

摘要

倒立摆系统作为研究控制理论的一种典型的实验装置，具有成本低廉，结构简单，物理参数和结构易于调整的优点，然而倒立摆系统本身所具有的高阶次、不稳定、多变量、非线性和强耦合特性，是一个绝对不稳定系统，必须采用十分有效的控制策略才能使之稳定。倒立摆系统是研究变结构控制，非线性控制，目标定位控制，智能控制等控制方法理想的实验平台。

本文围绕一级倒立摆系统和二级倒立摆系统，采用模糊控制和滑模变结构控制理论研究了倒立摆的控制系统仿真和实物系统控制问题。实物控制的成功进一步证明了本文设计的控制器有很好的稳定性、鲁棒性和适应性。主要研究工作如下：

1. 建立了一级、二级倒立摆系统的数学模型，对倒立摆系统进行定性分析。并证明倒立摆系统开环是不稳定的，但在平衡点是能控的和能观的。
2. 倒立摆系统的模糊控制算法研究。运用最优控制方法设计了融合函数，减少模糊控制器的输入变量维数，成功解决了“规则爆炸”问题。
3. 倒立摆系统的滑模变结构控制研究。运用常值切换和比例切换设计了倒立摆系统的滑模变结构控制器。
4. 实现了倒立摆模糊控制系统和滑模变结构控制系统的仿真。仿真结果证明：控制器不仅可以稳定倒立摆系统，还可以使小车定位在特定位置。
5. 实现了倒立摆实物系统控制。给出了一级、二级倒立摆稳定时各状态变量的响应曲线和控制量曲线以及倒立摆稳定时的照片。

关键词：倒立摆 模糊控制 融合函数 变结构控制

Abstract

Inverted pendulum system is a typical experimental research installation, low cost, simple structure, easy to adjust the parameters and structural advantages, but inverted pendulum system itself is the high times of instability, multivariable, strong nonlinear and coupling characteristics, is absolutely unstable, and used to be an effective control strategy to make it stable. Inverted pendulum system is a variable structure control, nonlinear control, goal control intelligent control and other methods to control the ideal platform.

Fuzzy control theory is introduced to study simulation and the controlling problem in realtime of inverted pendulum in this paper. Success of control of hardware pendulum system proves that this controller has very good stability and adaptability. Main research work is declared below:

1. The mathematical model of single and double inverted pendulum is proposed. It is proved that open control system is instability, but it is controllable and observable on equilibrium point.
2. Research on fuzzy control algorithm of inverted pendulum system. The dimension of input varieties of fuzzy controller is depressed by designing a fusion function using optimization control theory, 'rule explosion' problem is solved.
3. Research on variable structure control algorithm of inverted pendulum system. Variable structure control of inverted pendulum is designed by constant switch and proportion switch.
4. The simulation of fuzzy control and variable structure control of inverted pendulum system. Simulation experiment of the fuzzy control of inverted pendulum is very well implemented by using fuzzy control theory that the result shows that it not only has quite good stability, but also is able to make the cart of the pendulum moving to the place where it is appointed in advance, along the orbit.
5. Inverted pendulum hardware system is realized. The response curves of each state variable and the curve of control quantity when the pendulum is stable or being disturbed are presented. At last, several photos when the pendulum is stable are shown.

Keyword: Inverted pendulum Fuzzy control Fusion function
Variable structure control

创新性声明

本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以注明和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果；也不包含为获得西安电子科技大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中做了明确的说明并表示了谢意。

申请学位论文与资料若有不实之处，本人承担一切相关责任。

本人签名： 于 姗姗 日期： 2007. 1. 10

关于论文使用授权的说明

本人完全了解西安电子科技大学有关保留和使用学位论文的规定，即：研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权单位属西安电子科技大学。本人保证毕业后离校后，发表论文或使用论文工作成果时署单位名称仍然为西安电子科技大学。学校有权保留送交论文的复印件，允许查阅和借阅论文；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以允许采用影印、缩印或其他复制手段保存论文。(保密的论文在解密后遵守此规定)

本学位论文属于保密，在_____年解密后适用本授权书。

本人签名： 于 姗姗 日期： 2007. 1. 10

导师签名： 李 利 强 日期： 2007. 1. 10

第一章 绪论

本章主要介绍倒立摆系统的研究意义和国内外的发展状况，最后介绍了本论文所作的工作。

1.1 倒立摆研究意义

倒立摆系统的最初研究开始于二十世纪五十年代，麻省理工大学电机工程系设计出单级倒立摆系统这个实验设备。后来在此基础上，人们又进行拓展，产生了直线二级倒立摆、多级倒立摆，柔性连接直线倒立摆，环形倒立摆，平面倒立摆和环形并联多级倒立摆的实验设备。因此，倒立摆系统成为控制领域中不可或缺的研究设备和验证各种控制策略有效性的实验平台。

倒立摆系统作为研究控制理论的一种典型的实验装置，具有成本低廉，结构简单，物理参数和结构易于调整的优点，然而倒立摆系统本身所具有的高阶次、不稳定、多变量、非线性和强耦合特性，是一个绝对不稳定系统，必须采用十分有效的控制策略才能使之稳定。倒立摆系统是研究变结构控制，非线性控制，目标定位控制，智能控制等控制方法理想的实验平台，被誉为：“控制领域中的一颗明珠”^[1]。

研究倒立摆系统除了很强的理论意义，同时也具有深远的实践意义。许多抽象的控制概念如稳定性、能控性、快速性和鲁棒性，都可以通过倒立摆系统直观的表现出来。同时其动态过程与人类的行走姿态类似，其平衡与火箭的发射姿态调整类似，因此倒立摆在研究双足机器人直立行走、火箭发射过程的姿态调整和直升机飞行控制领域中有重要的现实意义，相关的科研成果已经应用到航天科技和机器人学等诸多领域。

1.2 国内外研究情况简介

对于倒立摆的研究主要集中在两个方面：

- 1) 研究控制器使倒立摆系统稳定并可以定位在特定位置
- 2) 倒立摆系统的自动起摆

1.2.1 研究使倒立摆稳定的控制器

1976年 Mori *etc.*^[2]发表的研究论文，首先把倒立摆系统在平衡点附近线性化，

利用状态空间方法设计比例微分控制器。1980 年, Furuta *etc.*^[3] 等人基于线性化方法, 实现了二级倒立摆的控制。1984 年, Furuta 等人首次实现双电机三级倒立摆实物控制^[4]。

1984 年, Wottes 研究了 LQR(Linear Quadratic Regulator)方法控制倒立摆^[5]。LQR 方法主要基于系统的线性化模型和二次性能指标:

$$J = \int_0^{\infty} (X^T Q X + u^T Q u) dt \quad (1-1)$$

实际上是寻找一个最优的状态反馈向量 K , 从而设计一个最优反馈控制器。Wottes 验证了改变权重矩阵可以得到不同的状态反馈向量, 从而产生不同的控制效果。控制器原理框图如图 1.1 所示。

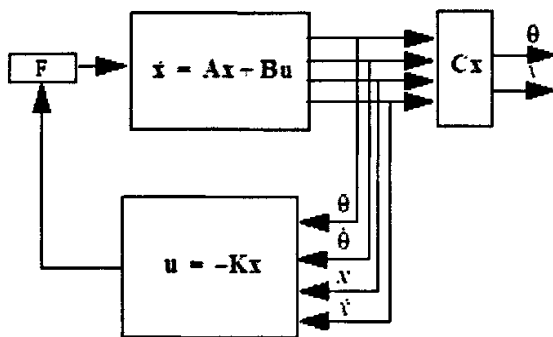


图 1.1 最优的状态反馈控制器框图

八十年代后期开始, 倒立摆系统中的非线性特性得到较多的研究, 并且提出了一系列基于非线性分析的控制策略。

1992 年, Furuta 等人^[6]提出了倒立摆系统的变结构控制。1995 年, Fradkov 等人^[7]提出了基于无源性的控制。另外 Wiklund 等人^[8]应用基于李亚普诺夫的方法控制了环形一级倒立摆, Yamakita 等人^[9]给出了环形二级倒立摆的实验结果。

P.G.Grossimon 等^[10]通过设计一种新型滑动模面, 使摆的角度成为基座转动角度的函数, 从而实现了平面式倒立摆的滑模控制。Y.P.Chen 等^[11]采用滑模控制方法设计了两并行二级倒立摆的离散滑模控制器, 并通过计算机实时控制实验, 同时实现了小车位置、摆 1 角度及摆 2 角度的跟踪。张克勤等^[12]利用倒立摆的特征值, 设计了一种全鲁棒滑模面, 实现了具有单输入的三级倒立摆全鲁棒滑模控制。

近年来随着智能控制方法的研究逐渐受到人们的重视, 模糊控制、神经网络、拟人智能控制、遗传算法和专家系统等越来越多的智能算法应用到倒立摆系统的控制上:

1997 年, T.H.Hung 等^[13]设计了类 PI 模糊控制器应用于一级倒立摆控制, 具有系统结构简单对硬件依赖小的特点。1995 年, Li^[14]利用两个并行的模糊滑模来

分别控制小车和摆杆偏角。1996 年张乃尧等^[15]采用模糊双闭环控制方案成功地稳定住了一级倒立摆。

Deris^[16]利用神经网络的自学习能力来整定 PID 控制器参数。1997 年, Gordillo^[17]比较了 LQR 方法和基于遗传算法的控制方法, 结论是传统控制方法比遗传算法控制效果更好。1993 年, Bouslama^[18]利用一个简单的神经网络来学习模糊控制器的输入输出数据, 设计了新型控制器。还有一些文章利用神经网络的实时学习能力来控制倒立摆^[19,20,21]。

1994 年, 北京航空航天大学张明廉教授^[22]将人工智能与自动控制理论相结合, 提出“拟人智能控制理论”, 实现了用单电机控制三级倒立摆实物。

北京师范大学李洪兴^[23]教授采用变论域自适应模糊控制理论研究四级倒立摆控制问题, 成功实现了三级倒立摆实物系统控制^[24]。

总而言之, 倒立摆系统是各检验控制算法、研究控制理论很有效的实验设备。目前应用在倒立摆上的算法有以下几类: 经典控制 (LMI, PID); 现代控制 (极点配置法, LQR 法); H_∞ 控制; 变结构控制; 模糊控制; 神经网络控制; 拟人控制等。

1.2.2 倒立摆自起摆

倒立摆起摆问题: 倒立摆在静止状态下, 由于重力作用摆杆是竖直垂下状态。使摆杆从垂下状态到竖直向上状态的过程就是倒立摆的起摆问题。

较早研究起摆问题的文献有: 1976 年, Mori^[25]等人提出包含两个控制器。一个控制器用来自起摆, 另一个用来镇定进入平衡态附近的倒立摆系统。1996 年, K.J.Astrom^[26]研究了用能量控制策略, 实现了一级倒立摆的起摆。Bortoff^[27]实现二级环形倒立摆起摆控制。

朱江滨等人提出了一种基于专家系统及变步长预测控制的实时非线性系统控制方法, 仿真实现了二级倒立摆的摆起及稳定控制^[28]。李祖枢等人利用拟人智能控制理论研究了二级倒立摆的起摆和控制问题^[29,30]。

目前用于倒立摆起摆的控制方法主要有: 能量控制, 启发式控制, 拟人智能控制等。

1.3 论文主要工作

本论文的主要工作是研究了直线一级、二级倒立摆的模糊控制及变结构控制问题。对一级倒立摆、二级倒立摆系统建立了数学模型并用 Matlab 和 Simulink 对系统进行仿真, 最后用计算机进行算法编程实现了倒立摆实物系统的控制。具体

内容如下:

- 1) 详细讨论了一级倒立摆和二级倒立摆的数学建模方法,推导出它们的非线性微分方程,以及线性化后的状态方程,并且分析倒立摆系统的可控性、可观性以及相对可控性。
- 2) 讨论了倒立摆系统的控制方法。对于一级倒立摆和二级倒立摆分别介绍了模糊控制和变结构控制,对其进行仿真,达到了很好的效果。
- 3) 通过编程实现了倒立摆的实物控制,给出了一级、二级倒立摆稳定时和受干扰时系统各状态变量的响应曲线。
- 4) 对论文的工作总结和下一步工作的展望。

第二章 倒立摆系统的建模和定性分析

分析了倒立摆系统特性,建立了一级、二级倒立摆系统的数学模型,对倒立摆系统进行定性分析。利用 *Lagrange* 方程^[31]建立了倒立摆系统的微分方程,并在平衡位置附近线性化,推导出倒立摆系统的线性状态方程。分析了倒立摆系统的能控性、能观性及相对能控度,证明倒立摆系统开环是不稳定的,但在平衡位置是能控的和能观的,同时二级倒立摆的相对能控度比一级摆小很多,说明其更难控制。最后介绍了一级、二级倒立摆的最优控制,得出状态反馈矩阵 K 。

2.1 倒立摆系统建模

系统建模可以分为两种:机理建模和实验建模。实验建模就是通过在研究对象上加上一系列的研究者事先确定的输入信号,激励研究对象并通过传感器检测其可观测的输出,应用数学手段建立起系统的输入—输出关系。这里面包括输入信号的设计选取,输出信号的精确检测,数学算法的研究等等内容。机理建模就是在了解研究对象的运动规律基础上,通过物理、化学的知识和数学手段建立起系统内部的输入—状态关系。

对于倒立摆系统,由于其本身是不稳定的系统,实验建模存在一定的困难。但是经过小心的假设忽略掉一些次要的因素后,倒立摆系统就是一个典型的运动的刚体系统,可以在惯性坐标系内应用经典力学理论建立系统的动力学方程。

2.2 倒立摆系统数学模型

2.2.1 一级倒立摆系统数学模型

下面我们采用其中的牛顿—欧拉方法建立直线型一级倒立摆系统的数学模型。

在忽略了空气阻力,各种摩擦之后,可将直线一级倒立摆系统抽象成小车和匀质杆组成的系统,如下图 2.1 所示。

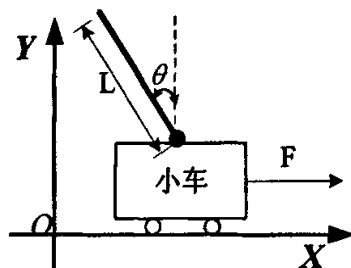


图 2.1 直线一级倒立摆系统

表 2.1 一级倒立摆参数表

符号	含义	取值(单位)
x	小车相对初始位置的位移	M
θ	摆杆与竖直向上方向的夹角	rad
F	作用在倒立摆系统上的控制量(力)	N
ϕ	摆杆与垂直向上方向的夹角	rad
M	小车质量	1.096Kg
m	一级摆杆质量	0.109Kg
L	一级摆杆长度	40cm
l	一级摆质心到转轴 O_1 的距离	25cm
I	一级摆杆转动惯量	0.0034Kg*m*m
b	小车的滑动摩擦系数	0.1N*s/m

下图是系统中小车和摆杆的受力分析图。其中， N 和 P 为小车与摆杆相互作用力的水平和垂直方向的分量。

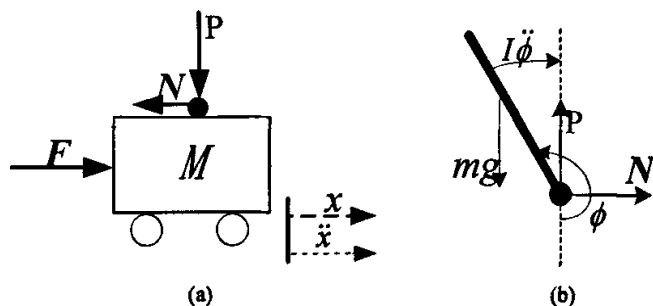


图 2.2 (A) 小车隔离受力图 (B) 摆杆隔离受力图

注意：在实际倒立摆系统中检测和执行装置的正负方向已经完全确定，因而矢量方向定义如图 2.2 所示，图示方向为矢量正方向。

分析小车水平方向所受的合力，可以得到以下方程：

$$M\ddot{x} = F - b\dot{x} - N \quad (2-1)$$

由摆杆水平方向的受力进行分析可以得到下面等式:

$$N = m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta) \quad (2-2)$$

$$\text{即:} \quad N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (2-3)$$

把这个等式代入上式中, 就得到系统的第一个运动方程:

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = F \quad (2-4)$$

为了推出系统的第二个运动方程, 我们对摆杆垂直方向上的合力进行分析, 可以得到下面方程:

$$P - mg = m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) \quad (2-5)$$

$$\text{即} \quad P - mg = -ml\ddot{\theta} \sin \theta - ml\dot{\theta}^2 \cos \theta \quad (2-6)$$

力矩平衡方程如下:

$$-Pl \sin \theta - Nl \cos \theta = I\ddot{\theta} \quad (2-7)$$

注意: 此方程中力矩的方向, 由于 $\theta = \pi + \phi$, $\cos \phi = -\cos \theta$, $\sin \phi = -\sin \theta$, 故等式前面有负号。

合并这两个方程, 约去 P 和 N , 得到第二个运动方程:

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = -ml\ddot{x} \cos \theta \quad (2-8)$$

设 $\theta = \pi + \phi$ (ϕ 是摆杆与垂直向上方向之间的夹角), 假设 ϕ 与 1 (单位是弧度) 相比

比很小, 即 $\phi \ll 1$, 则可以进行近似处理: $\cos \theta = -1$, $\sin \theta = -\phi$, $(\frac{d\theta}{dt})^2 = 0$ 。用 u 来代表被控对象的输入力 F , 线性化后两个运动方程如下:

$$\begin{cases} (I + ml^2)\ddot{\phi} - mgl\phi = ml\ddot{x} \\ (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - ml\ddot{\phi} = u \end{cases} \quad (2-9)$$

对方程组(2-9)进行拉普拉斯变换, 得到

$$\begin{cases} (I + ml^2)\Phi(s)s^2 - mgl\Phi(s) = mlX(s)s^2 \\ (M + m)X(s)s^2 + bX(s) - ml\Phi(s)s^2 = U(s) \end{cases} \quad (2-10)$$

注意: 推导传递函数时假设初始条件为 0。

由于输出为角度 ϕ , 求解方程组(2-10)的第一个方程, 可以得到

$$X(s) = \left[\frac{(I + ml^2)}{ml} - \frac{g}{s^2} \right] \Phi(s) \quad (2-11)$$

把上式代入方程组(2-10)的第二个方程, 得到

$$(M + m) \left[\frac{(I + ml^2)}{ml} - \frac{g}{s^2} \right] \Phi(s) s^2 + b \left[\frac{(I + ml^2)}{ml} - \frac{g}{s^2} \right] \Phi(s) s - ml \Phi(s) s^2 = U(s) \quad (2-12)$$

整理后得到传递函数:

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{\frac{ml}{q} s^2}{s^4 + \frac{b(I + ml^2)}{q} s^3 - \frac{(M + m)mgl}{q} s^2 - \frac{bmgl}{q} s} \quad (2-13)$$

其中

$$q = [(M + m)(I + ml^2) - (ml)^2] \quad (2-14)$$

系统状态空间方程为

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ y = CX + Du \end{cases}$$

对 $\ddot{x}$, $\ddot{\phi}$ 解代数方程, 得到解如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x} \\ \ddot{x} = \frac{-(I + ml^2)b}{I(M + m) + Mml^2} \dot{x} + \frac{m^2 gl^2}{I(M + m) + Mml^2} \phi + \frac{(I + ml^2)}{I(M + m) + Mml^2} u \\ \dot{\phi} = \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} = \frac{-mlb}{I(M + m) + Mml^2} \dot{x} + \frac{mgl(M + m)}{I(M + m) + Mml^2} \phi + \frac{ml}{I(M + m) + Mml^2} u \end{cases} \quad (2-15)$$

整理后得到系统状态空间方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(I + ml^2)b}{I(M + m) + Mml^2} & \frac{m^2 gl^2}{I(M + m) + Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mlb}{I(M + m) + Mml^2} & \frac{mgl(M + m)}{I(M + m) + Mml^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I + ml^2}{I(M + m) + Mml^2} \\ 0 \\ \frac{ml}{I(M + m) + Mml^2} \end{bmatrix} u \quad (2-16)$$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2-17)$$

把表 2.1 中参数取值代入(2-16)式和(2-17)式得到：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0883 & 0.6293 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.2357 & 27.8285 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = [0 \quad 0.8832 \quad 0 \quad 2.3566]^T$$

2.2.2 二级倒立摆系统数学模型

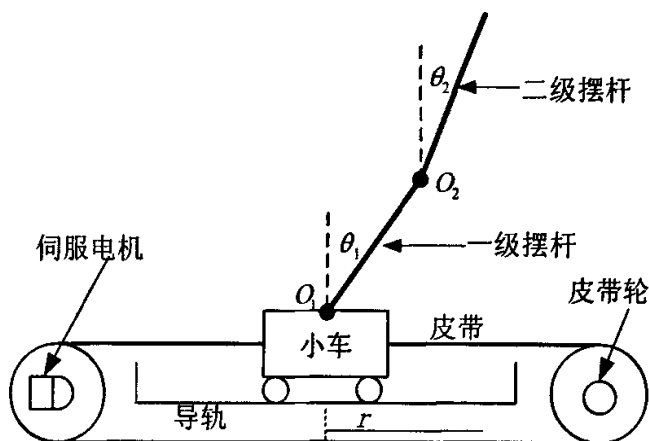


图 2.3 二级倒立摆系统示意图

二级倒立摆系统如图2.3所示。二级倒立摆装置由沿导轨运动的小车和通过转轴固定在小车上的摆体组成。在轨道一端装有用来测量小车位移的光电编码器。摆体与小车之间、摆体与摆体之间由转轴连接，并在连接处有2个光电编码器分别用来测量一级摆和二级摆的角度。一摆、二摆可以绕各自的转轴在水平导轨所在的铅垂面内自由转动，而小车则由交流伺服电机、皮带轮、传动带带动在水平导轨上左右运动，从而使倒立摆稳定在竖直位置并且可以沿着导轨倒立行走。

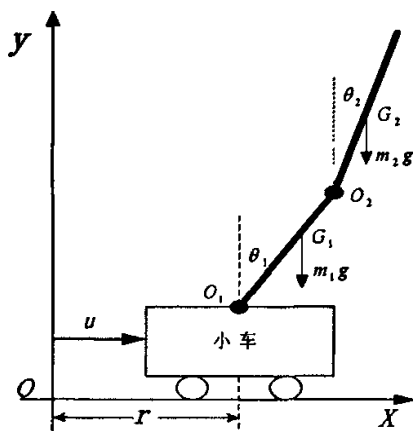


图 2.4 二级倒立摆运动分析示意图

系统中的符号含义及其取值见表 2.2:

表 2.2 二级倒立摆系统符号参数表

符号	含义	取值(单位)
M	小车质量	1.32 Kg
m_1	一级摆杆的质量	0.04Kg
m_2	二级摆杆的质量	0.132Kg
m	质量块的质量	0.208Kg
l_1	一级摆质心 G_1 到转轴 O_1 的距离	0.09m
l_2	二级摆质心 G_2 到转轴 O_2 的距离	0.27m
L_1	一级摆杆的长度	0.16m
L_2	二级摆杆的长度	0.40m
f_0	小车与导轨间的滑动摩擦系数	23.6782 N*s/m
f_1	一级摆绕转轴 O_1 转动的摩擦阻力矩系数	0.003425 N*s*m
f_2	二级摆绕转轴 O_2 转动的摩擦阻力矩系数	0.003425 N*s*m
g	当地重力加速度	9.8m/sec ²
u	倒立摆系统的控制量(力)	N

拉格朗日方程为:

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q, \dot{q}) \quad (2-18)$$

其中, L 为拉格朗日算子, q 为系统的广义坐标, T 为系统的动能, V 为系统的势能。拉格朗日方程由广义坐标 q_i 和 L 表示为:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = f_i \quad (2-19)$$

其中, $i=1,2,3 \cdots n$, f_i 为系统沿该广义坐标上的外力, 在本系统中, 设系统的三

个广义坐标分别是 x , θ_1 , θ_2 。

首先计算系统的动能:

$$T = T_M + T_{m1} + T_{m2} + T_m \quad (2-20)$$

其中 T_M 为小车动能, T_{m1} 摆杆 1 动能, T_{m2} 摆杆 2 动能, T_m 质量块动能。

而 $T_{m1} = T'_{m1} + T''_{m1}$, 其中 T'_{m1} 摆杆 1 质心平动动能, T''_{m1} 摆杆 1 绕质心转动动能。

$T_{m2} = T'_{m2} + T''_{m2}$, 其中 T'_{m2} 摆杆 2 质心平动动能, T''_{m2} 摆杆 2 绕质心转动动能。

$$T_M = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \quad (2-21)$$

$$T'_{m1} = \frac{1}{2} m_1 \left[\left(\frac{d(x - l_1 \sin \theta_1)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(l_1 \cos \theta_1)}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 - m_1 l_1 \dot{x} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (2-22)$$

$$T''_{m1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m_1 l_1^2 \right) \dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{6} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (2-23)$$

$$\text{则 } T_{m1} = T'_{m1} + T''_{m1} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 - m_1 l_1 \dot{x} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{2}{3} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

同样可以求出

$$\begin{aligned} T'_{m2} &= \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d(x - 2l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin \theta_2)}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d(2l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2)}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} m_2 (\dot{x} - 2l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + \frac{1}{2} m_2 (2l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 \end{aligned} \quad (2-24)$$

$$T''_{m2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m_2 l_2^2 \right) \dot{\theta}_2^2 = \frac{1}{6} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \quad (2-25)$$

$$T_{m2} = T'_{m2} + T''_{m2} = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 - 2\dot{x}(2l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)) + \frac{1}{2} m_2 (4l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{4}{3} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 4l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)) \quad (2-26)$$

$$\begin{aligned} T_m &= \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{d(x - 2l_1 \sin \theta_1)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(2l_1 \cos \theta_1)}{dt} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - 2ml_1 \dot{x} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + 2m l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \end{aligned} \quad (2-27)$$

因此, 可以得到系统总的动能为:

$$\begin{aligned} T &= T_M + T_{m1} + T_{m2} + T_m \\ &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 - m_1 l_1 \dot{x} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{2}{3} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 - 2\dot{x}(2l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)) \\ &\quad + \frac{1}{2} m_2 (4l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{4}{3} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 4l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)) + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - 2ml_1 \dot{x} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + 2ml_1^2 \dot{\theta}_1^2 \end{aligned} \quad (2-28)$$

系统的势能为:

$$V = V_{m1} + V_{m2} + V_m = m_1 g l_1 \cos \theta_1 + 2m g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g (2l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \quad (2-29)$$

从而拉格朗日算子:

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 - m_1 l_1 \dot{x} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{2}{3} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 - 2\dot{x}(2l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)) \\ &\quad + \frac{1}{2} m_2 (4l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{4}{3} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 4l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)) + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - 2m l_1 \dot{x} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + 2m l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\ &\quad - m_1 g l_1 \cos \theta_1 - 2m g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g (2l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \end{aligned} \quad (2-30)$$

由于因为在广义坐标 θ_1, θ_2 上均无外力作用, 有以下等式成立:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad (2-31)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \quad (2-32)$$

展开(2-31)、(2-32), 分别得到(2-33)、(2-34)式

$$\begin{aligned} &6m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 4(m_1 + 3(m_2 + m)) l_1 \ddot{\theta}_1 - 3(-2m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ &- 3(m_1 + 2(m_2 + m))(g \sin \theta_1 + \ddot{x} \cos \theta_1)) = 0 \end{aligned} \quad (2-33)$$

$$-3g \sin \theta_2 - 6l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 4l_2 \ddot{\theta}_2 + 6l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) - 3\ddot{x} \cos \theta_2 = 0 \quad (2-34)$$

将(2-33)、(2-34)对 $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$ 求解代数方程, 得到以下两式

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 &= (3(-2m_1 g \sin \theta_1 - 4m_2 g \sin \theta_1 - 4m g \sin \theta_1 + 3m_2 g \cos(\theta_2 - \theta_1) \sin \theta_2 \\ &+ 6m_2 l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + 4m_2 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 - 2m_1 \ddot{x} \cos \theta_1 \\ &- 4m_2 \ddot{x} \cos \theta_1 - 4m \ddot{x} \cos \theta_1 + 3m_2 \ddot{x} \cos(\theta_1 - \theta_2) \cos \theta_2)) / \\ &(2l_1(-4m_1 - 12m_2 - 12m + 9m_2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2))) \end{aligned} \quad (2-35)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_2 &= -\left(-\frac{4}{9} m_2 (m_1 + 3(m_2 + m)) l_1^2 l_2 (-3g \sin \theta_2 - 6l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - 3\ddot{x} \cos \theta_2) \right. \\ &+ \frac{2}{3} m_2 l_1^2 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) (6m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - 3(m_1 + 2(m_2 + m))(g \sin \theta_1 + \ddot{x} \cos \theta_1))) / \\ &\left. (-\frac{16}{9} m_2 (m_1 + 3(m_2 + m)) l_1^2 l_2^2 + 4m_2^2 l_1^2 l_2^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)) \right) \end{aligned} \quad (2-36)$$

表示成以下形式:

$$\ddot{\theta}_1 = f_1(x, \theta_1, \theta_2, \dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{x}) \quad (2-37)$$

$$\ddot{\theta}_2 = f_2(x, \theta_1, \theta_2, \dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{x}) \quad (2-38)$$

取平衡位置时各变量的初置为零,

$$(x, \theta_1, \theta_2, \dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{x}) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

将(2-37)式在平衡位置进行泰勒级数展开, 并线性化, 令

$$\begin{aligned} K_{11} &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = 0 \\ K_{12} &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} \right|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = \frac{3(-2m_1g - 4m_2g - 4mg)}{2(-4m_1 - 3m_2 - 12m)l_1} \\ K_{13} &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} \right|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = \frac{9m_2g}{2(-4m_1 - 3m_2 - 12m)l_1} \\ K_{14} &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}} \right|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = 0 \\ K_{15} &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\theta}_1} \right|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = 0 \\ K_{16} &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\theta}_2} \right|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = 0 \\ K_{17} &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial \ddot{x}} \right|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = \frac{3(-2m_1 - m_2 - 4m)}{2(-4m_1 - 3m_2 - 12m)l_1} \end{aligned}$$

带入(2-35)式, 得到线性化之后的公式

$$\ddot{\theta}_1 = K_{12}\theta_1 + K_{13}\theta_2 + K_{17}\ddot{x} \quad (2-39)$$

将(2-38)式在平衡位置进行泰勒级数展开, 并线性化, 令

$$\begin{aligned} K_{21} &= \left. \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = 0 \\ K_{22} &= \left. \frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} \right|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = \frac{2g(m_1 + 2(m_2 + m))}{4m_2l_2 - \frac{16}{9}(m_1 + 3(m_2 + m))l_2} \\ K_{23} &= \left. \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} \right|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = \frac{4g(m_1 + 3(m_2 + m))}{3(4m_2l_2 - \frac{16}{9}(m_1 + 3(m_2 + m))l_2)} \\ K_{24} &= \left. \frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}} \right|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = 0 \\ K_{25} &= \left. \frac{\partial f_2}{\partial \dot{\theta}_1} \right|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = 0 \end{aligned}$$

$$K_{26} = \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} \Big|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = 0$$

$$K_{27} = \frac{\partial f_2}{\partial \ddot{x}} \Big|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} = \frac{2(m_1 + 2(m_2 + m)) - \frac{4}{3}(m_1 + 3(m_2 + m))}{4m_2 l_2 - \frac{16}{9}(m_1 + 3(m_2 + m))l_2}$$

带入(2-36)式, 得到

$$\ddot{\theta}_2 = K_{22}\theta_1 + K_{23}\theta_2 + K_{27}\ddot{x} \quad (2-40)$$

现在得到了两个线性微分方程, 由于我们采用加速度作为输入, 因此还需要加上一个方程

$$u = \ddot{x} \quad (2-41)$$

取状态变量如下:

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \theta_1$$

$$x_3 = \theta_2$$

$$x_4 = \dot{x}$$

$$x_5 = \dot{\theta}_1$$

$$x_6 = \dot{\theta}_2$$

由(2-39)、(2-40)、(2-41)式得到状态空间方程如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{12} & K_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ K_{17} \\ K_{27} \end{bmatrix} u \quad (2-42)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (2-43)$$

把表中的数据代入上式得到系统的状态空间表达式为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 77.0642 & -21.1927 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -38.5321 & 5.0727 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 5.7012 \\ 0.0267 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

2.3 倒立摆系统的定性分析

在得到系统的数学模型之后，为了进一步的了解系统性质，需要对系统的特性进行分析，最主要的是系统的稳定性、能控性以及能观性。

系统的稳定性分析一般可以应用 LaSalle's theorem 或者李亚普诺夫稳定性理论。最常用的是后者。对于系统在平衡点邻域的稳定性可以根据前面得到的系统线性模型分析。一般摆杆竖直向上是系统的不稳定平衡点，需要设计控制器来镇定系统。既然需要设计控制器镇定系统，那么就要考虑系统是否能控。我们所关心的是系统在平衡点附近的性质，因而可以采用线性模型来分析。

在进行倒立摆的定性分析之前，先介绍线性控制理论中几个关于能控性、能观性的判定定理^[32,33,34]：

定理 1 (能控性判据) n 阶线性定常连续系统 $\dot{X} = AX + Bu$ 状态完全能控，当且仅当系统的能控性矩阵：

$$S = [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$$

满秩，即 $\text{rank}(S)=n$ 。特别，当输入控制量 $u(t)$ 为标量时，能控性矩阵 S 为方阵；

$\text{rank}(S)=n$ 等价于 S 的行列式值 $\det(S) \neq 0$ 。

定理 2 (能观性判据) n 阶线性定常连续系统

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ Y = CX \end{cases}$$

状态完全能观，当且仅当系统的能观性矩阵：

$$V = [C \quad CA \quad \cdots \quad CA^{n-1}]^T \quad (2-44)$$

满秩，即 $\text{rank}(V)=n$ 。特别，当输出量 $y(t)$ 为标量时，能观性矩阵 V 为方阵； $\text{rank}(V)=n$ 等价于 V 的行列式值 $\det(V) \neq 0$ 。

为了衡量系统控制器设计的难度，或者说衡量系统本身能控性的相对程度，一般称之为相对能控性，可通过计算能控性矩阵的奇异值 δ 来判断^[35]。

定理 3（相对能控性判据）线性定常连续系统 $\dot{X} = AX + Bu$ ，矩阵 A 的最小奇异值与最大奇异值的比值为系统的相对能控度，记作 δ 。

2.3.1 一级倒立摆系统定性分析

一级倒立摆系统的特征方程为 $\det\{\lambda I - A\} = 0$ ，经过计算得到系统的开环特征根：

$$(0 \quad -0.083 \quad 5.2726 \quad -5.278)$$

系统有一个极点在平面的右半平面上，有一个极点在原点，因此系统是不稳定的。

对一级倒立摆系统线性状态方程式(2-16)，根据定理 1 和定理 2 得到：

$$\begin{aligned} \text{rank}[B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] &= 4, \\ \text{rank}[C \quad CA \quad CA^2 \quad CA^3]^T &= 4 \end{aligned}$$

所以一级倒立摆系统是能控的和能观测的。

对于一级倒立摆状态方程(2-16)，对 A 矩阵进行奇异值分解得到 A 矩阵的奇异值阵 W ：

$$W = \begin{bmatrix} 27.8366 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0034 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A 矩阵的奇异值为 W 对角线上的值，所以一级倒立摆的相对能控度 $\delta = \frac{1}{27.8366} = 0.0359$ 。 δ 越小时系统越难控制。

2.3.2 二级倒立摆系统定性分析

二级倒立摆系统的特征方程为 $\det\{\lambda I - A\} = 0$ ，经过计算得到系统的开环特征根：

$$(9.3289 \quad -9.3289 \quad 2.2116i \quad -2.2116i \quad 0 \quad 0)$$

系统有一个极点在平面的右半平面上, 有两个极点在原点, 有两个极点在虚轴上, 因此系统是不稳定的。

对于二级倒立摆系统状态方程(2-42), 根据定理 1 和定理 2 得到:

$$\text{rank}[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{6-1}B] = 6,$$

$$\text{rank}[C \quad CA \quad \cdots \quad CA^{6-1}]^T = 6$$

所以二级倒立摆线性系统能控的和能观测的。

对于二级倒立摆状态方程(2-42), 对 A 矩阵进行奇异值分解得到 A 矩阵的奇异值阵 W :

$$W = \begin{bmatrix} 88.7483 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.7967 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

二级倒立摆的相对能控度 $\delta = 1/88.7483 = 0.0113$, 可见二级倒立摆系统将比一级倒立摆系统更难控制。

2.4 状态反馈矩阵 K 的计算

利用最优控制理论计算出一组可以让倒立摆的线性模型基本稳定的状态反馈矩阵 K : 先以二级倒立摆为例:

$$K = [K_r \quad K_{\theta_1} \quad K_{\theta_2} \quad K_f \quad K_{\dot{\theta}_1} \quad K_{\dot{\theta}_2}]$$

根据线性状态反馈调节律的形式:

$$u = KX^T$$

以下利用线性二次最优控制理论 (LQR) 来为二级倒立摆的状态方程设计一个状态反馈矩阵。

最优控制性能指标:

$$J = \int_0^{\infty} (X^T Q X + u^T R u) dt$$

通过使性能指标函数式为最小, 可以求得:

$$K = (B^T P B + R)^{-1} (B^T P A)$$

求解如下代数 Ricatti 方程:

$$A^T P A - A^T P B (B^T P B + R)^{-1} B^T P A + Q = P$$

可以得到矩阵 P 。

说明： LQR 参数的选择。矩阵 Q 和矩阵 R 用来平衡输入量与状态量的权重，对闭环系统动态性能影响很大。在倒立摆系统中， Q 、 R 分别用来对状态向量 X ，控制量 u 引起的性能度量的相对重要性进行加权，并且 Q 、 R 的参数以及跟随速度、角速度大小的关系是相互耦合的，应综合选取。一般情况下： R 增加时，控制力减小，角度变化变小，跟随速度变慢。矩阵 Q 中某元素相对增加，其对应的状态变量的响应速度增加，其他状态变量的响应速度相对减慢。如：若 Q 对应与角度 θ 的元素增加，使得 θ 的变化幅度减小，而位移 r 的响应速度变慢；若 Q 对应于 r 的元素增加，使得 r 的跟踪速度变快，而 θ 的变化幅度增大。

在实际一级倒立摆系统的控制过程中，我们取：

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad R = 1$$

通过计算得到状态反馈矩阵 K

$$K = [-10 \quad -8.9836 \quad 49.9835 \quad 9.6840]$$

在实际二级倒立摆系统的控制过程中，我们取：

$$Q = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 800 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad R = 1$$

通过计算得到状态反馈矩阵 K ：

$$K = [-31.6228 \quad 100.3822 \quad -54.8563 \quad -36.1278 \quad 12.1965 \quad -2.3054]$$

2.5 本章小结

本章详细讨论了用牛顿力学分析，欧拉—拉格朗日原理方程建立一级倒立摆系统和二级倒立摆系统的数学模型，并推导出倒立摆系统在平衡位置的线性状态方程，由此分析了倒立摆系统的能控性、能观性和相对能控度。一般情况下，倒立摆系统均是能控的，并且相对能控性随着摆杆级数的增加而减小，控制难度增大。最后利用最优控制理论推导出了状态反馈矩阵 K 。

第三章 模糊控制方法研究

模糊控制理论是建立在模糊集合论、模糊语言变量及模糊逻辑推理基础上的一种计算机数字控制理论。它因在设计系统时不需要建立被控对象精确的数学模型而得到了日益广泛的应用。所以模糊控制在研究像倒立摆这样的高度非线性系统上有很大的优势。但是,在用模糊控制理论解决倒立摆这样多变量系统控制问题时,不可避免会遇到规则爆炸(Rule Explosion)问题,本章提出运用最优控制方法设计了融合函数以降低模糊控制器的输入变量维数,大大减少模糊控制的规则数,成功解决了规则爆炸问题;并研究了量化因子对控制效果的影响,通过设置阈值使量化因子可以自动调节,进而提升了模糊控制器的性能品质。

3.1 模糊控制理论简介

模糊控制是以模糊集合、模糊语言变量及模糊逻辑推理为基础的一种计算机数字控制。从线性控制与非线性控制的角度分类,模糊控制是一种非线性控制;从控制器的智能性看,模糊控制属于智能控制的范畴,而且它已经成为目前智能控制的一种重要而有效的形式^[36,37]。

3.1.1 模糊控制系统组成

模糊控制属于计算机数字控制的一种形式,因此,模糊控制系统的组成类似于一般数字控制系统,其框图如图 3.1 所示。

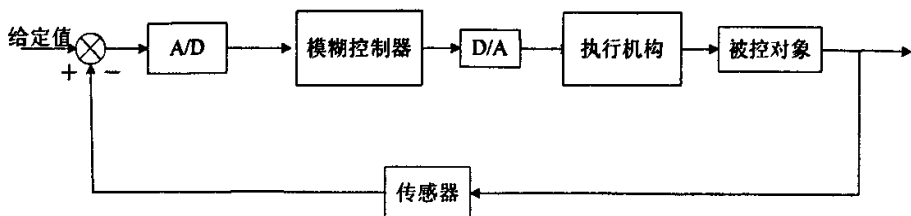


图 3.1 模糊控制系统框图

模糊控制系统一般可以分为四个组成部分：

1) 模糊控制器：实际上是一台微计算机，根据控制系统的需要，既可以选用系统机，又可以选用单板机或单片机。

2) 输入/输出接口装置：模糊控制器通过输入/输出接口从被控对象获取数字信号量，并将模糊控制器决策的数字信号经过数模转换，将其转变为模拟信号，

送给执行机构去控制被控对象。

在 I/O 接口装置中, 除 A/D, D/A 转换外, 还包括必要的电平转换线路。

3) 广义对象: 包括被控对象及执行机构, 被控对象可以是确定的或者模糊的、单变量的或者多变量的、有滞后的或者无滞后的, 也可以是线性的或者非线性的, 定常的或者时变的, 以及具有强耦合和干扰等多种情况。

还须指出, 被控对象缺乏精确数学模型的情况适宜选择模糊控制, 但也不排斥有精确的数学模型的被控对象, 也可以采用模糊控制方案。

4) 传感器: 是将被控对象或者各种过程的被控量转换为电信号(模拟的或者数字的)的一类装置。被控制量往往是非电量, 如位移、速度、加速度、温度、压力、流量、浓度、湿度等。传感器在模糊控制系统中占有十分重要的地位, 它的精度往往直接影响整个控制系统的精度, 因此, 在选择传感器时, 应该选择精度高且稳定性好的传感器。

3.1.2 模糊控制器的基本结构

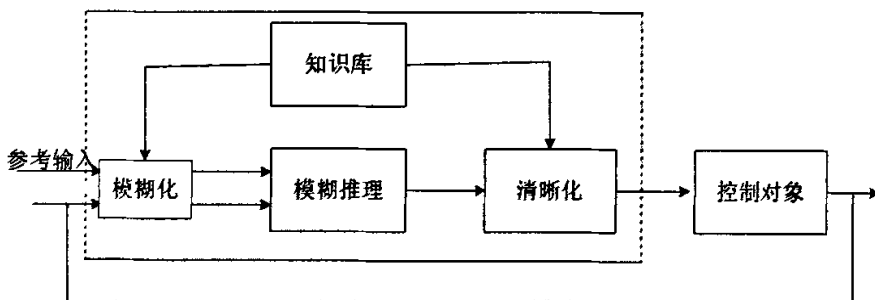


图 3.2 模糊控制器结构图

模糊控制器的基本结构如图中 3.2 所示。它主要包括以下四个部分。

1. 模糊化

模糊化的主要作用是将输入的精确量转换成模糊化量。其输入量包括外界参考输入、系统的输出或状态等。模糊化的具体过程如下:

- (1) 首先对这些输入量进行处理, 以变成模糊控制器要求的输入量;
- (2) 将上述已经处理过的输入量进行尺度变换, 使其变换到各自的论域范围;
- (3) 将已经变换到论域范围的输入量进行模糊处理, 使原先精确的输入量变换成模糊量, 并用相应的模糊集合来表示。

2. 知识库

知识库中包含了具体应用领域中知识和要求控制目标。它通常由数据库和模糊控制规则两部分组成。

- (1) 数据库主要包括各语言变量的隶属函数, 尺度变换因子及模糊空间的分级数等。
- (2) 规则库包括了用模糊语言变量表示的一系列控制规则。它们反映了控制专家的经验 and 知识。

3. 模糊推理

模糊推理是模糊控制器的核心, 它具有模拟人的基于模糊概念的推理能力, 该推理过程是基于模糊逻辑中蕴含关系及推理规则来进行。

4. 清晰化

清晰化的作用是将模糊推理得到的控制量(模糊量)变换为实际用于控制的清晰量。它包含以下两部分内容:

- (1) 将模糊的控制量经清晰化变换, 变成表示在论域范围的清晰量。
- (2) 经表示在论域范围内的清晰量经尺度变换成实际的控制量。

3.2 倒立摆的模糊控制方法简介

倒立摆系统是一个复杂的、非线性的、不稳定的高阶系统。在研究倒立摆这类多变量非线性系统的模糊控制时, 一个难题就是规则爆炸, 比如一级倒立摆的控制涉及的状态变量共有 4 个, 每个变量的论域作 7 个模糊集的模糊划分, 这样, 完备的推理规则库会包含 $7^4=2401$ 个推理规则; 而对于二级倒立摆有 6 个状态变量, 推理规则会达到 $7^6=117649$, 显然如此多的规则是不可能实现的。

为了解决这个问题, 张乃尧等提出双闭环的倒立摆模糊控制方案, 内环控制倒立摆的角度, 外环控制倒立摆的位移^[38]。范醒哲等人将这一方法推广到三级倒立摆控制系统中, 并提出两种模糊串级控制方案, 用来解决倒立摆这类多变量系统模糊控制时的规则爆炸问题^[39]。Shuliang Lei 和 Reza Langari 应用分级思想, 将 $\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2$ 4 个状态变量分成两个子系统, 分别用两个模糊控制器控制, 然后再设计一个上层模糊控制器来协调子系统之间的相互作用^[40]。文献^[41,42]提出参变量模糊控制方法解决规则爆炸问题。

本文把最优控制理论与模糊控制策略相结合。采用融合技术设计一个线性融合函数, 把多个变量融合成综合误差 E 和综合误差变化率 EC , 这就使模糊控制器的设计大为简化。这种控制器结构如图 3.3 所示。

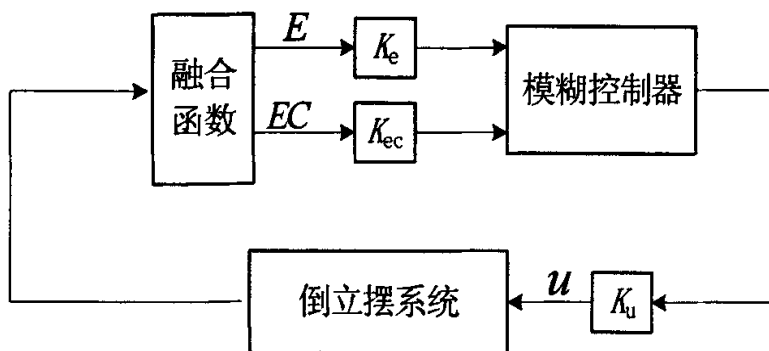


图 3.3 倒立摆模糊控制器结构

3.3 融合技术和融合函数

3.3.1 融合技术^[43,44]

