

论文独创性声明

本论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。论文中除了特别加以标注和致谢的地方外，不包含其他人或其它机构已经发表或撰写过的研究成果。其他同志对本研究的启发和所做的贡献均已在论文中作了明确的声明并表示了谢意。

作者签名: 蔡立群 日期: 2007.5.28

论文使用授权声明

本人完全了解复旦大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留送交论文的复印件，允许论文被查阅和借阅；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其它复制手段保存论文。保密的论文在解密后遵守此规定。

作者签名: 蔡立群 导师签名: 李平 日期: 2007.6.21

摘要

现代社会中,随着通讯手段、交通方式越来越发达,人与人之间的联系越来越紧密,关系错综复杂,各种网络结构也在社会生活中日趋增多。我们常见的基础网络支撑着我们整个经济和社会活动,为商业、科学、技术、社会系统以及教育提供了所需的各种基础设施。另外,无形的逻辑网络,如信息交流网络等,也是基础网络的重要的补充形式,使人们能够更加高效的完成更为复杂的活动或任务。网络结构无处不在,他们的作用超乎想象,离开了网络,人类将无所适从。

由于网络系统在人类生活占据着越来越重要的地位,对网络及网络均衡的研究也越来越引起学者的兴趣。在网络系统中,参与的实体数量很多,各自拥有自己的行为方式和目的,网络经过长期的运行,能否达到均衡,或达到怎样的一种均衡状态是目前研究的焦点。而建立什么样的模型来描述网络及其用户之间的关系才能更确切的体现实际背景也是研究的热点。网络均衡的建模和求解这两方面,构成了网络均衡研究领域的核心内容。

本文研究的主要是具有多类别多目标的交通网络均衡问题,结合经典均衡理论和人工智能领域的Multi-Agent技术,建立MAS (Multi-Agent-System) 仿真模型,通过系统循环运行的过程求得均衡解。文中首先概括的描述了具有无穷类出行者,每位出行者都具有多个目标的无限维网络均衡问题,并对其解的存在唯一性条件作了说明。为了符合工程计算和仿真系统的基本要求,提出了一种离散化的方法,将无限维交通网络均衡问题转化成有限维的网络均衡问题,并对收敛性和精度都进行了分析证明,从而从理论上保证了求解无限维交通网络均衡问题的近似解完全可以基于离散化后的有限维形式。在此基础上,将模型转为基于Multi-Agent技术的仿真系统,定义了出行者Agent和网络Agent的属性和方法,设计了一套有效的系统工作流程,并从理论上分析了收敛性和精度。本文最后将这种MAS仿真建模的方法扩展到更复杂的均衡模型—港口竞争策略设计问题,不仅涉及到静态均衡的求解,还扩展到两个处于竞争关系的港口带有博弈性质的策略设计,使模型的意义拓展到策略设计和均衡状态互相影响的层面。

总之,本文的主要贡献在于,建立了MAS交通均衡仿真系统,为无限维多目标的交通均衡问题提供了一种便于工程计算和操作的解决方法,也为其他更复杂的均衡问题求解提供了新的思路。

关键词: 网络均衡, 无限维, 多目标, Multi-Agent, 仿真

中图分类号: F224.33

Abstract

In modern society, various communication means and transportation methods are developing with very rapid speed, there are many more connections among people now than several years ago, lots of network frameworks show their benefits to our production and life more frequently, and they have many forms. Basic networks support our economic and society activities, and provide various infrastructures for business, science, technology, and education. Those networks which have no definite form, such as information exchange network among people, are also the supplements to basic network, and they help us accomplish more complicate activities or tasks. Network is everywhere, including transportation network, computer network, financial network, and communication network etc., and people utilize network to realize movement of goods and funds, travel of people, and many information exchange. We can say that our society will be in mess without network.

Since network systems become more and more important in human society, the network and its equilibrium arise various researches in past decades. In normal network system, millions of entities are involved in one network, and they have no common behavior and objective. Whether the reiteration of the users' choices will result in an equilibrium which means that there are no network users who can improve his/her situation through any unilateral actions, and further what the equilibrium will be if it is achievable, become attractive area of research. The modeling and solve for the equilibrium of the network systems are most import researches in this area.

In this work we consider an equilibrium problem with infinitely many differentiated customers and multi objectives. We colligate existing variational inequality problem theories and Multi-Agent technology which seems be an impressive production in the area of artificial intelligence, to establish an effective model for solving the equilibrium problem we have mentioned. This paper first provides the summarization of the equilibrium problem, also with illumination of the existence and uniqueness analysis for its solution. A discretization approach is also constructed to facilitate the engineering computation and MAS simulation system, which enables us to transfer the infinitely dimensional problem into finitely one. And we even prove the convergence and accuracy of such a method, which ensure the feasibility of the simulation system based on Multi-Agent. A simulation model of the traffic network equilibrium is proposed. The model described different behavior of various travelers as well as their decisions making. And the aggregation effect on the whole network is observed through the simulation. With the classical

theory for the equilibrium, we obtained a new solution to traffic network equilibrium problem that is more intuitionistic and efficient. At the end of this paper, the model of traffic network equilibrium is expanded to strategy designing of competitive havens, which mean more complex background for researches.

