.$$

5． ϕ^{-1} 为 $\phi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ 的反函数，求用 ϕ^{-1} 表示的 $[\phi^{-1}(x)]'$.

6．求 $f(x) = \int_0^1 t|x-t| dt$.

7．求 $f(x) = \int_x^{x+1} t(t-2)(t-4) dt \qquad (x \geq 0)$ 的极值点.

8．求 $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$.

9、求下列定积分：

(1) $\int_0^3 x\sqrt[3]{1-x^2} dx$ (2) $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$

(3) $\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$　　(4) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln(\frac{1-x}{1+x})\arcsin x^2 dx$

(5) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$　　(6) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

(7) $\int_0^{\pi} (x\cos x)^2 dx$　　(8) $\int_{1/4}^{1/2} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$

(9) $\int_0^a (a^2-x^2)^n dx \quad (n\in N)$　　(10) $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}dx$

(11) $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx$　　(12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$

(13) $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^9}$　　(14) $\int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}}dx$

(15) $\int_0^4 \mathrm{sgn}(\cos\pi x)dx$　　(16) $\int_{-1}^4 x\sqrt{|x|}\,dx$

(17) $\int_0^5 x[x^2]$ ([u]表示不超过数 u 的最大整数)

(18) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x}$　　(19) $\int_{e^{-2n\pi}}^1 \left|[\cos(\ln\frac{1}{x})]'\right|dx$

(20) $\int_0^1 \frac{\mathrm{arctg}x}{1+x}dx$

四、证明下列结论.

1．f(x)在[a,b]上连续，且$\int_a^b f(x)dx=0$，$\int_a^b xf(x)dx=0$，证明在[a,b]内至少有二个零点.

2．$f(x)\in R[0,1]$，且$\int_0^1 f(x)dx>0$，则存在某个区间$[a,b]\subset[0,1]$，使对$\forall x\in[a,b]$，有 f(x)>0.

3．f(x)在[0，1]上有界，$x=\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$为其不连续点，证明$f(x)\in R[0,1]$.

You stupid cunt !
cunnilingus penis vagina

4．设 f 连续，则 $\int_0^x f(u)(x-u)^2du = 2\int_0^x\left(\int_0^t\left(\int_0^s f(u)du\right)ds\right)dt$.

5．f(x), g(x)在[a, b]上连续，对任意分割 T，取 $\xi_i, \theta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $i=1,2\cdots,n$, 记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，则：

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\theta_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

6．f(x)在[a，b]上 R—可积，$f(x)\ge 0$，且 f(x)在 $x_0 \in [a,b]$ 连续，$f(x_0)>0$，则存在 c>0，使 $\int_a^b f(x)dx > c$.

7. (1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)} = 4/e$.

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi) = \frac{2}{\pi}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1-n^2}{n^3}+\frac{2^2-n^2}{n^3}+\cdots+\frac{n^2-n^2}{n^3}) = -\frac{2}{3}$.

8. 设 f(x)在[a，b]上有连续的导函数，且 f(a)=0，$M = \mathrm{Sup}\{f(x): a\le x\le b\}$ 则 $(b-a)\int_a^b [f'(x)]^2dx \ge M^2$.

9. 证明：(1) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\sin\frac{\pi}{x}), & x\in(0,1] \\ 0, & x=0 \end{cases}$

在[0,1]上可积.

$$(2)\ f(x) = \begin{cases} 0, & x\text{为有理数} \\ x, & x\text{为无理数} \end{cases}$$

在[0，1]上不可积.