从理论上讲，小车位移 r 以及速度 $\dot{r}$ 与摆杆角度 θ 及摆杆角速度 $\dot{\theta}$ 存在很大的耦合关系。既要使小车运动控制在零点位置范围内，又要使摆不倒，就要综合考虑摆杆和小车的力学关系以及各自所处的状态。对于多因素问题，采用分步处理的方法能简化问题的解决过程，这一思想可以应用到多输入模糊控制器的设计过程中。假设要设计高维输入变量 X 映射到输出变量 Y 的模糊控制器，鉴于直接设计由 X 到 Y 的单级模糊控制策略比较困难，因而可以采用多级控制方式，将单一的模糊控制策略转化为多级控制策略嵌套：

$$Y = F_2[F_1(X)] \quad (3-1)$$

即先使用算法 $F_1(X)$ 对输入变量 X 进行初步处理，再利用算法 $F_2()$ 根据前级算法的输出进行控制。如果算法 $F_1(X)$ 的输出维数小于 X 的维数，那么算法 $F_2()$ 所要完成的控制工作就得到了简化。可以看出，算法 $F_1(X)$ 利用系统状态的相关性和输入信息的可融合性完成了组合、提取问题信息的过程，可称为“融合函数”。而算法 $F_2()$ 实现了根据约简因素进行模糊推理的功能，可以称为模糊作用函数。基于信息融合的多输入模糊控制器设计方法就是通过融合函数进行信息、合并与提取，从而实现控制问题的逐步简化。

3.3.2 融合函数设计

倒立摆是典型的单输入多输出(SIMO)系统，由已得到的一级、二级倒立摆系统近似线性状态方程，运用线性系统的输出信息具有可直接融合的特点，构造了

一个线性融合函数,把倒立摆状态变量融合成综合误差 E 和综合误差变化 EC 。

构造融合函数的步骤:

1) 运用最优控制理论计算出一组可以让倒立摆系统的线性模型基本稳定的状态反馈矩阵 K :

在实际系统的控制过程中,对于一级倒立摆可得:

$$K = [-10 \quad -8.9836 \quad 49.9835 \quad 9.6840]$$

对于二级倒立摆可得:

$$K = [-31.6228 \quad 100.3822 \quad -54.8563 \quad -36.1278 \quad 12.1965 \quad -2.3054]$$

2) 运用状态反馈矩阵 K 构造融合函数 $F_1(X)$:

对于一级倒立摆我们取:

$$F_1(X) = \begin{pmatrix} \frac{K_r}{\|K\|_1} & \frac{K_\theta}{\|K\|_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_r}{\|K\|_1} & \frac{K_\theta}{\|K\|_1} \end{pmatrix} \quad (3-2)$$

$$\text{其中: } \|K\|_1 = \sqrt{K_r^2 + K_\theta^2 + K_r^2 + K_\theta^2}$$

对于二级倒立摆我们取:

$$F_2(X) = \begin{pmatrix} \frac{K_r}{\|K\|_2} & \frac{K_{\theta_1}}{\|K\|_2} & \frac{K_{\theta_2}}{\|K\|_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{K_r}{\|K\|_2} & \frac{K_{\dot{\theta}_1}}{\|K\|_2} & \frac{K_{\dot{\theta}_2}}{\|K\|_2} \end{pmatrix} \quad (3-3)$$

$$\text{其中: } \|K\|_2 = \sqrt{K_r^2 + K_{\theta_1}^2 + K_{\theta_2}^2 + K_r^2 + K_{\dot{\theta}_1}^2 + K_{\dot{\theta}_2}^2}$$

根据一级倒立摆的参数,计算得到 $F_1(X)$:

$$F_1(X) = \begin{pmatrix} 1 & -0.4064 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1.7815 \end{pmatrix}$$

根据二级倒立摆的参数,计算得到 $F_2(X)$:

$$F_2(X) = \begin{pmatrix} -0.0854 & -0.5497 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5144 & -0.0744 & 1 \end{pmatrix}$$

3) 通过 $F_1(X)$ 和 $F_2(X)$ 把输入变量 X 降维,得到综合误差 E 和综合误差变化率

EC:

$$\begin{bmatrix} E \\ EC \end{bmatrix} = F_1(X)X^T \quad (3-4)$$

3.4 模糊控制器设计

由融合函数降维后得到 E 和 EC 作为输入量, 所以只要设计一个二维模糊控制器, 这就使模糊控制规则大大简化。

3.4.1 论域及基本论域

我们把模糊控制器的输入变量误差、误差变化的实际范围称为这些变量的基本论域。显然基本论域内的量为精确量。

设误差的基本论域为 $[-x_e, x_e]$, 误差变化的基本论域为 $[-x_{ec}, x_{ec}]$ 。

设控制输出基本论域为 $[-y_u, y_u]$ 。

设误差变量所取的模糊子集的论域为

$$\{-n, -n+1, \dots, 0, \dots, n-1, n\}$$

误差变化变量所取的模糊子集的论域为

$$\{-m, -m+1, \dots, 0, \dots, m-1, m\}$$

控制量所取的模糊子集的论域为

$$\{-l, -l+1, \dots, 0, \dots, l-1, l\}$$

从理论上讲, 增加论域中元素个数, 即把等级细分, 可提高控制精度, 但会受到计算机字长的限制, 另外也会增大计算量。因此, 把等级分得过细, 对于模糊控制显得必要性不太大。

关于基本论域的选择, 由于事先对被控对象缺乏先验知识, 所以误差及误差变化的基本论域只能做初步的选择, 待系统调整时再进一步确定。

3.4.2 隶属度函数

取综合误差 E 和综合误差变化率 EC 的论域分别是 $X = [-3, 3]$, $Y = [-3, 3]$, 输出论域为 $Z = [-3, 3]$ 。 $NB, NM, NS, ZE, PS, PM, PB$ 是论域 $X = [-3, 3]$ 上的模糊子集, 依次表示“负大、负中、负小、零、正小、正中、正大”的语言值。这些模糊集的隶属度函数取“三角形”隶属度函数。如图3.4所示。

论域 $Y = [-3, 3]$, $Z = [-3, 3]$ 上的模糊集划分和论域 $X = [-3, 3]$ 相似, 采用三角形、全交选、均匀分布的隶属函数, 每个变量用7个模糊子集[NB NM NS ZE PS PM PB]描述, 如图3.4所示。

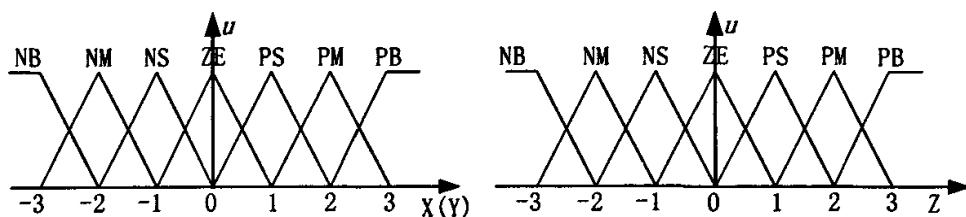


图3.4 模糊语言变量的隶属度函数

3.4.3 去模糊化

在模糊控制器结构框图3.2中, 对建立的模糊规则进行模糊推理才能决策出控制变量的一个模糊子集, 但它是一个模糊量而不能直接控制被控对象, 还需要采取合理的方法将模糊量转化为精确量, 以便最好地发挥出模糊推理结果的判决效果。把模糊量转化为精确量的过程称为清晰化, 又称去模糊化。

本文我们采用面积重心法来实现去模糊化, 面积重心法是取模糊隶属函数曲线与横坐标围成面积的重心为模糊推理最终输出值, 即:

$$u_c = \frac{\int_{\underline{u}}^{\bar{u}} U(u) u du}{\int_{\underline{u}}^{\bar{u}} U(u) du} \quad (3-5)$$

其中: $\underline{U}$ 是某变量 u 在论域 U 上的模糊集合。

与一般采用的最大隶属度法相比较, 重心法具有更加平滑的输出推理控制, 即对应与输入信号的微小变化, 其推理的最终输出一般也会发生一定的变化, 且这种变化明显比最大隶属度函数法要平滑。

3.5 量化因子比例因子对模糊控制器性能的影响

3.5.1 量化因子和比例因子

当由计算机实现模糊控制算法进行模糊控制时, 每次采样得到的被控制量需经计算机计算, 使得得到模糊控制器的输入变量误差及误差变化率。为了进行模糊化处理, 必须将输入变量从基本论域转换到相应的模糊集的论域。这中间须将输入变量乘以相应的因子, 称为量化因子。图 3.5 描述了误差的基本论域、量化因子

和模糊集论域之间的关系。

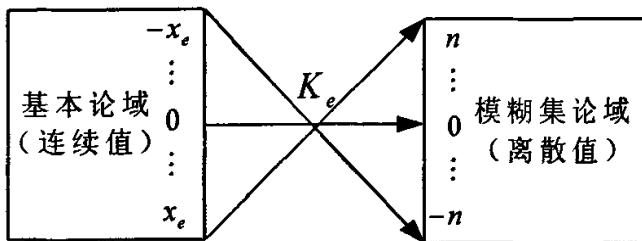


图 3.5 误差的论域变量变换

量化因子一般用 K 表示，在本文中误差的量化因子 K_e 和误差变化率的量化因子 K_{ec} ，分别由下面两个公式来确定：

$$K_e = \frac{n}{x_e}, K_{ec} = \frac{n}{x_{ec}} \quad (3-6)$$

在模糊控制器实际工作过程中，一般误差和误差变化的基本论域选择范围要比模糊集论域选择得小，所以量化因子一般都远大于 1。

此外，每次采样经模糊控制算法给出的控制量（精确量），还不能直接控制对象，还必须将其转换到控制对象能接受的基本论域中去。输出控制量 y_u 的比例因子 K_u 由下式确定：

$$K_u = \frac{y_u}{l} \quad (3-7)$$

比较量化因子和比例因子，两者均是为考虑两个论域变换而引出的，但对于输入变量而言量化因子具有量化效应，而对输出而言的比例因子只起比例作用。

3.5.2 量化因子及比例因子的选择

设计一个模糊控制器除了要有一个好的模糊控制规则外，合理选择模糊控制输入变量的量化因子和输出控制量的比例因子也是非常重要的，实验结果表明，量化因子和比例因子的大小及其不同量化因子之间大小的相对关系，对模糊控制器的控制性能影响极大。

合理地确定量化因子和比例因子要考虑所采用的计算机字长，还要考虑到计算机的输入输出接口中 D/A 和 A/D 转换的精度及其变化的范围。因此，选择量化因子和比例因子要充分考虑与 D/A 和 A/D 转换精度相协调，使得接口板的转换精度充分发挥，并使其变换范围充分利用。

量化因子 K_e 及 K_{ec} 的大小对控制系统的动态性能影响很大。 K_e 选的较大时，系统的超调也较大，过渡过程较长。因为 K_e 增大，相当于缩小了误差的基本论域，增大了误差变量的控制作用，因此导致上升时间变短，但由于出现超调，使得系

统的过渡时间过长。

K_{ec} 选择较大时, 超调量减少, K_{ec} 选择越大系统超调较小, 但系统的响应速度变慢。 K_{ec} 对超调的遏制作用十分明显。

量化因子 K_e 和 K_{ec} 的大小意味着对输入变量误差和误差变化的不同加权程度, K_e 和 K_{ec} 二者之间相互影响, 在选择量化因子时要充分考虑这一点。

此外, 输出比例因子 K_u 的大小也影响着模糊控制系统的特性。 K_u 选择过小会使系统动态响应过程变长, 而 K_u 选择过大会导致系统振荡。输出比例因子 K_u 作为模糊控制器的总的增益, 它的大小影响着控制器的输出, 通过调整 K_u 可以改变被控对象(过程)输入的大小。

应该指出, 量化因子和比例因子的选择并不是唯一的, 可能有几种不同的值, 都能使系统获得较好的响应特性。对于比较复杂的被控过程, 有时采用一组固定的量化因子和比例因子难以收到预期的控制效果, 可以在控制过程中采用改变量化因子和比例因子的方法, 来调整整个控制过程中不同阶段上的控制特性, 以使对复杂过程控制收到良好的控制效果。

一般而言, 在确定倒立摆模糊控制器量化因子和比例因子时, 总是先确定 K_u , 以使得模糊控制器的输出量在一个较合适的数量级上。为了便于寻优, 在倒立摆控制器的实际应用中, 我们先将 K_u 取为定值, 然后再对量化因子进行寻优。

一般情况下, 根据系统初始状态确定的量化因子一般较小, 可能造成死区, 如在平衡点附近出现振荡、波动, 影响倒立摆系统稳定。为此, 有必要在平衡点附近切换量化因子。本文中我们采用的 K_e 、 K_{ec} 、 K_u 是可以根据 E 、 EC 实时改变的:

当 $E \geq \bar{E}$ 时, $K_e = K_{e1}$; 当 $E \leq \bar{E}$ 时, $K_e = K_{e2}$

当 $EC \geq \overline{EC}$ 时, $K_{ec} = K_{ec1}$; 当 $EC \leq \overline{EC}$ 时, $K_{ec} = K_{ec2}$

根据多次仿真, 对阈值 $\bar{E}$ 、 $\overline{EC}$ 寻优确定上述参数。

3.6 本章小结

倒立摆是典型的非线性、强耦合系统。通过设计融合函数降低了控制器的输入维数, 解决了用模糊控制解决多输入系统时遇到的模糊规则爆炸问题, 使设计出实用的模糊控制器成为可能; 又设置了阈值调节量化因子, 使量化因子可以在平衡点附近自动切换, 提高了模糊控制器的适应能力, 提高了控制精度。这种模糊控制器的设计方法步骤清晰, 简洁, 利于仿真和计算机编程实现。

第四章 滑模变结构理论

变结构控制出现于 20 世纪 50 年代,经历了 50 余年的发展,已形成了一个相对独立的研究分支,成为自动控制系统的一种设计方法,适用于线性与非线性系统、连续与离散系统、确定性与不确定性系统、集中参数与分布参数系统、集中控制与分散控制等。并且在实际工程中逐渐得到推广应用,如电机与电力系统控制、机器人控制、飞机控制、卫星姿态控制等。这种控制方法通过控制量的切换使系统状态沿着滑模面滑动,使系统在受到参数摄动和外干扰时具有不变性,正是这种特性使得变结构控制方法受到各国学者的重视。本章主要介绍了滑模变结构的原理,滑模控制器设计的基本方法。

4.1 滑模变结构控制

变结构控制(variable structure control,VSC)本质上是一类特殊的非线性控制,其非线性表现为控制的不连续性。这种控制策略与其他控制不同之处在于系统的“结构”并不固定,而是可以在动态过程中,根据系统当前状态(如偏差及其各阶导数等)有目的地不断变化,迫使系统按照预定“滑动模态”的状态轨迹运动,所以又常称变结构控制为滑动模态控制(sliding mode control,SMC),即滑模变结构控制。由于滑动模态可以进行设计且与对象参数及扰动无关,这就使得变结构控制具有快速响应、对参数变化及扰动不灵敏、无需系统在线辨识、物理实现简单等优点。该方法的缺点在于当状态轨迹到达滑模面后,难于严格地沿着滑面向着平衡点滑动,而是在滑模面两侧来回穿越,从而产生颤动。

变结构控制的发展过程大致可分为三个阶段。

对变结构控制的研究大多集中在滑动模态上,而对进入切换面之前的运动,即正常的运动段研究较少。中国学者高为炳院士等^[45]首先提出了趋近律的概念,列举了诸如等速趋近律、指数趋近律、幂次趋近律直到一般趋近律,高氏等还首次提出了自由递阶的概念。

在解决十分复杂的非线性系统的综合问题时,变结构系统理论作为一种综合方法得到重视。但是滑模变结构对系统的参数摄动和外部扰动的不变性是以控制量的高频抖振换取的,由于在实际应用中,这种高频抖振在理论上是无限快的,没有任何执行机构能够实现;同时,这样的高频输入很容易激发系统的未建模特性,从而影响系统的控制性能。因而抖振现象给变结构控制在实际系统中的应用带来了困难。

由于人们认识到变结构系统中的滑动模态具有不变性,这种理想的鲁棒性对工程应用也是很有吸引力的。高精度伺服系统存在着许多不利于控制设计的因素,如非线性因素、外干扰及参数摄动等。由于离散滑模变结构控制自身的缺点,将其直接应用到高精度的伺服系统中将会有一定的困难,因为控制输出的高频抖振会损坏伺服系统中的电机和其他设备。要将离散滑模变结构控制应用到伺服系统中,使其真正发挥它的强鲁棒性,必须对传统的离散滑模变结构控制进行改进,并针对抖振现象改进离散滑模控制器,将有害的抖振减少到一定程度,并且又要保证滑模控制的不变性。因此,对传统的离散滑模变结构控制的改进、抖振的削弱成为研究的重点。