The innovative point of this thesis lies in the following aspects: (1) It introduces the model of traffic network equilibrium with infinitely many differentiated customers and multi-objectives. (2) The MAS model is expanded to strategy designing of competitive havens, which leads the new thinking to a more prospective area.

Key words: network equilibrium, infinitely dimensional, multi-objectives, Multi-Agent, simulation

CLC: F224.33

多类别多目标交通网络均衡研究

第一章 绪论

§ 1.1 问题背景

网络系统在人类社会生活中扮演着重要的角色,支撑着我们整个社会经济系统,提供了商业、科学、技术、社会系统以及教育所需的基础设施。交通网络、计算机网络、通信网络、金融网络等,是我们日常生活中常见的网络,人们通过网络实现物流运输,出行旅游,资金转移,以及各种信息的沟通交流。离开了网络,人类的生活几乎无法正常运行。交通网络为我们提供了出行的硬件支持,使我们可以去走亲访友,旅行并拓展我们的视野等,并且它支撑了生产系统的运作和原材料的运输,以及最终产品的分销派送。我们拥有各种各样的方式实现人和物的空间转移,如飞机,火车,汽车,轮船等。通讯网络使我们能够跨越国界,打破地域限制与同事、朋友,亲人交流感情,信息,数据等,通过通讯方式的一些革新,例如因特网和移动电话的发展,通讯网络甚至改变了我们今天的生活,创造了新的工作和学习的方式。能源网络对网络经济的存在至关重要,它为交通网络,通讯网络,金融网络等提供必需的动力储备。金融网络将社会中闲置的资金集中起来,为那些需要资金迅速扩张的企业,实体提供关键的资金支持,使得他们能够最好的适应客户的需求。

目前,研究比较集中和成熟的主要有交通网络、计算机网络、运输网络等。网络的基本特征是具有节点、弧、容量,节点表示网络中的中转点,弧表示节点间的联系,节点或弧可以接纳的最大量称为容量。网络的优势是能够清晰表示网络参与者之间的复杂关系,可以用互相联系的观点和方法来分析网络中单个节点和弧或者整个网络。对网络的研究可以分成以下几个方面,一是网络结构特征研究,二是网络中流量分配,三是网络设计和规划。

在典型网络中,如交通网络,网络中的客流是出行者自行决定得出的,每位出行者自行选择所行道路,既追求出行时间尽量短,又希望出行成本尽量低。因此,出行者是具有多目标的。而网络中的出行者往往不是同质的,对多个目标,不同的出行者会有不同的优先关注程度,这使得路径选择更加复杂化。

另一方面交通网络的成本结构不是固定不变的,它受到客流分配的影响。路径的出行成本是与流量密切相关的,因此出行者对路径的选择受客流分配的影响;反之,路径选择又导致路径流量的变化,从而影响路径出行成本,如此循环

反复，最后达成一种均衡状态。在其他很多网络中，其实都存在着这样的均衡，因此研究具有多目标多类别出行者的网络均衡问题将具有更大的实际意义。

从网络设计决策者的角度出发，均衡的状态未必是所期望的状态，他们需要考虑采取某种手段来控制或影响网络使用者的选择，影响网络均衡，来优化整个系统。当网络中有多个设计决策者，并且他们之间是竞争关系，那么网络的均衡状态将受到他们竞争策略设计的影响。

关注具有多类别用户的网络均衡问题，以及基于这类网络均衡的竞争策略设计问题，引发了本文的研究。

§ 1.2 相关研究综述

Nash均衡理论的提出是20世纪最重大的科学进展之一[1]，它对经济学和社会科学的影响巨大。

近年来，均衡理论被用来分析很多管理科学问题，特别是供应链管理问题，交通网络问题。均衡理论解的存在性、理论和算法的研究，已引起国内外众多学者的极大兴趣，并得到了很多结果。研究结果大部分是关于存在性[2,3]和应用。

经典的交通网络均衡问题，是指交通网络中的所有出行者都寻求从出发点到目的地的成本最低的出行路线。这个问题最早是由Pigou在1920提出来的，并且基于网络中只有两个顶点和两条路线的假设。

Wardrop在1952年提出了定义交通均衡的两个原则：

(1) 从一个起点到一个终点，所有用到的路线上的旅行时间是相同的，并且不超过未被用到的那些路线上的旅行时间。

(2) 整个交通网络系统中，平均的旅行时间达到最小。

1956年Beckmann等人提出的在成本函数可分离情况下的网络均衡最优化方法，进一步促使了网络均衡理论有了飞跃性的发展，使其在实际问题中的应用得到了长足的进步。Beckmann等人还实现了通过一个优化问题和KT条件来求均衡解。但是，用优化问题来求解均衡解是基于成本函数可分离的假设的，而对一般的非对称交通网络，这样的方法并不有效。在过去的几十年中，交通网络均衡问题无论在模型还是算法方面都经历了快速的发展。1980年Dafermos成功实现了用变分不等式求解一般的非对称交通网络均衡问题，包括有多个起点和多个终点的情况，以及有多类别出行者的情况，这是最引人注目的成果和进步。

