

## 珠海市实验中学-东莞市第六高级中学-河源高级中学

## 2020 届高考联盟第一次联考

## 文科数学试题

满分：150 分

考试时间：120 分钟

## 第 I 卷（选择题，共 60 分）

一. 选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

1. 已知集合  $A = \{x | -2 < x < 4\}$ ，集合  $B = \{x | (x - 6)(x + 1) < 0\}$ ，则  $A \cap B = ( \quad )$ 

- A.  $\{x | 1 < x < 4\}$       B.  $\{x | x < 4 \text{ 或 } x > 6\}$       C.  $\{x | -2 < x < -1\}$       D.  $\{x | -1 < x < 4\}$

2. 已知复数  $z$  在复平面内对应的点的坐标为  $(-1, 2)$ ，则  $\frac{z}{1+i} = ( \quad )$ 

- A.  $-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$       B.  $-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$       C.  $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$       D.  $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

3. 已知向量  $\vec{a} = (-m, 4)$ ， $\vec{b} = (m, 1)$ （其中  $m$  为实数），则“ $m=2$ ”是“ $\vec{a} \perp \vec{b}$ ”的  $( \quad )$ 

- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件

4. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，且  $a_4 + a_7 = a_6 + 3$ ，则  $S_9 = ( \quad )$ 

- A. 27      B.  $\frac{27}{2}$       C. 9      D. 3

5. 将函数  $f(x) = \cos 2x$  图象上所有点向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位长度后得到函数  $g(x)$  的图象，如果  $g(x)$  在区间  $[0, a]$  上单调递减，那么实数  $a$  的最大值为  $( \quad )$ 

- A.  $\frac{\pi}{8}$       B.  $\frac{\pi}{4}$       C.  $\frac{\pi}{2}$       D.  $\frac{3\pi}{4}$

6. 圆  $x^2 + y^2 + 4x - 12y + 1 = 0$  关于直线  $ax - by + 6 = 0$  ( $a > 0, b > 0$ ) 对称，则  $\frac{2}{a} + \frac{6}{b}$  的最小值是  $( \quad )$ 

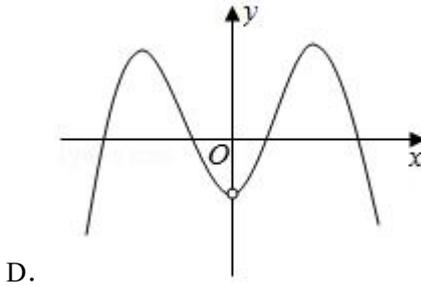
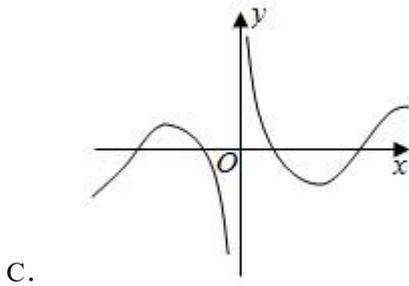
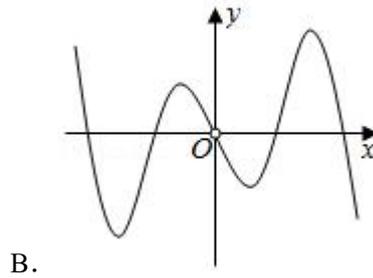
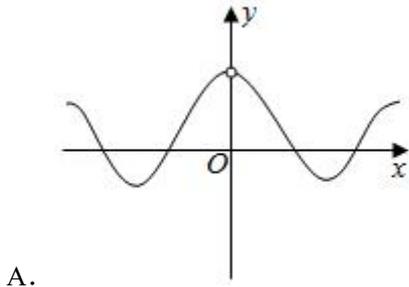
- A.  $\frac{16}{3}$       B.  $\frac{30}{3}$       C.  $\frac{32}{3}$       D.  $2\sqrt{3}$

7. 标准的围棋棋盘共 19 行 19 列，361 个格点，每个格点上可能出现“黑”“白”“空”三种情况，因此有  $3^{361}$  种不同的情况；而我国北宋学者沈括在他的著作《梦溪笔谈》中，也讨论过这个问题，他分析得出一局围棋不同的变化大约有“连书万字五十二”种，即  $10000^{52}$ ，下列数据最接近  $\frac{3^{361}}{10000^{52}}$  的

是  $(\lg 3 \approx 0.477)$   $( \quad )$ 

- A.  $10^{-38}$       B.  $10^{-36}$       C.  $10^{-34}$       D.  $10^{-32}$

8. 函数  $y = \cos x \cdot \frac{2^x + 1}{2^x - 1}$  的部分图象大致为 ( )