4.1.1 滑模变结构控制基本原理

滑模变结构是变结构控制系统的一种控制策略。这种控制策略与常规控制的根本区别在于控制的不连续性,即一种使系统“结构”随时间变化的开关特性。该控制特性可以迫使系统在一定特性下沿规定的状态轨迹作小幅度、高频率的上下运动,即所谓的“滑动模态”或“滑模”运动。这种滑动模态是可以设计的,且与系统的参数及扰动无关。这样,处于滑模运动的系统就具有很好的鲁棒性。

滑动模态控制的概念和特性如下:

(1) 滑动模态定义及数学表达式

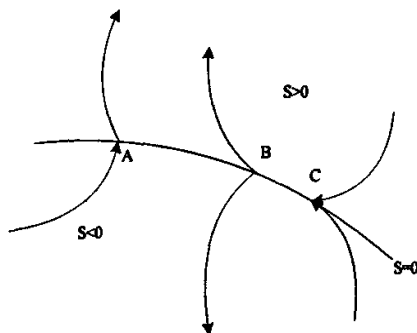


图 4.1 切换面上三种点的特性

考虑一般情况,在系统

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in R^n \quad (4-1)$$

的状态空间中,有一个切换面 $s(x) = s(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, 它将状态空间分成上下两部分 $s > 0$ 及 $s < 0$ 。在切换面上的运动点有三种情况,如图 4.1 所示。

通常点——系统运动点运动到切换面 $s = 0$ 附近时,穿越此点而过(点 A);

起始点——系统运动点到达切换面 $s = 0$ 附近时,从切换面的两边离开该点(点 B);

终止点——系统运动点到达切换面 $s = 0$ 附近时,从切换面的两边趋向于该点(点

C)。

在滑模变结构中,通常点与起始点无多大意义,而终止点却有特殊的含义。因为如果在切换面上某一区域内所有的运动点都是终止点,则一旦运动点趋近于该区域,就会被“吸引”到该区域内运动。此时,称在切换面 $s=0$ 上所有的运动点都是终止点的区域为“滑动模态”区,或简称为“滑模”区。系统在滑模区中的运动就叫做“滑模运动”。

按照滑动模态区上的运动点都必须是终止点这一要求,当运动点到达切换面 $s(x)=0$ 附近时,必有

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s} \leq 0 \quad \text{及} \quad \lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{s} \geq 0 \quad (4-2)$$

或者

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s} \leq 0 \leq \lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{s} \quad (4-3)$$

式(4-3)也可写成

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \dot{s} \leq 0 \quad (4-4)$$

此不等式对系统提出了一个形如

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n) = [s(x_1, x_2, \dots, x_n)]^2 \quad (4-5)$$

的李雅普诺夫函数的必要条件。由于在切换面邻域内函数式(4-5)是正定的,而按照式(4-4), s^2 的导数是负半定的,也就是说在 $s=0$ 附近 v 是一个非增函数,因此,如果满足条件式(4-4),则式(4-5)是系统的一个条件李雅普诺夫函数。系统本身也稳定于条件 $s=0$ 。

(2) 滑模变结构控制的定义

滑模变结构控制的基本问题如下:

设有一控制系统

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad x \in R^n, u \in R^m, t \in R \quad (4-6)$$

需要确定切换函数

$$s(x), \quad s \in R^m \quad (4-7)$$

求解控制函数

$$u \begin{cases} u^+(x) & s(x) > 0 \\ u^-(x) & s(x) < 0 \end{cases} \quad (4-8)$$

其中, $u^+(x) \neq u^-(x)$, 使得

① 滑动模态存在, 即式(4-8)成立。

② 满足可达性条件, 在切换面 $s(x)=0$ 以外的运动点都将于有限的时间内到达切

换面；

- ③ 保证滑模运动的稳定性；
- ④ 达到控制系统的动态品质要求。

上面的前三点是滑模变结构控制的三个基本问题，只有满足了这三个条件的控制才叫滑模变结构控制。

4.1.2 滑模变结构控制理论研究方向

从理论上讲，在一定意义上，由于滑动模态可以按需要设计，而且系统的滑模运动与控制对象的参数变化和系统的外界干扰无关，因此滑模变结构控制系统的鲁棒性要比一般常规的连续系统强。然而，滑模变结构控制在本质上的不连续开关特性将会引起系统的抖振。

对于一个理想的滑模变结构控制系统，假设“结构”切换的过程具有理想开关特性（即无时间和空间滞后），系统状态测量精确无误，控制量不受限制，则滑动模态总是降维的光滑运动而且渐近稳定于原点，不会出现抖振。但是对于一个现实的滑模变结构控制系统，这些假设是不可能完全成立的。特别是对于离散系统的滑模变结构控制系统，都将会在光滑的滑模面上叠加一个锯齿形的轨迹。于是，在实际系统中，抖振是必定存在的，而且若消除了抖振，也就消除了变结构控制的抗摄动和抗扰动的能力，因此，消除抖振是不可能的，只能在一定程度上削弱它。抖振问题成为变结构控制在实际系统中应用的突出障碍。

抖振产生的主要原因有：

（1）时间滞后开关

在切换面附近，由于开关的时间滞后，控制作用对状态的准确变化被延迟一定的时间；又因为控制量的幅度是随着状态量的幅度逐渐减少的，所有表现为在光滑的滑模面上叠加一个衰减的三角波。

（2）空间滞后开关

开关的空间滞后相当于在状态空间中存在一个状态量变化的“死区”。因此，其结果是在光滑的滑模面上叠加了一个等幅波形。

（3）系统惯性影响

由于任何物理系统的能量不可能无限大，因而系统的控制力也不可能无限大，这就使系统的加速度有限；另外，系统惯性总是存在的，所有使得控制切换伴有滞后，这种滞后与时间滞后效果相同。

（4）离散系统本身造成的抖振

离散系统的滑动模态是一种“准滑动模态”，它的切换动作不是正好发生切换面上，而是发生在以原点为顶点的一个锥形体的表面上。因此有衰减的抖振，而

且锥形体越大,抖振幅度越大。该锥形体的大小与采样周期有关。

总之,抖振产生的原因在于:当系统的轨迹到达切换面时,其速度是有限大,惯性使运动点穿越切换面,从而最终形成抖振,叠加在理想的滑动模态上。对于实际的计算机采样系统而言,计算机的高速逻辑转换以及高精度的数值运算使得切换开关本身的时间及空间滞后影响几乎不存在,因此,开关的切换动作所造成的控制的不连续性是抖振发生的根本原因。

在实际系统中,由于时间滞后开关、空间滞后开关、系统惯性、系统延迟及测量误差等因素,使变结构控制在滑动模态下伴随着高频抖振,抖振不仅影响控制的精确性,增加能量消耗,而且系统中的高频未建模动态很容易激发起来,破坏系统的性能,甚至使系统产生振荡或失稳,损坏控制器部件。因此,关于变结构控制信号抖振消除的研究成为变结构控制研究的首要问题。

4.2 连续时间系统滑模控制

4.2.1 滑动模态的存在和到达条件

滑动模态存在条件的成立是滑动模态控制应用的前提。如果系统的初始点 $x(0)$ 不在 $s=0$ 附近,而是在状态空间的任意位置,此时要求系统的运动必须趋向于切换面 $s=0$,即必须满足可达性条件,否则系统无法启动滑模运动。由于滑模变结构控制的控制策略多种多样,对于系统可达性条件的实现形式也不尽相同,滑动模态存在的数学表达式为:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s} < 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{s} > 0 \quad (4-9)$$

式(4-9)意味着在切换面邻域内,运动轨线将于有限时间内到达切换面,所以也称为局部到达条件。到达条件的等价形式为:

$$s\dot{s} < 0 \quad (4-10)$$

其中切换函数 $s(x)$ 应满足以下条件:

- (1) 可微;
- (2) 过原点,即 $s(0)=0$ 。

由于状态可以取任意值,即 x 离开切换面可以任意远,故到达条件(4-10)也称为全局到达条件。为了保证在有限时刻到达,避免渐近趋近,可对式(4-10)进行修正:

$$s\dot{s} < -\delta \quad (4-11)$$

其中 $\delta > 0$, δ 可以取得任意小。

通常将式(4-10)表达李雅普诺夫函数型的到达条件:

$$\dot{V}(x) < 0, V(x) = \frac{1}{2}s^2 \quad (4-12)$$

其中 $V(x)$ 为定义的李雅普诺夫函数。

4.2.2 等效控制及滑动模态方程

设系统的状态方程为

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad x \in R^n, u \in R \quad (4-13)$$

其中 u 为控制输入, t 为时间。

如果达到理想的滑动模态控制, 则 $\dot{s} = 0$, 即

$$\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial s}{\partial x} f(x, u, t) = 0 \quad (4-14)$$

将式 (4-14) 中 u 的解 u_{eq} (如果存在) 称为系统在滑动模态区内的等效控制。等效控制往往是针对确定性系统在无外加干扰情况下进行设计的。

例如, 对于线性系统

$$\dot{x} = Ax + bu \quad x \in R^n, u \in R \quad (4-15)$$

取切换函数

$$s(x) = cx = \sum_{i=1}^n c_i x_i = \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i + x_n \quad (4-16)$$

其中 $x_i = x^{(i-1)}$ ($i=1, 2, \dots, n$) 为系统状态及其各阶导数, 选取常数 $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$, 使得多项式 $p^{n-1} + c_{n-1}p^{n-2} + \dots + c_2p + c_1$ 为 Hurwitz 稳定, p 为 Laplace 算子。

设系统进入滑动模态后的等效控制为 u_{eq} , 由式 (4-15) 有

$$\dot{s} = c\dot{x} = c(Ax + bu_{eq}) = 0 \quad (4-17)$$

若矩阵 $[cb]$ 满秩, 则可解出等效控制

$$u_{eq} = -[cb]^{-1}cAx \quad (4-18)$$

针对带有不确定性和外加干扰系统, 一般采用的控制率为等效控制加切换控制, 即

$$u = u_{eq} + u_{vs} \quad (4-19)$$

其中切换控制 u_{vs} 实现对不确定性和外加干扰的鲁棒控制。所设计的控制律 u 需要满足滑模稳定条件。

有了等效控制后, 可写出滑动模态运动方程, 将等效控制 u_{eq} 代入系统的状态方程 (4-13), 可得

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u_{eq}, t) \quad x \in R^n, u \in R \\ s(x) &= 0\end{aligned}\quad (4-20)$$

将式 (4-18) 代入式 (4-15) 所示的线性系统, 有

$$\begin{cases} \dot{x} = [I - b(cb)^{-1}c]Ax \\ s(x) = cx = 0 \end{cases}\quad (4-21)$$

式中 I 为单位阵。

滑动模态运动是系统沿切换面 $s(x)=0$ 上的运动, 到达理想终点时, 满足 $s=0$ 及 $\dot{s}=0$, 同时切换开关必须是理想开关, 这是一种理想的极限情况。实际上, 系统运动点沿切换面上上下下穿行。所以式 (4-21) 是滑模变结构控制系统在滑动模态附近的平均运动方程, 这种平均运动方程描述了系统在滑动模态下的主要动态特性。通常希望这个动态特性既是渐近稳定的, 又具有优良的动态品质。从式 (4-21) 中可以看出, 滑动模态运动的渐近稳定性和动态品质取决于切换函数 s 及其参数的选择。

4.2.3 滑模变结构控制匹配条件及不变性

滑模变结构控制的突出优点是可实现滑动模态与系统的外加干扰和参数摄动完全无关, 这种性质称为滑动模态的不变性, 这也是滑模变结构控制受到重视的主要原因。但对于一般线性系统, 不变性的成立是有条件的, 需要满足滑动模态匹配条件。分以下三种情况讨论。

(1) 系统受干扰时

$$\dot{x} = Ax + Bu + Df \quad (4-22)$$

其中 Df 表示系统所受的外干扰。

滑动模态不受干扰 f 影响的充分必要条件为

$$\text{rank}[B, D] = \text{rank} B \quad (4-23)$$

如果式 (4-23) 满足, 则系统可化为

$$\dot{x} = Ax + B(u + \tilde{D}f) \quad (4-24)$$

其中 $\tilde{D} = B^{-1}D$, 则通过设计控制律 u 可实现对干扰的完全补偿。条件式 (4-23) 称为干扰和系统的完全匹配条件。

(2) 系统存在不确定性时

$$\dot{x} = Ax + Bu + \Delta Ax \quad (4-25)$$

滑动模态与 ΔA 不确定性无关的充分必要条件为

$$\text{rank}[B, \Delta A] = \text{rank} B \quad (4-26)$$

如果式 (4-26) 满足, 则系统可化为

$$\dot{x} = Ax + B(u + \Delta \tilde{A}x) \quad (4-27)$$

其中 $\Delta A = B\Delta \tilde{A}$, 则通过设计控制律 u 可实现对不确定性的完全补偿。条件式 (4-26) 称为不确定性和系统的完全匹配条件。

(3) 对于同时存在外干扰和参数摄动的系统

$$\dot{x} = Ax + \Delta Ax + B + Df \quad (4-28)$$

如满足匹配条件式 (4-23) 和式 (4-26), 则系统可化为

$$\dot{x} = Ax + B(u + \Delta \tilde{A}x + \tilde{D}f) \quad (4-29)$$

4.2.4 滑模控制器设计基本方法

设计滑模变结构控制器的基本步骤包括两个相对独立的部分:

- (1) 设计切换函数 $s(x)$, 使它所确定的滑动模态渐近稳定且具有良好的动态品质;
- (2) 设计滑动模态控制律 $u^*(x)$, 使到达条件得到满足, 从而在切换面上形成滑态区。

一旦切换函数 $s(x)$ 和滑动模态控制律 $u^*(x)$ 都得到了, 滑动模态控制系统就能完全建立起来。

常规滑模变结构控制有以下几种设计方法:

(1) 常值切换控制

$$u = u_0 \text{sgn}(s(x)) \quad (4-30)$$

式中, u_0 是待求的常数, sgn 是符号函数, 求滑模变结构控制就是求 u_0 。

(2) 函数切换控制

$$u = u_{eq} + u_0 \text{sgn}(s(x)) \quad (4-31)$$

这是以等效控制 u_{eq} 为基础的形式。

(3) 比例切换控制

$$u = \sum_{i=1}^k \psi_i x_i \quad k < n$$

$$\Psi_i = \begin{cases} \alpha_i & x_i s < 0 \\ \beta_i & x_i s > 0 \end{cases} \quad \alpha_i, \beta_i \text{ 为常数} \quad (4-32)$$

4.2.5 基于比例切换函数的滑模控制

设位置状态方程为：

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4-33)$$

设位置指令信号为 r ，将系统的位置误差 e 和速度误差 $\dot{e}$ 作为状态变量，即

$$\left. \begin{aligned} e &= r - x(1) \\ \dot{e} &= \dot{r} - x(2) \end{aligned} \right\} \quad (4-34)$$

则切换函数为

$$s = ce + \dot{e} \quad (4-35)$$

根据比例切换控制方法，控制律取为

$$u = (\alpha |e| + \beta \dot{e}) \operatorname{sgn}(s) \quad (4-36)$$

其中 α 和 β 为大于零的常数。

4.3 倒立摆的滑模控制

V.I.Utkin^[46] 提出并采用了两种变结构控制方法实现了倒立摆小车和摆角的控制。在该控制律中，采用 Ackermann 公式设计滑模控制律的 C 值：

$$s = C^T x, \quad C^T = e^T P(A) \quad (4-37)$$

Ackermann 公式描述为

$$e^T = [0, \dots, 0, 1][b, Ab, \dots, A^{n-1}b]^{-1} \quad (4-38)$$

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_{n-1})(\lambda - \lambda_n) \quad (4-39)$$