1966年，学者Philip Hartman和Guido Stampacchia几乎同时提出了变分不等式的概念，并由Stampacchia对此类问题进行了推广。变分不等式问题描述为：在可行集合 C 中，寻找向量 x^* ，使得对于任何的 $x \in C$ ，向量 x^* 满足不等式 $\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0$ 。A. Nagurney[4]和Patrick T. Harker, Jong-Shi Pang[5]系统地回顾

和总结了传统单调条件下的变分不等式问题的理论、算法和应用，为我们的学习提供了方便有效的参考。

变分不等式虽然为一般交通均衡问题的求解提供了有效的求解途径，但是变分不等式本身的算法都是基于一些连续的运算，如积分等，并且为了确保算法的收敛性，还会受到用很多条件的约束。因此，变分不等式虽然使得交通均衡问题在理论意义上得到了很好的解决方式，但是在实际离散化的工程计算和应用中，还是具有很大的局限性。

1994年，D.L. Zhu和P. Marcotte[6]提出了一种具有无限类出行者，且每位出行者具有多目标的扩展的交通网络均衡问题，并对均衡解存在性进行了分析证明，最后提出了基于变分不等式的有效算法。D.L. Zhu和P. Marcotte在1997年又提出了一种更有效的算法[7]。这两种算法从理论上提供了解决具有无限类、多目标出行者的交通网络均衡问题的方法，但是仍然没有避免连续性算法的局限性，工程应用的可操作性不强。

本文将更多的从应用角度出发，并考虑具有多类别、多目标出行者的情况，希望基于离散化方法，并借助人工智能领域的技术，得到有效的模型及解法。

§ 1.3 人工智能前沿—智能主体 (Agent)

伴随着人工智能的高速发展，智能主体作为人工智能发展的前沿技术引起了人们的广泛注意。Agent理论是一个计算机科学和人工智能中发展很快的前沿领域，目前，Agent已经成为许多领域中通用的概念[8,9]，它代表着一种新的研究方法的诞生，并推动着人工智能走出低谷从而获得新的生机。在国内，Agent有多种译法，如：“主体”、“智能主体”、“智能代理”等等。但大多还是直接以Agent出现。Agent理论研究十分重视跨学科之间的交叉和横向联系，因此具有很大的难度与挑战性。它所涉及的知识面更是极为广泛，包括计算机科学、人工智能乃至哲学、经济学、社会学、系统论、博弈论等各学科领域。更重要的是，Agent理论在人工智能的发展史上首次深入的将人类智能活动的社会性作为研究和应用领域。它使原本基于物质和硬件的人工智能具有了丰富而深刻的社会内涵，能表现出人类智能中来源于社会行为的复杂性和多样性，并突破了传统人工智能研究一般仅集中于个体智能而回避由个体之间的社会互动性而产生集体效应的局限性。同时它无论从概念还是方法上都有着一系列本质的创新，使我们能从一个全新的视角，来看待和研究经典的问题，最终促使我们对人工智能的研究达到一个更为深刻的洞察与把握。

§ 1.4 本文研究的问题

在具有多目标多类别出行者的交通网络均衡问题中,根据出行者某一主要特性的区别,将其描述为用一个连续概率分布表示的差异化群体,我们定义这样的网络为无限维交通网络。本文主要针对这一类无限维的交通网络均衡问题,结合经典的变分不等式理论和人工智能领域正在迅速发展中的Agent理论展开研究。最后还将模型拓展到港口竞争策略设计这一更复杂的背景。

第二章:无限维交通网络均衡问题的离散化。这一章首先描述了无限维的交通网络均衡问题的基本构架和形式,提出了存在唯一均衡解的条件,并从经典理论的角度进行了分析和阐述。在这基础上,为了保证工程计算和基于Agent理论的仿真系统的可行性,我们对这个连续形式的无限维网络均衡问题进行了离散化,并证明了在某些条件的约束下,离散化后的有限维交通网络均衡问题的解存在且唯一,且当分割细度足够小的情况下,离散化问题的均衡解通过一定的变换将逼近无限维问题的均衡解。离散化的工作为下面基于Multi-Agent的仿真系统来求解近似均衡解奠定了基础。

第三章:Agent技术的发展及应用介绍。介绍了Agent的概念特征、模型结构等。同时又引入了系统仿真方面的基本原理,和基于Multi-Agent-System (MAS)的系统仿真建模。介绍了广泛应用于面向对象技术中的统一建模语言UML,并推广到适用于面向Agent系统的AUML扩展性建模语言,为第四章中MAS建模和仿真系统的运行提供了技术支持。

第四章:基于Agent理论的网络均衡模型。在这一章,我们在第二章得到的离散化形式的基础上,建立了Multi-Agent仿真系统,将交通网络中不同类别的出行者和网络本身都作为Agent参与到模拟循环过程中,最终通过一定的学习法则、判断法则使系统在达到近似均衡状态时停止,从而求得了近似均衡解。同时,还对这种系统的工作过程的可行性进行了分析,证明了在一定的条件下,通过这样的循环和学习过程,系统必能在有限时间内达到可接受范围的近似均衡状态,即收敛性得到了保证。最后,还将模型拓展到港口竞争策略设计问题,建立了更复杂、更具应用背景的MAS模型,从而将Agent理论的应用推广到了更广阔的层面。