9. 秦九韶是我国南宋著名数学家，在他的著作《数书九章》中有已知三边求三角形面积的方法：“以小斜幂并大斜幂减中斜幂，余半之，自乘于上，以小斜幂乘大斜幂减上，余四约之，为实，一为从隅，开平方得积。”也把这种方法称为“三斜求积术”，设  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，

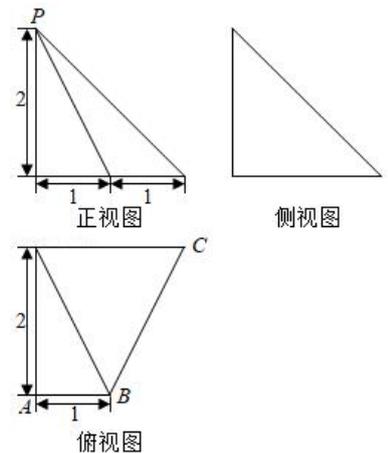
则  $S = \sqrt{\frac{1}{4} [a^2c^2 - (\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2})^2]}$ . 若  $c^2 \sin A = 4 \sin C$ ,  $B = \frac{\pi}{3}$ ，则用“三斜求积术”求得的  $\triangle ABC$

的面积为 ( )

- A.  $\sqrt{3}$                       B. 2                      C.  $2\sqrt{3}$                       D. 4

10. 一个几何体的三视图如图所示，该几何体表面上的点  $P$  在正视图上的对应点为  $P$ ，点  $A, B, C$  在俯视图上的对应点为  $A, B, C$ ，则  $PA$  与  $BC$  所成角的余弦值为 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$                       B.  $\frac{\sqrt{10}}{5}$                       C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       D.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$



11. 已知点  $P$  为抛物线  $y = \frac{1}{4}x^2$  上的动点，点  $P$  在  $x$  轴上的射影为点  $H$ ，点  $A$  的坐标为  $(12, 6)$ ，则  $|PA| + |PH|$  的最小值是 ( )

- A. 13                      B. 12                      C. 11                      D. 10

12. 棱长为 2 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中，点  $P$  是上底面  $A_1B_1C_1D_1$  内一动点，若三棱锥  $P - ABC$  的

外接球表面积恰为  $\frac{41}{4}\pi$ ，则此时点  $P$  构成的图形面积为 ( )

- A.  $\pi$                       B.  $\frac{25}{16}\pi$                       C.  $\frac{41}{16}\pi$                       D.  $2\pi$

### 第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

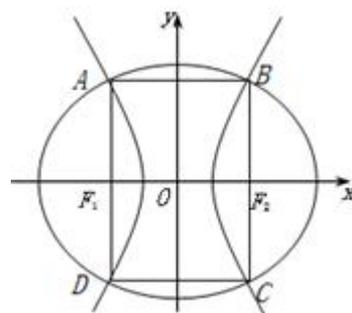
二. 填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知  $x, y$  满足不等式组  $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + y - 1 \geq 0 \\ x - 3y - 1 \leq 0 \end{cases}$ , 则  $z = x + 2y$  的最小值是\_\_\_\_\_.

14. 已知等比数列  $\{a_n\}$  的各项都为正数, 且  $a_3, \frac{1}{2}a_5, a_4$  成等差数列, 则  $\frac{a_4 + a_6}{a_3 + a_5}$  的值是\_\_\_\_\_.

15. 若函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + \ln x$  存在垂直于  $y$  轴的切线, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

16. 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$ , 中心在原点的椭圆与双曲线交于  $A, B, C, D$  四点, 且它们具有相同的焦点  $F_1, F_2$ , 点  $F_1, F_2$  分别在  $AD, BC$  上, 则椭圆与双曲线离心率之积  $e_1 \cdot e_2 =$ \_\_\_\_\_.



三. 解答题: 共 70 分, 第 17-21 题为必考题, 第 22-23 题为选考题.

(1) 必考题, 共 60 分.

17. (本题满分 12 分) 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = 2n^2 - n$ , 数列  $\{b_n\}$  满足  $4\log_2 b_n = a_n + 3$ .