(1) 常值切换控制

根据式 (4-30)，控制律取

$$u = -M_0 \operatorname{sgn}(s) \quad (4-50)$$

其中 $M_0 > f_0$ 。

(2) 比例切换控制

根据式 (4-32)，控制律取

$$u = -\beta(|x| + |\dot{x}| + |\alpha| + |\dot{\alpha}|) \operatorname{sgn}(s) \quad (4-51)$$

4.4 本章小结

本章主要介绍了滑模变结构控制的基本原理，并介绍了滑模变结构控制理论的研究方向，接下来介绍了滑动模态的存在和达到条件，滑模控制器设计的基本

方法，最后用常值切换控制和比例切换控制设计了倒立摆的控制器。

第五章 倒立摆系统的仿真研究

本章是将在上面几章的基础上, 用 Matlab 和 Simulink 工具进行一级、二级倒立摆控制系统的仿真研究。

5.1 倒立摆模糊控制系统仿真

5.1.1 一级倒立摆系统仿真图

由前面得到一级倒立摆系统的近似线性化状态方程式:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ Y = CX \end{cases}$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(I+ml^2)b}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{m^2gl^2}{I(M+m)+Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mlb}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{mgl(M+m)}{I(M+m)+Mml^2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{I+ml^2}{I(M+m)+Mml^2} & 0 & \frac{ml}{I(M+m)+Mml^2} \end{bmatrix}^T$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

由前面得到的数据有:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0883 & 0.6293 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.2357 & 27.8285 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.8832 \\ 0 \\ 2.3566 \end{bmatrix}$$

用 Simulink 构建的一级倒立摆模糊控制仿真结构图如图 5.1 所示。

融合函数 F_1 :

$$K = [-10 \quad -8.9836 \quad 49.9835 \quad 9.6840]$$

$$F_1(X) = \begin{pmatrix} 1 & -0.4064 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1.7815 \end{pmatrix}$$

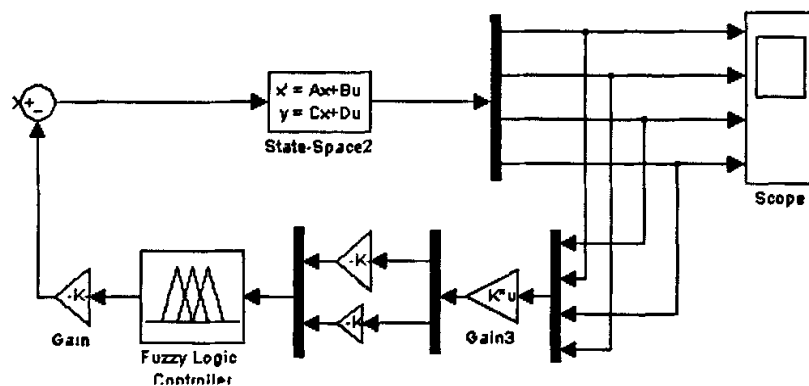


图 5.1 一级倒立摆仿真结构图

一级倒立摆仿真结果分析:

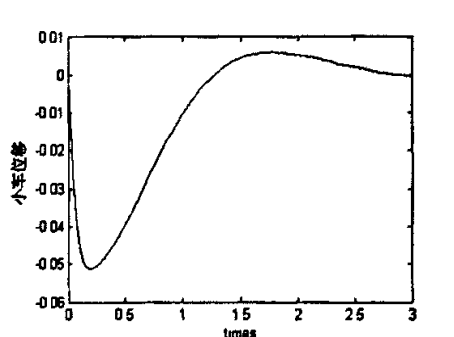


图 5.2 一级倒立摆小车位移仿真曲线

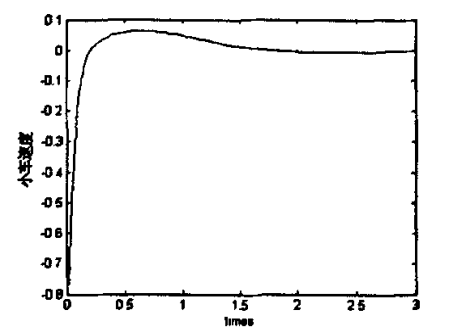


图 5.3 一级倒立摆小车速度仿真曲线

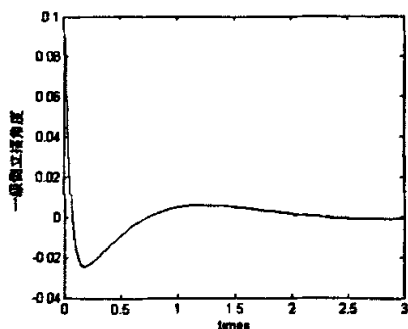


图 5.4 一级倒立摆摆角仿真曲线

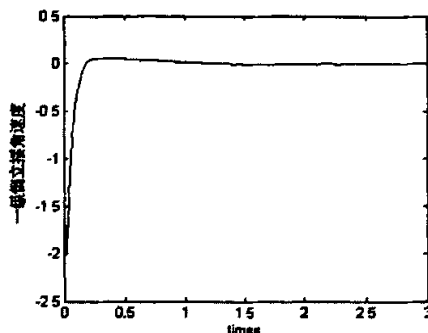


图 5.5 一级倒立摆摆角速度仿真曲线

仿真的初始条件: $r=0$, $\theta=0.1\text{rad} \approx 5.7^\circ$ 。小车位移和速度曲线、摆角和角速度曲线和控制量曲线如图 5.2—图 5.5 所示。仿真步长是 5ms, 仿真时间是 3 秒钟。

从图 5.4 和图 5.2 的仿真曲线来看, 摆角的最大角度在 0.1rad 以内, 小车位移偏离平衡位置的距离小于 6cm , 控制量也在合理范围, 系统基本在 2 秒内回到了平衡位置。仿真证明: 模糊控制器可以稳定一级倒立摆系统, 而且响应速度快。

5.1.2 二级倒立摆模糊控制系统仿真

在第二章推导出的二级倒立摆系统的状态方程:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ Y = CX \end{cases}$$

其中: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 77.0642 & -21.1927 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -38.5321 & 5.0727 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 5.7012 \\ 0.0267 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

用 Simulink 构建的二级倒立摆模糊控制仿真结构图如图 5.6 所示。

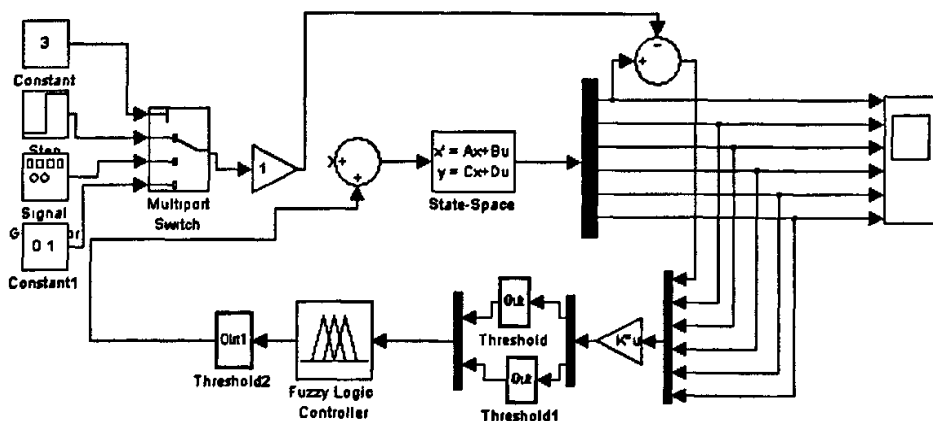


图 5.6 二级倒立摆模糊控制仿真系统框图

状态反馈矩阵:

$$K = [-31.6228 \quad 100.3822 \quad -54.8563 \quad -36.1278 \quad 12.1965 \quad -2.3054]$$

$$\therefore F_1(X) = \begin{pmatrix} -0.0854 & -0.5497 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5144 & -0.0744 & 1 \end{pmatrix}$$

前面得到推出了二级倒立摆系统的能控度比一级倒立摆系统小, 这对模糊控制器的设计提出了更高的要求。

二级倒立摆系统的控制较一级倒立摆更加复杂。在仿真过程中, 我们发现, 小车位移及各摆杆与竖直方向的夹角的初始值对倒立摆稳定情况影响很大, 其中倒立摆稳定性对夹角的初始值尤为敏感。二级倒立摆的偏角 θ_1, θ_2 的初始值关于偏离方向有以下4种情况:

- ① $\theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0$; ② $\theta_1 \geq 0, \theta_2 \leq 0$; ③ $\theta_1 \leq 0, \theta_2 \geq 0$; ④ $\theta_1 \leq 0, \theta_2 \leq 0$;

四种情况中, 情况①和情况④是对称的; 情况②和情况③是对称的。其中又属情况②和情况③更难控制。这里, 就以情况②为初始状态进行仿真。取 $r = 5\text{cm}, \theta_1 = 0.05\text{rad}, \theta_2 = -0.05\text{rad}$ 同时要求小车回到指定位置 $r_d = 0$ 。仿真结果如图 5.7—图 5.12 所示。仿真步长是 5ms, 仿真时间是 5 秒。

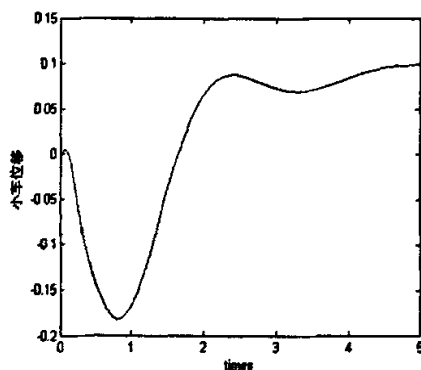


图 5.7 小车位移仿真曲线

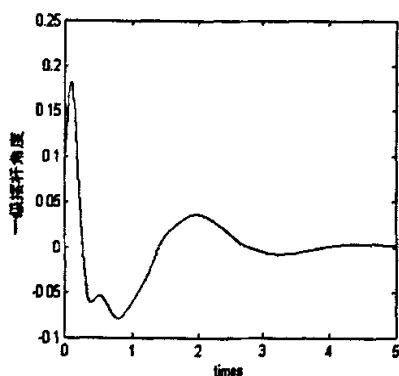


图 5.8 一级摆角仿真曲线

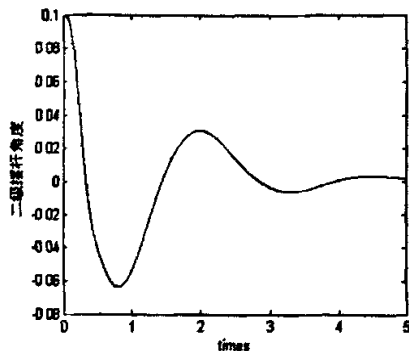


图 5.9 二级摆角仿真曲线

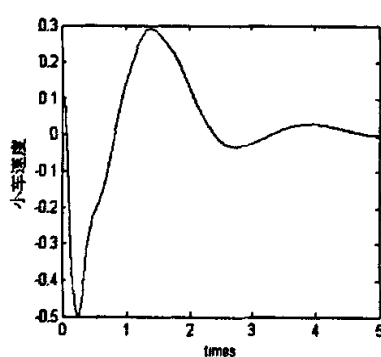


图 5.10 小车速度仿真曲线

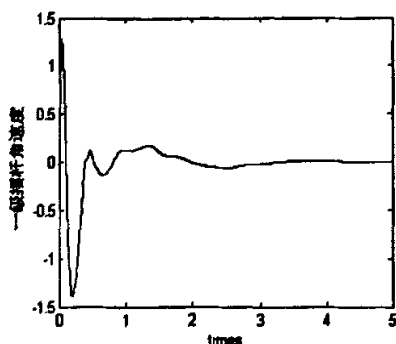


图 5.11 一级摆角角速度仿真曲线

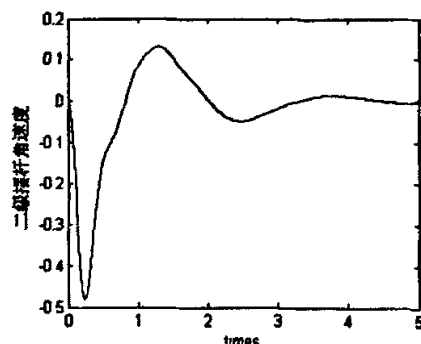


图 5.12 二级摆角角速度仿真曲线

从图 5.7—图 5.12 的仿真曲线来看，二级摆角度的最大值在 0.06rad 以内，一级摆角度最大也不超过 0.16rad ，小车位移偏离平衡位置的最大距离小于 18cm ，控制量也在合理范围，系统基本在 3.5 秒内回到了平衡位置。仿真证明：模糊控制器不仅稳定了二级倒立摆系统，而且使小车停到指定位置。

5.2 倒立摆的滑模变结构控制仿真

5.2.1 一级倒立摆的滑模变结构控制仿真

前面第四章讲述了滑模控制器的设计，常值切换控制和比例切换控制。

在常值切换控制中，控制律取 $u = -M_0 \text{sgn}(s)$ ，在比例切换控制中控制律取

$$u = -\beta(|x| + |\dot{x}| + |\ddot{x}|) \text{sgn}(s)。$$

假如控制律取为式 (4.50)，其中 $M_0 = 40$ ，仿真结果如图 5.13~5.15 所示。

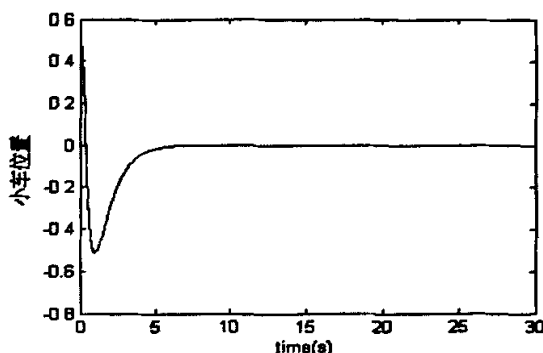


图 5.13 小车位置仿真图

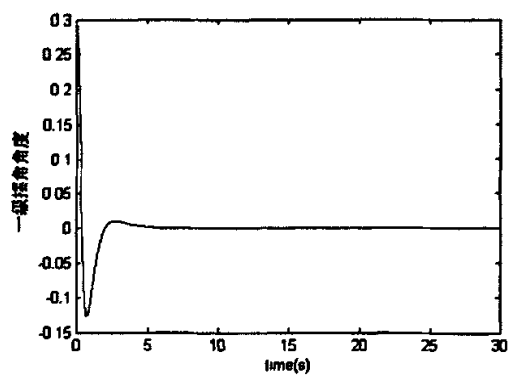


图 5.14 倒立摆摆角仿真图

假如控制律取为式 (4.51), 其中 $\beta = 30$, 仿真结果如图 5.15~5.17 所示。

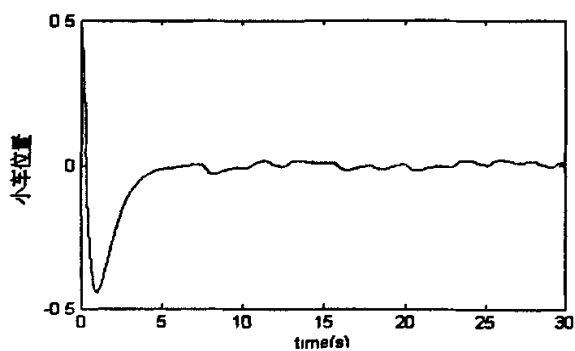


图 5.15 小车位置仿真图

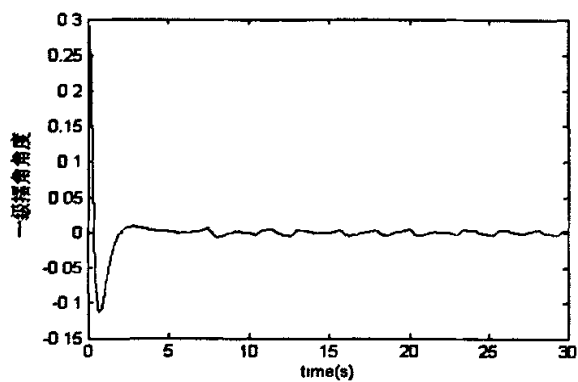


图 5.16 一级倒立摆摆角仿真图

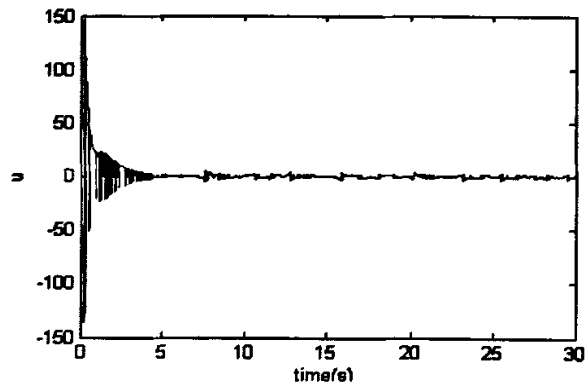


图 5.17 控制器输出仿真图

5.3 本章小结

本章利用 Matlab6.5 和其中的 Simulink5.0 仿真工具箱构建了一级倒立摆、二级倒立摆的模糊控制仿真系统和滑模变结构控制系统仿真。仿真结果证明, 模糊控制器和滑模变结构控制不但具有良好的稳定性和鲁棒性, 还可使倒立摆小车行走到的位置(即定位功能)。为下一步进行倒立摆系统的实物控制做好了充分的准备。