第五章:总结与展望。总结全文的观点,并对应用Multi-Agent技术解决均衡问题的下一步研究方向进行展望。

第二章 无限维网络均衡问题及离散化

§ 2.1 问题描述

我们假设在一个由顶点和边组成的交通网络系统中,出行者是具有多类别和多目标的。所谓多目标,是指出行者既追求出行时间尽量短,又希望出行成本尽量低。因此,将这两个目标结合起来,所有出行者都根据自身的特征,追求效用的最大化。这里“效用”是一个广义“成本”的概念,指的是出行时间和道路收费的加权总和,即将旅行时间乘以一个VOT (Value Of Time) 参数后再与道路收费相加得到的指标量。这里出行者是具有多类别的,每个出行者的VOT参数并不是固定的,而与出行者本身的特征有关,并假设出行者的数量在整个系统中关于VOT参数值服从一定的连续的概率分布。出行者选择任何路线的成本将视为经过该路线所包含的所有道路的成本累加。

我们假设:

(1) 出行者经过任意一条边 a 的时间花费函数 $F_a(X)$ 是关于 X 连续单调的。

(2) VOT参数的概率密度函数 $\psi(\alpha)$ 是连续的。

本文以后的讨论,都将基于以上假设,后面不再重述。

为了更清楚的描述模型,将所用的标志符号列于下表:

$G=(N,A)$ 网络系统

N 顶点集(包括出发点,目的点,中间连接点)

K 网络中所有连接出发点和目的点的路线集合

b 需要通过出发点和目的点的总出行者流量

α 出行者的VOT参数,满足 $\alpha \in [0, \alpha_{\max}]$

$\psi(\alpha)$ VOT参数的概率密度函数

$x_a(\alpha)$ 边 a 上(关于参数 α)的流量密度

$x(\alpha)$ 以向量形式表示的网络中各边上的流量密度

X_a 边 a 上的总流量: $X_a = \int_0^{\alpha_{\max}} x_a(\alpha) d\alpha$

X 以向量形式表示的网络中各边上的总流量

$h_k(\alpha)$ 路线 $k \in K$ 上(关于参数 α)的流量密度

$h(\alpha)$ 以向量形式表示的网络中各路线上的流量密度

H_k 路线 $k \in K$ 上(关于参数 α)的总流量: $H_k = \int_0^{\alpha_{\max}} h_k(\alpha) d\alpha$

H 以向量形式表示的网络中各路线上的总流量

$F_a(X)$ 出行者经过边 a 的时间花费函数

$F(X)$ 向量形式的各边的时间花费函数

T_a 边 a 的道路收费

T 各边的道路收费组成的向量

为了确保模型的合理性, 必须使流量守恒且非负, 加入以下约束条件:

$$\sum_{p \in K} h_p(\alpha) = b\psi(\alpha) \quad \forall \alpha$$

$$h_p(\alpha) \geq 0 \quad \forall k \in K, \forall \alpha$$

边流量与路线流量之间应有如下对应关系:

$$x_a(\alpha) = \sum_{p \in K} \delta_{ap} h_p(\alpha) \quad \forall a \in A, \forall \alpha$$

其中

$$\delta_{ap} = \begin{cases} 1 & \text{边 } a \text{ 属于路线 } p \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

可以将 $\delta_{ap}, \forall a \in A, \forall p \in K$ 组成一个系数矩阵, 则边与路线的对应关系可写为矩阵形式:

$$x(\alpha) = \Delta h(\alpha) \text{ 和 } X = \Delta H$$

$$h(\alpha) = \Delta^T x(\alpha) \text{ 和 } H = \Delta^T X$$

于是有

$$\Omega(\alpha) = \{h(\alpha) \geq 0: \sum_{p \in K} h_p(\alpha) = b\psi(\alpha)\}$$

$$Z(\alpha) = \Delta \Omega(\alpha) = \{x(\alpha): \exists h(\alpha) \in \Omega(\alpha): x(\alpha) = \Delta h(\alpha)\}$$

其中 $\psi(\alpha)$ 是处处非负的概率密度函数, 且符合紧约束:

$$\psi(\alpha) > 0 \quad a.e.$$

$$\int_0^{\alpha_{\max}} \psi(\alpha) d\alpha = 1$$

边形式网络均衡问题就是找均衡流量 x^* 满足变分不等式:

$$\begin{aligned} x^* &\in Z \\ \langle F(X^*) + \alpha T, x - x^* \rangle &\geq 0 \quad \forall x \in Z \end{aligned} \quad (2-1)$$

其中, Z 是 $\{L^2(0, \alpha_{\max})\}^{|A|}$ 的子集, 且

$$Z = \{x \in [L^2(0, \alpha_{\max})]^{|K|} : x(\alpha) \in Z(\alpha), \forall \alpha\}$$

$$\langle u, v \rangle = \int_0^{\alpha_{\max}} \langle u(\alpha), v(\alpha) \rangle d\alpha.$$