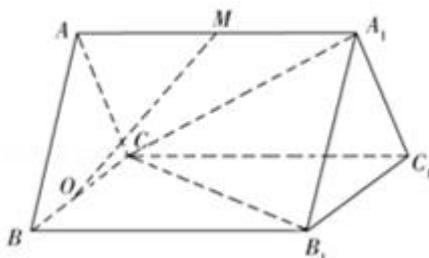
(1) 求数列  $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $c_n = b_n + \frac{4}{a_n a_{n+1}}$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

18. (本题满分 12 分) 如图, 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AB = AC = \sqrt{2}$ ,  $BC = AA_1 = 2$ ,  $O, M$  分别为  $BC, AA_1$  的中点.

(1) 求证:  $OM \parallel$  平面  $CB_1A_1$ ;

(2) 求点  $M$  到平面  $CB_1A_1$  的距离.



19. (本题满分 12 分)为响应国家“精准扶贫、精准脱贫”的号召,某贫困县在精准推进上下功夫,在精准扶贫上见实效.根据当地气候特点大力发展中医药产业,药用昆虫的使用相应愈来愈多,每年春暖以后到寒冬前,昆虫大量活动与繁殖,易于采取各种药用昆虫.已知一只药用昆虫的产卵数  $y$  (单位:个)与一定范围内的温度  $x$  (单位:  $^{\circ}\text{C}$ ) 有关,于是科研人员在 3 月份的 31 天中随机选取了 5 天进行研究,现收集了该种药物昆虫的 5 组观察数据如表:

日期	2 日	7 日	15 日	22 日	30 日
温度 $^{\circ}\text{C}$	10	11	13	12	8
产卵数 $y$ /个	22	24	29	25	16

(1) 从这 5 天中任选 2 天,记这 2 天药用昆虫的产卵数分别为  $m, n$ ,求“事件  $m, n$  均不小于 24”的概率?

(2) 科研人员确定的研究方案是:先从这 5 组数据中任选 2 组,用剩下的 3 组数据建立线性回归方程,再对被选取的 2 组数据进行检验.

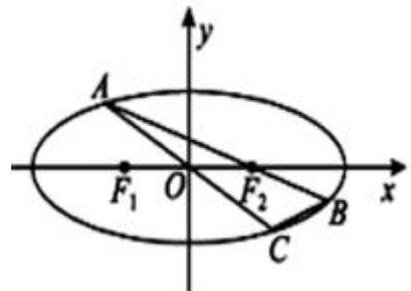
①若选取的是 3 月 2 日与 3 月 30 日这 2 组数据,请根据 3 月 7 日、15 日和 22 日这三组数据,求出  $y$  关于  $x$  的线性回归方程?

②若由线性回归方程得到的估计数据与所选出的检验数据的差的绝对值均不超过 2 个,则认为得到的线性回归方程是可靠的,试问①中所得的线性回归方程是否可靠?

附公式:  $\hat{y} = bx + a, b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$

20. (本题满分 12 分)已知椭圆  $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、

右焦点分别为  $F_1, F_2$ . 短轴的两个顶点与  $F_1, F_2$  构成面积为 2 的正方形,



(1) 求  $\Gamma$  的方程:

(2) 如图所示,过右焦点  $F_2$  的直线  $l$  交椭圆  $\Gamma$  于  $A, B$  两点,连接  $AO$  交  $\Gamma$  于点  $C$ ,求  $\triangle ABC$  面积的最大值.

21. (本题满分 12 分) 已知函数  $f(x) = ax^2 \ln x$  ( $a \neq 0$ ).

(1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;

(2) 若存在  $a \in (0, +\infty)$ , 对任意的  $x \in (0, +\infty)$ , 不等式  $f(x) \leq \frac{x^4}{2} + bx^2$  恒成立, 求实数  $b$  的取值范围.

(2) 选考题, 共 10 分. 请考生在 22, 23 题中任选一题作答. 若多做, 则按所做第一题给分.

22. (本题满分 10 分) 极坐标与参数方程

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 2 + t \cos \alpha \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$  ( $t$  为参数,  $0 < \alpha < \pi$ ), 曲线  $C_2$

的参数方程为  $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \cos \theta \\ y = -1 + \sqrt{2} \sin \theta \end{cases}$  ( $\theta$  为参数), 以坐标原点为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求曲线  $C_2$  的极坐标方程;

(2) 设曲线  $C_1$  与曲线  $C_2$  的交点分别为  $A, B, M(2, 0)$ , 求  $|MA|^2 + |MB|^2$  的最大值及此时直线  $C_1$  的倾斜角.

23. (本题满分 10 分) 不等式选讲

设函数  $f(x) = \lg(|x+1| + |x-a| - 2)$ ,  $a \in \mathbf{R}$ .

(1) 当  $a = -2$  时, 求函数  $f(x)$  的定义域;

(2) 若函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 求  $a$  的取值范围.