第六章 倒立摆实物控制

在完成了倒立摆系统建模、仿真实验之后，接着进行了倒立摆的硬件系统(即实物系统)的研究。实现了一级倒立摆实物系统控制和二级倒立摆实物系统控制，效果与仿真结果类似，具有良好的稳定性、鲁棒性和定位功能。

6.1 倒立摆实物系统简介

固高倒立摆控制系统硬件框图如图 6.1 所示，包括计算机、运动控制卡、伺服系统、倒立

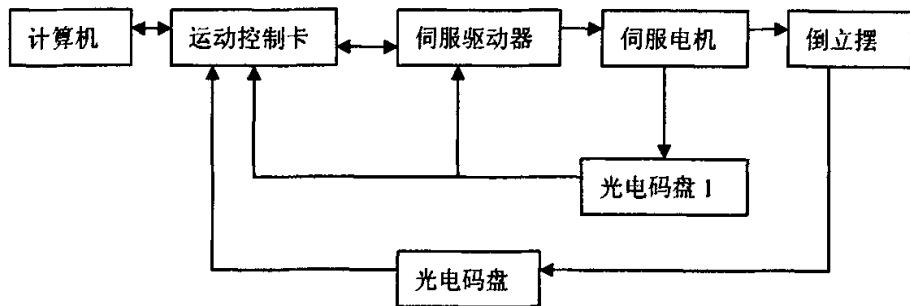


图 6.1 倒立摆系统的硬件框图

摆本体和光电码盘反馈测量元件等几大部分，组成一个闭环系统。图中光电码盘 I 由伺服电机自带，对于直线型倒立摆，可以根据该码盘的反馈通过换算获得小车的位移，小车的速度信号可以通过差分法得到；各个摆杆的角度由光电码盘测并直接反馈到控制卡，速度信号可以通过差分方法得到。计算机从运动控制卡中实时读取数据，确定控制决策（电机的输出力矩），并发送给运动控制卡。运动控制卡经过 DSP 内部的控制算法实现该控制决策，产生相应的控制量，使电机转动，带动小车运动，保持摆杆平衡。

GIP 直线倒立摆本体结构：如 6.2 图所示。主要部件有：基座，交流伺服电机，同步带，增量式光电编码器，小车，摆杆，滑杆，限位开关等。伺服电机是控制系统的执行机构，在运动过程中通过同步带驱动小车在滑杆上来回运动，保持摆杆平衡；电机编码器和角编码器属于测量元件，将小车的位移信号和摆杆的角度信号反馈回控制卡和伺服驱动器；小车摆杆部分是一个典型的多变量强耦合非线性被控对象，最后的控制目的就是保持摆杆的在竖直位置的平衡。

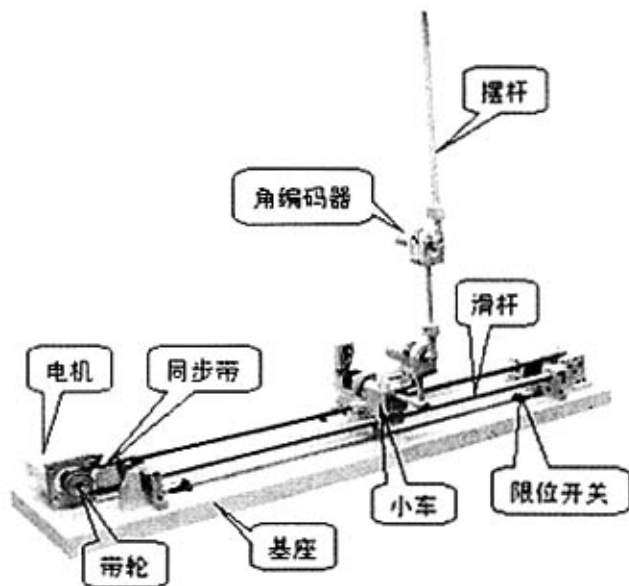


图 6.2 倒立摆实物图

电控箱：主要由伺服电机驱动器、12V 直流电源、运动控制器端子板、接口插座和开关等组成。通过它可以驱动摆体上的交流伺服电机，为倒立摆系统提供控制量。同时当系统失控现象时，通过上面的电源开关可以切断电源。

控制平台：由一台PC机和插在这台PC中的运动控制卡组成。GT-400-SV PIC总线四轴伺服运动控制卡的核心由ADSP2181数字信号处理器和FPGA组成，实现高性能的控制计算。该运动控制器是一块带有PCI标准总线，以IBM-PC或者兼容机作为主机应用插板。它具有功能强、性能高、使用方便的特点，以同步控制四个运动轴，实现复杂的多轴协调运动。

6.2 倒立摆控制软件

倒立摆实物控制系统是一个典型的计算机控制系统，其控制是通过软件编程实现的，因此控制程序的编写是实现倒立摆实物系统控制的重要环节。

本系统的实时控制软件主要采用了 MATLAB/Simulink 的实时工具箱 RTW (Real-Time Workshop)实现控制任务，运行在 Windows2000 操作系统基础上。由于使用专用的实时内核代替 Windows 操作系统接管了实时控制任务，内核任务执行的最小周期是 1ms，大大地提高了系统控制的实时性，完全可以满足 Windows 下较高的实时性控制要求而不用担心 Windows 本身的实时性问题。实时控制软件的核心部分是“GT-400-SV Block Library”模块库，包括了6个与运动控制卡相关的功能模块，如图6.3所示。

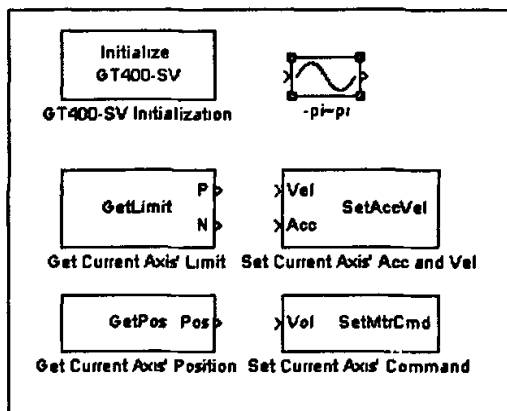


图 6.3 GT-400-SV 模块库

下面是各个模块功能的详细描述。

(1) **GT-400-SV Initialization** 模块：功能是 GT-400-SV-PCI 运动控制卡初始化。参数为控制模式，0 表示闭环控制；1 表示开环控制。

(2) **Get Current Axis' Position** 模块：功能是读取当前轴的位置。参数为当前操作对应的轴号；输出为当前轴的编码器读数。

(3) **Set Current Axis' Acc and Vel** 模块：功能是设定当前轴的速度和加速度。参数为当前操作对应的轴号。

(4) **Set Current Axis' Command** 模块：功能是直接向电机伺服系统输出一控制电压值。参数为操作对应的轴号；模块的输入为向电机输出的电压值。

(5) **Get Current Axis' Limit** 模块：功能是读取当前轴的限位信号。参数为当前操作对应的轴号；P 输出为正限位信号；N 输出为负限位信号；0 表示没有限位，1 表示有限位。

(6) **-pi~pi** 模块：把输入信号以 2π 为周期转换到 $-\pi \sim \pi$ 之间。

本系统实时控制软件主要是在上面 6 个模块的基础上搭建的，下面以二级倒立摆为例，建立其实时控制模块“Real Control”。首先建立二级倒立摆对象“Pendulum”模块，它是由“GT400-SV Block Library”模块库搭建而成，如图 6.4 所示。板卡的控制模式默认为速度控制模式，此模块将控制算法的结果包括理论运算的速度“Vel”和加速度“Acc”输出到板卡，并且输出小车位置，摆杆 1、2 的偏角，而小车和各级摆杆的速度利用一阶差分的方法计算得到。除此之外，还需要一个触发和安全设置模块“Trigger and Safety”来控制软件的运行，如图 6.5 所示。“EntryAngle”是稳摆进入角度，当第一摆杆和第二摆杆均小于设定角度时，系统开始控制。“StopAngle”是系统停止角度，当第一摆杆或者第二摆杆大于设定角度时，系统停止控制，同时停止软件程序的执行。

对倒立摆进行实物控制。

由于使用了MATLAB/Simulink的实时工具箱RTW, 实控软件具有如下的特点:

- 1) 有助于形成系统建模、仿真和实时控制一体化的操作界面;
- 2) 基于Windows下的图形化操作界面, 同时解决了在Windows下控制实时性较差的问题;
- 3) 良好的MATLAB/Simulink模块化的控制界面, 用户可以方便地设计出自己的算法控制算法;
- 4) 可以在其正在执行的过程中实时地在线修改或者调整参数, 新的参数值立刻取代旧值继续进行实时控制, 使得在调试控制参数时显得异常方便;
- 5) 使用示波器模块方便对模型中各路信号在线进行观察和记录。

6.3 倒立摆实时控制结果

6.3.1 一级倒立摆实验结果

一级倒立摆的控制程序如图6.7所示, 其中"Real Control"模块是直线一级倒立摆的硬件驱动部分。"T_S Controller"模块是一个四输入、单输出的S-T型模糊控制器算法模块, 通过编写函数来实现。由于实时工具箱RTW不支持M文件的S-函数, 因此需要使用C语言编写的C MEX S-函数, 其具体的编写方法, 可以参考相关文献^{[39][40]}。控制算法模块将得到的系统输入运用模糊控制理论的相关算法得出控制系统输出, 并输出到控制板卡上。

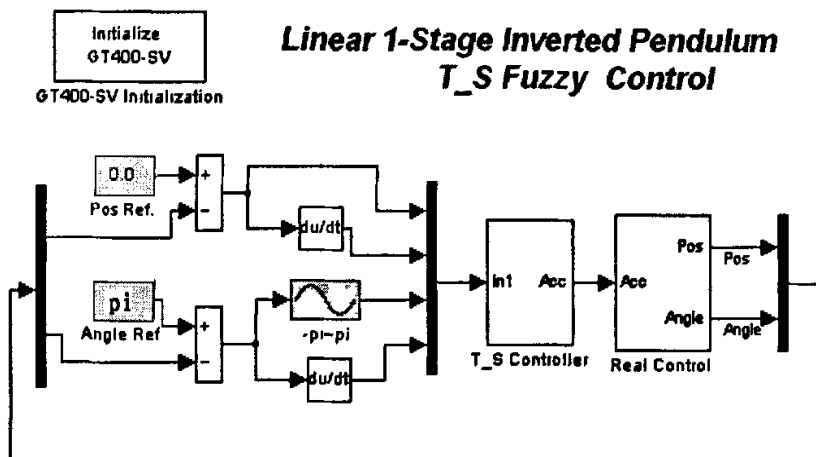


图 6.7 一级倒立摆的控制程序

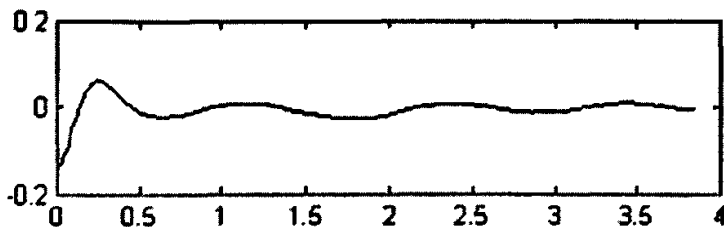


图 6.8 小车位移曲线

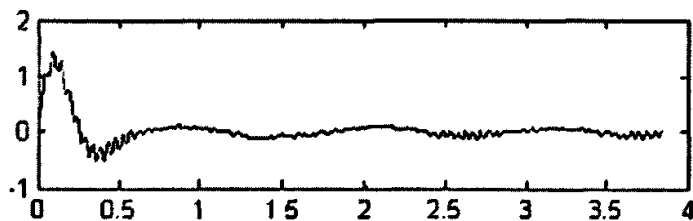


图 6.9 小车速度曲线

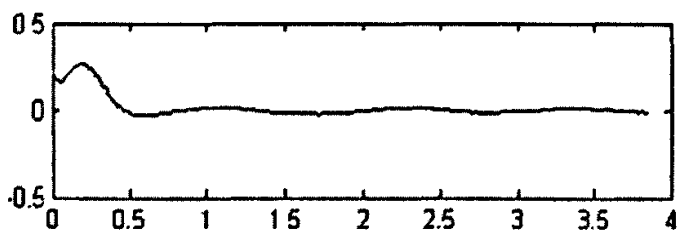


图 6.10 一级倒立摆摆角曲线

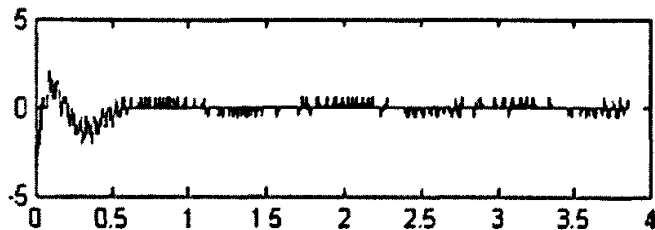


图 6.11 一级倒立摆摆角角速度曲线

倒立摆的控制结果如图 6.8—6.11 所示。从图中可以看到：倒摆的偏角控制在 0.015rad 的范围，小车的运动范围也控制在 1cm 以内。所以系统在稳态时，控制效果是相当理想的。

模糊控制器除了在稳定点具有很好的控制效果外，还具有很好的鲁棒性。图 6.9 中的图(a)是在 25 秒是通过击摆杆给系统施加扰动后，小车和摆角的运动情况，从图中可以看到，系统经过大约 5s 的时间后又会回到平衡位置；图(b)是小车跟踪方波曲线的运动曲线，可以发现小车的跟踪效果很好，倒摆的最大摆角也不超过 0.1rad (约 5.7°)，控制在允许的范围內。

6.3.2 二级倒立摆实验结果

二级倒立摆的控制程序和一级摆的相示, 主要包括实时控制“Real Control”模块、“Initialization”控制板卡初始化模块、融合函数模块、GA_Fuzzy控制算法模块等。GA_Fuzzy控制算法模块是控制软件的核心部分, 实现了在第五章中设计的二输入单输出Mamdani型模糊控制器的功能。由于该控制器的每个变量有7个模糊子集, 总共有49条控制规则, 控制规则比较多, 给编程带来了一定的困难, 因此这里不再使用编程的方法而是通过查表实现。在二级倒立摆实物控制实验中, 截取了20秒—30秒时间段的实验数据, 结果如图6.10所示: 图中分别为在系统稳定状态下各状态变量的相应输出曲线, 系统的每一个状态量都控制在很小的运动范围范围内。图6.11是在该倒摆系统施加干扰后的输出曲线, 我们在 $t=17$ 秒时敲击二级摆杆, 给系统施加扰动后, 系统很快又回到了平衡位置。对二级摆实物控制证明: 模糊控制器可以稳定倒立摆系统, 而且具有良好的稳定性、鲁棒性。