路径形式网络均衡问题就是找均衡流量 h^* 满足变分不等式:

$$h^* \in \Omega \quad (2-2)$$

$$\langle \Delta^T (F(\Delta h^*) + \alpha T), y - h^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in \Omega$$

其中 Ω 是 $[L^2(0, \alpha_{\max})]^{|K|}$ 的子集, 令 $n = |K|$, $A = (1, 1, \dots, 1)_n$,

$$\Omega = \{h \in [L^2(0, \alpha_{\max})]^n : Ah(\alpha) = b\psi(\alpha), h(\alpha) \geq 0 \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_{\max}]\},$$

它的含义是, 对任意的VOT参数值, 它所对应的那些出行者分布在各条路径上的流量之和应该等于他们的总数。这是符合网络流的基本原则的。

根据均衡的定义, 所有出行者根据成本向量 $F(X^*) + \alpha T$ 和自己的VOT参数值选择了成本最小的路线, 这时系统状态一定构成了网络均衡状态 X^* 。

§ 2.2 解的存在唯一性分析

在这一节中, 我们将围绕上文介绍问题的解的存在性和唯一性作一些讨论, 存在性是讨论一切其他问题的前提, 解的唯一性也将使很多讨论大大简化。由 § 2.1 的定义, 边形式和路径形式网络均衡只是从不同角度来描述均衡状态, 在本质上是一致的, 因此在本文中, 我们仅对路径形式的网络均衡问题作研究。

我们首先引入这样一个无穷维线性规划问题:

$$LP: \quad \min_{y \in \Omega} \langle \Delta^T (F(\Delta \bar{H}) + \alpha T), y \rangle \quad (2-3)$$

$$\Omega = \{y \in [L^2(0, \alpha_{\max})]^n : Ay(\alpha) = b\psi(\alpha), y(\alpha) \geq 0 \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_{\max})\}$$

其中 $\bar{H}$ 为固定向量。这个线性规划对分析变分不等式(2-2)有着重要的作用。目标函数代表了在假定网络成本函数固定(与流量分配无关)的情况下, 所有网络出行者成本的累加, 也就是说, 当所有出行者都选择了对自己成本最低的路径, 则目标函数也一定是达到了最小。

我们定义

$$\hat{\Omega} = \{Y \in R^n : AY = b, Y \geq 0\}$$

$\hat{\Omega}$ 是一个线性空间, 则可以进一步的将(2-3)拆分成无穷个线性规划问题:

$$\forall \alpha \in (0, \alpha_{\max})$$

$$LP(\alpha): \min_{Y \in \hat{\Omega}} \langle \Delta^T (F(\Delta \bar{H}) + \alpha T), Y \rangle \quad (2-4)$$

$$\hat{\Omega} = \{Y \in R^n : AY = b, Y \geq 0\}$$

显然对于任意固定的 α 值， $LP(\alpha)$ 是一个普通的线性规划问题。根据(2-2)中 A 的定义， $\hat{\Omega}$ 是个紧凸集， $LP(\alpha)$ 的最优解是存在的，且必定是 $\hat{\Omega}$ 的某个（可能是多个）极点，使得目标函数最小。从直观意义上来说，即VOT参数为 α 的出行者选择了成本最低的路线，当(2-4)有多个最优解时，代表出行者有多条路线选择使成本最低。

为了进一步研究(2-3)和(2-2)，我们引入以下定义和条件。

令 $Y^i, i = 1, \dots, N$ 为 $\hat{\Omega}$ 的 N 个极点，并且

$$F^i(\bar{H}) = \langle \Delta^T F(\Delta \bar{H}), Y^i \rangle_2$$

$$T^i = \langle \Delta^T T, Y^i \rangle_2 \quad i = 1, \dots, N$$

定义 2.1 凸集 $\hat{\Omega}$ 的极点 Y^i 在 $\bar{H}$ 处是受控的，假如它满足

$$F^i(\bar{H}) + \alpha T^i > \min_{j=1, \dots, N} \{F^j(\bar{H}) + \alpha T^j\}, \forall \alpha \in [0, \alpha_{\max}]$$

如果不满足这个关系，则称 Y^i 在 $\bar{H}$ 处是非受控的。

前面已假设了 F 函数的连续性，因此根据定义 2.1 可以推出：如果极点 Y^i 在 $\bar{H}$ 处是受控的，则它必然在 $\bar{H}$ 的某个邻域内是受控的。

不失一般性，假设前 $N(\bar{H})$ 个极点在 $\bar{H}$ 处是非受控的，并按照它们对应的 T^i 值作降序排列

$$T^1 \geq T^2 \geq \dots \geq T^{N(\bar{H})}$$

接下来，我们将引入一个关于各极点 Y^i 的非退化的假设。

条件 A：对紧凸集 $\hat{\Omega}$ 的任意两个不同的极点 Y^i 和 Y^j ，对应 $T^i \neq T^j$ 。

于是，在条件 A 成立的情况下，有

$$T^1 > T^2 > \dots > T^{N(\bar{H})}$$

我们已假设 $N(\bar{H})$ 个极点都是非受控的，则有

$$F^1(\bar{H}) < F^2(\bar{H}) < \dots < F^{N(\bar{H})}(\bar{H})$$

因此，只要满足条件 A，就可以得到一系列分割点

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{N(\bar{H})} = \alpha_{\max}$$

其中

$$\alpha_i(\bar{H}) = -(F^{i+1}(\bar{H}) - F^i(\bar{H})) / (T^{i+1} - T^i), \quad i = 1, \dots, N(\bar{H}) - 1$$

那么, 对 $\forall \alpha \in (0, \alpha_{\max})$, $LP(\alpha)$ 问题都有如下最优解:

$$Y(\bar{H}) \in R^n$$

$$Y(\bar{H}) = \begin{cases} Y^1 & \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1 \\ Y^2 & \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 \\ \dots & \dots \\ Y^{i_{N(\bar{H})}} & \alpha_{N(\bar{H})-1} \leq \alpha \leq \alpha_{N(\bar{H})} \end{cases}$$

(2-3)即(2-4)按照概率密度函数 $\psi(\alpha)$ 的叠加, 因此容易得到(2-3)的解:

$$y(\bar{H}) \in \{L^2(0, \alpha_{\max})\}^n:$$

$$y(\bar{H}, \alpha) = \begin{cases} Y^1 \psi(\alpha) & \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1 \\ Y^2 \psi(\alpha) & \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 \\ \dots & \dots \\ Y^{i_{N(\bar{H})}} \psi(\alpha) & \alpha_{N(\bar{H})-1} \leq \alpha \leq \alpha_{N(\bar{H})} \end{cases}$$

于是, 在条件 A 成立的前提下, 我们可以得到无限维线性规划(2-3)的唯一解析解。

无限维线性规划(2-3)只是无限维变分不等式(2-2)的一种特殊形式, 文献[7]为我们证明了, 只要时间花费函数 $F(X)$ 单调连续, 在条件 A 成立的前提下, 无限维均衡问题(2-2)的解存在且唯一。这为本章下面的证明和论述提供了理论基础。

下面, 我们还要证明在一定的条件下, 如果把 $y(\bar{h})$ 视为(2-3)的解关于 $\bar{h} \in \{L^2(0, \alpha_{\max})\}^n$ 的函数, 则 $y(\bar{h})$ 在 $\hat{\Omega}$ 上是李普希斯连续的。这将在下面的研究讨论有重要的作用。

引理 2.1 假设 $F(\bar{H})$ 在 $\hat{\Omega}$ 上李普希斯连续, $\psi(\alpha)$ 在区间 $[0, \alpha_{\max}]$ 有界, 并且条件 A 成立, 则 $y(\bar{h})$ 在 Ω 上是李普希斯连续的。

证明: 假设 $\bar{h}'$ 为充分接近 $\bar{h}$ 的路径流量密度向量, $\bar{H} = \int_0^{\alpha_{\max}} \bar{h} d\alpha$ 和 $\bar{H}' = \int_0^{\alpha_{\max}} \bar{h}' d\alpha$ 分别为 $\bar{h}$ 和 $\bar{h}'$ 对应的路径总流量向量, 因此 $\bar{H}'$ 也是充分接近 $\bar{H}$ 的。根据前文的定义, 有

$$T^1 > T^2 > \dots > T^{N(\bar{H})}$$

$$F^1(\bar{H}') < F^2(\bar{H}') < \dots < F^{N(\bar{H})}(\bar{H}')$$

$$0 = \alpha_0(\bar{H}') < \alpha_1(\bar{H}') < \dots < \alpha_{N(\bar{H})}(\bar{H}') = \alpha_{\max}$$

我们已经求得了 LP 的最优解的形式，它是以非受控极点为分割点的分段函数，因此

$$\begin{aligned} \|y(\bar{H}', \alpha) - y(\bar{H}, \alpha)\|^2 &= \int_0^{\alpha_{\max}} \|y(\bar{H}', \alpha) - y(\bar{H}, \alpha)\|_2^2 d\alpha \\ &= \int_0^{\alpha_{\max}} \|Y(\bar{H}', \alpha) - Y(\bar{H}, \alpha)\|_2^2 \psi^2(\alpha) d\alpha \\ &\leq \hat{D}^2 \psi_{\max}^2 \max_{i \in \{1, N(\bar{H})\}} |\alpha_i(\bar{H}') - \alpha_i(\bar{H})| \end{aligned}$$

其中， $\hat{D}$ 为紧凸集 $\hat{\Omega}$ 的直径， $\psi_{\max}^2 = \max\{\psi(\alpha) : \alpha \in (0, \alpha_{\max})\}$ 。

由分割点的定义：

$$\alpha_i(\bar{H}) = -(F^{i+1}(\bar{H}) - F^i(\bar{H})) / (T^{i+1} - T^i), \quad i = 1, \dots, N(\bar{H}) - 1$$