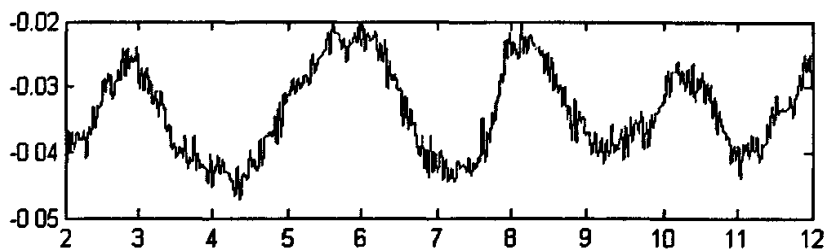


图 6.12 二级倒立摆小车位移曲线

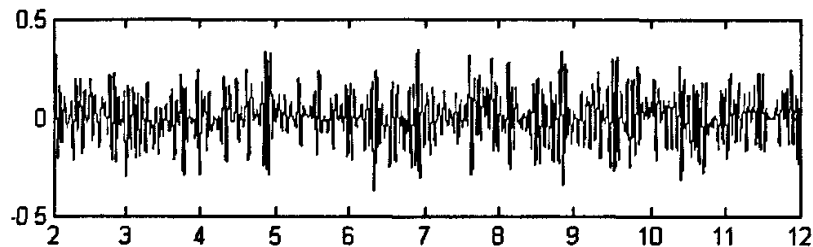


图 6.13 二级倒立摆小车速度曲线

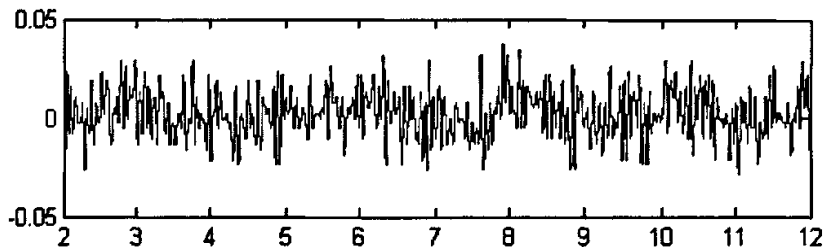


图 6.14 二级倒立摆一级摆角曲线

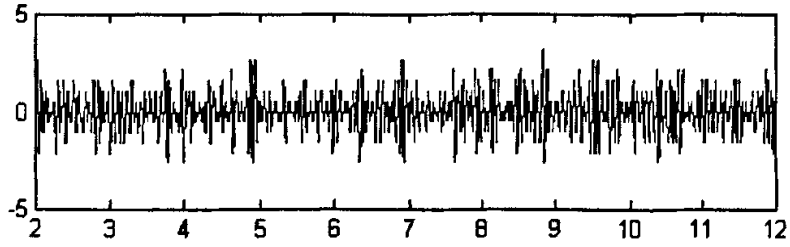


图 6.15 二级倒立摆一级摆角角速度曲线

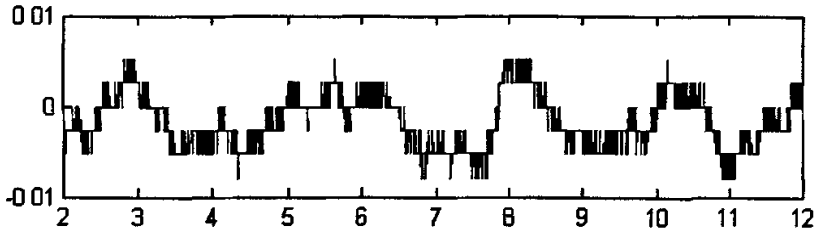


图 6.16 二级倒立摆二级摆角曲线

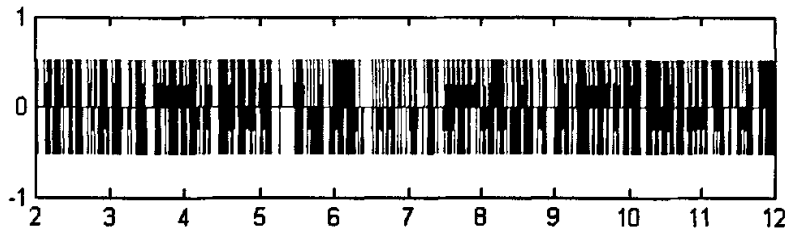


图 6.17 二级倒立摆二级摆角角速度曲线

6.4 本章小结

本章简要介绍了倒立摆实物系统的主要部件及功能，它是一个典型的计算机控制系统。分析了系统的控制策略，给出了倒立摆系统实施控制软件平台的组成及控制算法的实现方法，并且成功地控制了一级、二级倒立摆，同时给出了系统在稳定状态下及受到扰动后各状态变量的相应曲线。实物控制的成功进一步证明了本文设计的两种模糊控制器有良好的稳定性、鲁棒性和适应性。

第七章 总结与展望

倒立摆系统作为典型的非线性多变量、强耦合、自然不稳定系统,是研究控制理论的理想实验手段,尤其是二级倒立摆系统的稳定控制研究,难度大,挑战性更强。随着科学技术的迅猛发展,对控制系统性能的要求不断提高,非线性控制和智能控制业已成为控制界研究的热点问题。本文围绕一级倒立摆系统和二级倒立摆系统,采用模糊控制理论研究了倒立摆控制问题。用 Simulink 进行了倒立摆的模糊控制系统仿真研究,并且结合计算机控制技术研究了倒立摆实物系统的控制问题,实物控制的成功进一步证明了本文设计的模糊控制器有很好的稳定性、鲁棒性和适应性。通过研究得到了如下结论。

1. 通过对倒立摆系统的能控性、能观性及相对能控度分析。证明了倒立摆系统在平衡位置附近是能控的、能观的,但是二级倒立摆的相对能控度更小,更难控制。

2. 运用最优控制方法设计了融合函数以降低模糊控制器的输入变量维数,成功解决了“模糊规则爆炸”问题。

3. 研究了量化因子及比例因子对倒立摆模糊控制系统的影响,并通过阈值调节使量化因子可以在平衡位置自动切换,提高了模糊控制器性能。

4. 利用 Simulink 建立了倒立摆系统模型,特别是利用 Mask 封装功能,使模型更具灵活性,给系统仿真带来很大方便。

5. 结合计算机控制技术,编写模糊控制算法程序,成功实现了倒立摆实物系统的模糊控制,并且稳定性好,鲁棒性强。

倒立摆系统是验证各种控制算法的工具,同时倒立摆实物系统的控制研究与计算机控制技术又密不可分。由于时间关系,本文只是对倒立摆系统控制方法进行了很小范围的探索,本文在以下几方面内容有待进一步深入和完善。

1. 进一步增强量化因子及比例因子自适应能力。使量化因子和比例因子可以根据控制的不同阶段对误差和误差变化率重视程度的不同,动态地变化。

2. 在一级、二级倒立摆模糊控制的基础上,把模糊控制算法与其他控制策略结合,如神经网络控制,自适应控制等,着手三级倒立摆系统模糊控制研究。

3. 可以尝试在 Windows 平台上开发控制程序,如:用 VC++ 开发控制界面和控制程序或者在 Simulink 环境或 Labview 环境下进行实时控制。由于倒立摆控制系统实时性很强,如何获得较精确的采样周期对系统进行采样并计算得到当前控制量实现实时控制是需要解决的主要问题。

致谢

在我两年半的研究生学习及这次论文的撰写过程中，有许多人给我提供了热情的帮助，正是他们的支持和鼓励，才使我顺利地完成了课题的研究和论文的撰写。在本文即将完成之际，我在此衷心地感谢那些直接或间接为本文的完成做出贡献的人，以及那些曾经给予我有益帮助的人。

首先，我要衷心地感谢我的导师过润秋教授！本文的工作是在导师的悉心指导下完成的。从论文的选题、实验和论文的撰写都得到了导师细心的指导和大力支持，不仅为我的研究指明了方向，而且在理论上给予我精心的指导。过老师渊博的知识、严谨的科学态度和勤奋的工作作风，以及对问题清晰敏锐的洞察力勤奋的工作作风都给我留下了深刻的印象，使我受益匪浅，并在以后将继续激励着我刻苦钻研，追求上进。

其次我要感谢教研室所有在生活和学习上帮助我、和我一起度过平淡而快乐的研究生生活的师兄师弟、师姐师妹们！感谢其他所有关心、帮助和支持我的朋友们！

我还要特别感谢我的父母，是他们支持和理解是我前进的动力，并使我具有勇气和信心去不断克服前进中遇到的困难和障碍。

参考文献

- [1] MEIER H., FARWIG Z and UNBEHAUEN H: Discrete computer control of a triple-inverted pendulum. *Opt, Connt. App. & Methods*, 1990, 11, pp.157-171.
- [2] Mori Shozo, H. Nishihara and K. Furuta. Control of unstable mechanical system: Control of pendulum [J]. *Int. J. of Control* 1976, 23(5): 673-692.
- [3] K. Furuta, Katsuhisa, H. Kajiwara and K. Kosuge. Digital control of a double inverted pendulum on an inclined rail [J]. *Int. J. of Control* 1980, 32(5): 907-924.
- [4] K. Furuta, Katsuhisa, T. Ochia and N. Ono. Attitude control of a triple inverted pendulum [J]. *Int. J. of Control* 1984, 39(6): 1351-1365.
- [5] J. W. Watts. Control of an inverted pendulum. *ASCE Annual Conference*, session 2527, 1984, 706-710.
- [6] K. Furuta, M. Yamakita and S. Kobayashi. Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback [J]. *J. of Systems and Control Engineering* 1992, 206:263-269.
- [7] A.L. Fradkov, P.Y. Guzenko, D.J. Hill and A.Y. Pogromsky. Speed gradient control and passivity of nonlinear oscillators [C]. *Proc. of IFAC symposium on Control of Nonlinear Systems*, Lake Tahoe. 1995, 655-659.
- [8] Wiklund, Magnus, Anders Kristenson and K.J. Astrom. A new strategy for swing up an inverted pendulum [C]. In preprints IFAC 12th world congress. Sydney, Australia. 1993, 151-154.
- [9] M. Yamakita, M. Iwashiro, Y. Sugahara and K. Furuta. Robust swing-up control of inverted pendulum [C]. *Proc. of the American Control Conference*, Seattle, Washington. 1995, 290-294.
- [10] Grossimon P G, Barbieri E, Drakunov S. Sliding mode control of an inverted pendulum. *Proceedings of the Twenty English Southeastern Symposium on System theory*, 1996, 248~252
- [11] Chen Y P, Chang J L, Chus S R. PC-based sliding-mode control applied to parallel-type double inverted pendulum system, *Mechatronics*, 1999, 9: 553~564
- [12] 张克勤, 苏宏业, 庄开宇, 褚建. 三级倒立摆系统基于滑模的鲁棒控制. *浙江大学学报*, 2002, 36 (4): 404~409
- [13] T. H. Hung, M. F. Yeh and H. C. Lu. A PI-like fuzzy controller implementation for the inverted pendulum system. *IEEE ICIPS 97*, Beijing, China, 1997, pp.218-222.

- [14] Tzue-Hseng S. Li, Chin-Yin Tsai. Parallel fuzzy sliding mode control of the cart-pole system IEEE International Conference on Industrial Electronics, Control and Instrumentation, 1995, 2:1468-1473.
- [15] 张乃尧, C. Ebert, R. Belschner, H. Strahl. 倒立摆的双闭环模糊控制. 控制与决策, 1996, 11(1):85-88.
- [16] S. Deris, S. Omatu. Stabilization of inverted pendulum by the genetic algorithm. IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, 1995, 383-388.
- [17] F. Grordillo, A. Bernal. Optimal control of an inverted pendulum by genetic programming; practical aspects. IEEE International Conference on Artificial Neural Networks and Genetic Algorithms, 1997, 144-151.
- [18] F. Bouslama, A. Ichikawa. Application of neural network to fuzzy control. Neural Networks, 1993, 6:791-799.
- [19] C. W Anderson. Learning to control an inverted pendulum using neural networks. IEEE Control Systems Magazine, 1989, 9(3): 31-37.
- [20] I. Hayashi, H. Nomura, N. Wakami. Artificial neural network driven fuzzy control and its application to the learning of inverted pendulum system. Proceedings of the 3rd IFSA Congress, Seattle, 1989: 610-613.
- [21] D. Yan, M. Saif. Neural networks based controllers for non-linear systems. Control and computers, 1995, 23(3).
- [22] 张明廉, 郝健康等. 拟人智能控制与三级倒立摆. 航空学报, 1995, 16(6):654-661.
- [23] 李洪兴, 苗志宏, 王加银, 四级倒立摆的变论域自适应模糊控制. 中国科学 (E 辑), 第 32 卷 第一期 2002(2):65-75.
- [24] 王加银, 基于变论域自适应模糊控制的倒立摆仿真与实物实现, 北京师范大学博士学位论文 2002.5.
- [25] S. Mori, H. Nishihara, K. Furuta. Control of unstable mechanical system control of pendulum. International Journal of Control, 1976, 23(5):673-692.
- [26] K. J. Astrom. Swing up a pendulum by energy control. In IFAC 13th world Congress, San Francisco, California, 1996, F: 301-306.
- [27] S. A. Bortorff. Robust swing-up control for a rational double pendulum. In IFAC 13th world Congress, San Francisco, California, 1996, F: 413-419.
- [28] 朱江滨, 易建强. 二级倒立摆的摆器控制. 系统仿真学报, 2003, 15(7):1043-1045.
- [29] 李祖枢、陈庆春, 倒摆系统的智能控制研究及其发展动向, 第二届全球华人智能控制与智能化大会论文集(上卷), PP.14-19.

- [30] 曾培, 小车—二级摆摆起倒立的仿人智能控制研究, 重庆大学硕士学位论文, 2001 年, 专业: 模式识别与智能系统.
- [31] 陈文良, 洪嘉振, 周鉴如, 等. 分析动力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1994. 158-276.
- [32] 杜继宏, 解学书, 慕春棣. 自动控制原理(下). 清华大学出版社, 1992.
- [33] 吴麟 主编. 自动控制原理. 清华大学出版社, 1990.
- [34] 胡寿松 主编. 自动控制原理(第三版). 国防工业出版社, 1994.
- [35] 张冬军, 丛爽, 秦志强. 倒立摆控制系统研究综述. 固高科技研究生论文集 第一辑, 非线性复杂系统的智能控制.
- [36] 李士勇 编著. 模糊控制·神经控制和智能控制论. 哈尔滨工业大学出版社. 1996.
- [37] 戎月莉 编著. 计算机模糊控制原理与应用. 北京航空航天大学出版社. 1995.
- [38] 张乃尧, C. Ebert, R. Belschner, H. Strahl. 倒立摆的双闭环模糊控制. 控制与决策, 1996, 11(1): 85-88.
- [39] 范醒哲, 张乃尧, 陈宁. 三级倒立摆的二种模糊串级控制方案. 2002, 6, the 3rd World Congress on Intelligent Control and Automation. Hefei. P.R China 1721-1726.
- [40] Shuliang Lei, Reza Langari, Hierarchical Fuzzy Logic Control of a Double Inverted Pendulum. C2000 IEEE, 1074-1077.
- [41] 程福雁, 钟国民, 李友善. 二级倒立摆的参变量模糊控制. 信息与控制, 1995, 24(3): 189-192 页.
- [42] Fuyan Cheng, Guomin Zhong, Youshan Li, Zhengming Xu. Fuzzy control of a double-inverted pendulum. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 79(3): 315-321.
- [43] 曲建岭, 吴文海, 孙俊恩. 三级倒立摆系统模糊控制器设计及仿真. 系统仿真学报, 2004, 3, 16(3): 578-581.
- [44] Bryson A E, Luenberger D G. The Synthesis of Regulator Logic Using Variable Control [C]. Proceeding of the IEEE, 1970, 58 (11).
- [45] 高位炳, 变结构控制理论及设计方法. 北京: 科学出版社, 1996
- [46] Utkin V I, Guldner J, Shi J. Sliding mode in electromechanical systems. Taylor & Francis 1999

作者在读期间的研究成果

发表或待发表的论文

[1] 于姗姗, 熬志伟. 基于遗传算法的二级倒立摆模糊控制器研究

自动化技术与应用. 2006, 12.

[2] 魏志刚, 于姗姗. 基于神经网络理论的一级倒立摆控制算法研究. 科技信息. 2006.12