并且 $F(\bar{H})$ 在 $\hat{\Omega}$ 上李普希斯连续，所以，必然存在李普希斯常数 $L_{\bar{H}}$ ， $y(\bar{H})$ 在 $\hat{\Omega}$ 上关于 $L_{\bar{H}}$ 李普希斯连续，即

$$\|y(\bar{H}', \alpha) - y(\bar{H}, \alpha)\|^2 \leq L_{\bar{H}}^2 \|\bar{H}' - \bar{H}\|_2^2$$

下面，我们来看 $y(\bar{h})$ ：

$$\begin{aligned} \|y(\bar{h}') - y(\bar{h})\|^2 &= \|y(\bar{H}') - y(\bar{H})\|^2 \\ &\leq L_{\bar{H}}^2 \|\bar{H}' - \bar{H}\|_2^2 \\ &= L_{\bar{H}}^2 \left\| \int_0^{\alpha_{\max}} (\bar{h}(\alpha) - \bar{h}(\alpha)) d\alpha \right\|^2 \\ &\leq 2L_{\bar{H}}^2 \int_0^{\alpha_{\max}} (\bar{h}(\alpha) - \bar{h}(\alpha))^2 d\alpha \\ &= 2L_{\bar{H}}^2 \|\bar{h} - \bar{h}'\|^2 \end{aligned}$$

于是，得到 $y(\bar{h})$ 作为关于 $\bar{h} \in \{L^2(0, \alpha_{\max})\}^n$ 的函数，是关于 $\sqrt{2}L_{\bar{H}}$ 李普希斯连续的。

§ 2.3 离散化的方法

根据问题的定义，所有出行者的 VOT 参数值在整个系统中服从连续的概率密度函数 $\psi(\alpha)$ ，因此要得到网络均衡解，必须求解无限维连续的变分不等式 (2-2)，但是在实际应用，特别是在工程计算中，往往只有离散的，有限维的数值计算才能被计算机所支持，因此我们所提出的这个问题必须被离散化为有限维

的形式才能在更广泛的领域中应用，体现更好的实际价值。

在这一节中，我们将提出一个可用的离散化方法，并在下文中对它的收敛性和算法精度作详细的分析。

我们还是先从 § 2.2 中引入的无限维线性规划问题(2-3)入手：

$$LP \quad \min_{y \in \Omega} \langle \Delta^T (F(\Delta \bar{H}) + \alpha T), y \rangle$$

$$\Omega = \left\{ y \in \left\{ L^2(0, \alpha_{\max}) \right\}^n : Ay(\alpha) = b\psi(\alpha), y(\alpha) \geq 0 \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_{\max}] \right\}$$

考虑将上述 LP 问题离散化为有限维的线性规划问题。我们用一个离散的概率密度函数来逼近 LP 规划中连续的概率密度函数 $\psi(\alpha)$ 。

针对连续概率密度函数 $\psi(\alpha), \alpha \in [0, \alpha_{\max}]$ ，我们构造这样一个离散化规则：

$D(B^{(n)}, \Gamma^{(n)}, P^{(n)})$ ，其中 $B^{(n)} = \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n\}$ 是区间 $[0, \alpha_{\max}]$ 的一组分割点，且有

$$0 = \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n = \alpha_{\max}$$

$$\Gamma^{(n)} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}, \quad \gamma_j \in [\beta_{j-1}, \beta_j], j \in \langle 1, n \rangle$$

$P^{(n)} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 是用来逼近 $\psi(\alpha)$ 的离散的概率密度，满足

$$P(\gamma_j) = p_j, j \in \langle 1, n \rangle \text{ 和 } \sum_{j=1}^n p_j = 1$$

记

$$d_{1n} = \max_{j \in \langle 1, n \rangle} \{\beta_j - \beta_{j-1}\} \quad (2-5)$$

$$d_{2n} = \sum_{j=1}^n |p_j - \int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} \psi(\alpha) d\alpha| \quad (2-6)$$

并令 $d_n = \max\{d_{1n}, d_{2n}\}$ ，我们将它作为度量用上述离散概率密度 $P^{(n)}$ 来逼近连续

概率密度函数 $\psi(\alpha)$ 的误差。显然，我们所需要的 $P^{(n)}$ 必须是一致逼近 $\psi(\alpha)$ 的，

所以必然有

$$d_n \rightarrow 0, \quad \text{当 } n \rightarrow \infty$$

考虑这样一个有限维的线性规划 $LP^{(n)}$ ：

$$LP^{(n)} \quad \min_{y_i \in \Omega_i} \sum_{j=1}^n \langle \Delta^T (F(\Delta \bar{H}) + \gamma_j T), y_j \rangle \quad (2-7)$$

$$\Omega_i = \left\{ y_i \in R^n : Ay_i = bp_i, y_i \geq 0 \right\} \quad i = 1, \dots, n$$

我们可以认为(2-7)是(2-3)基于 $D(B^{(n)}, \Gamma^{(n)}, P^{(n)})$ 的离散化形式， y_i 代表了 VOT 参

数 α 落在区间 $[\beta_{i-1}, \beta_i]$ 中的出行者在各路径上的加总流量。那么是否当 $d_n \rightarrow 0$ 时, (2-7) 的解也会逼近 (2-3) 的解呢? 下面就来讨论这个问题。

前面我们已经得到了 (2-3) 的解, 基于同样的假设和方法, 我们很容易得到 (2-7) 的解, 我们把它表示成关于路径流量 $\bar{H}$ 的函数:

$$y^*(\bar{H}) = (y_i^*(\bar{H}))_{i \in \langle 1, n \rangle}$$

$$y_i^*(\bar{H}, \gamma_i) = \begin{cases} Y^{i_1} p_i & \alpha_0 \leq \gamma_i \leq \alpha_1 \\ Y^{i_2} p_i & \alpha_1 \leq \gamma_i \leq \alpha_2 \\ \dots & \dots \\ Y^{i_{N(\bar{H})}} p_i & \alpha_{N(\bar{H})-1} \leq \gamma_i \leq \alpha_{N(\bar{H})} \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, n$$

可以发现 (2-7) 的解 $y^*(\bar{H})$ 是有限维的, 不可能直接去逼近无限维线性规划问题 (2-3) 的解。不过, 我们可以基于 $y^*(\bar{H})$ 来构造一个无限维的向量, 我们同样表示为关于 $\bar{H}$ 的函数:

$$\tilde{y}^*(\bar{H}, \alpha) = y_i^*(\bar{H}) / (\beta_i - \beta_{i-1}), \quad i = \{i \in \langle 1, n \rangle | \alpha \in [\beta_{i-1}, \beta_i]\}$$

即近似的认为 VOT 参数值处于同一区间 $[\beta_{i-1}, \beta_i]$ 的所有出行者数量是分布均匀的, 且都选择同样的路径。下面我们将证明 $\tilde{y}^*(\bar{H})$ 在 $n \rightarrow \infty$ 时逼近 (2-3) 的解 $y(\bar{H})$ 。

要证明 $\tilde{y}^*(\bar{H})$ 在 $n \rightarrow \infty$ 时逼近 $y(\bar{H})$, 必然考虑逼近误差 $\|y(\bar{H}) - \tilde{y}^*(\bar{H})\|$ 。

定理 2.1 对任意给定的 $\bar{H} \in \hat{\Omega}$ 和满足逼近概率密度函数 $\psi(\alpha), \alpha \in (0, \alpha_{\max})$ 条件的离散化规则 $D(B^{(n)}, \Gamma^{(n)}, P^{(n)})$, 都有

$$\|y(\bar{H}) - \tilde{y}^*(\bar{H})\| = O(d_n), \quad \text{当 } d_n \rightarrow 0$$

证明: 将分割点 $\alpha_1, \dots, \alpha_{N(\bar{H})-1}$ 和 $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ 合并作为新的分割点集合, 则 $(0, \alpha_{\max})$ 被分割为 $n + N(\bar{H}) - 1$ 个小区间。我们将所有包含 $\alpha_i, i = 1, \dots, N(\bar{H}) - 1$ 的小区间组成的集合记为 $\{I_1\}$, 其余的记为 $\{I_2\}$, 则 $\{I_1\}$ 中最多有 $2(N(\bar{H}) - 1)$ 个元素。根据 $y(\bar{H})$ 和 $\tilde{y}^*(\bar{H})$ 的结构, 我们知道只有 $\{I_1\}$ 中的区间上, $y(\bar{H})$ 和 $\tilde{y}^*(\bar{H})$ 才可能会取不同的极点, 并且 $y(\bar{H})$ 和 $\tilde{y}^*(\bar{H})$ 都是有界的, 因此, 存在某一大于 0 的常数 L_1 , 使得

$$\begin{aligned} \int_{\{I_1\}} \|y(\bar{H}, \alpha) - \tilde{y}^n(\bar{H}, \alpha)\| d\alpha &\leq 2(N(\bar{H}) - 1)L_1 \max_{j \in \langle 1, n \rangle} \{\beta_j - \beta_{j-1}\} \\ &= 2(N(\bar{H}) - 1)L_1 d_{1n} = O(d_{1n}) \quad \text{当 } d_{1n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

而在 $\{I_2\}$ 中的区间上, $y(\bar{H})$ 和 $\tilde{y}^n(\bar{H})$ 取相同的极点, 由前面定义的(2-6), 可以计算 $\{I_2\}$ 上的累积误差, 即存在某一大于 0 的常数 L_2 , 使得

$$\int_{\{I_2\}} \|y(\bar{H}, \alpha) - \tilde{y}^n(\bar{H}, \alpha)\| d\alpha \leq L_2 \sum_{j=1}^n |p_j - \int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} \psi(\alpha) d\alpha| = L_2 d_{2n} = O(d_{2n}) \quad \text{当 } d_{2n} \rightarrow 0$$

最后, 得到 $\tilde{y}^n(\bar{H})$ 与 $y(\bar{H})$ 之间的逼近误差为

$$\begin{aligned} \int_0^{\rho_{\max}} \|y(\bar{H}) - \tilde{y}^n(\bar{H})\| d\alpha &= \int_{\{I_1\}} \|y(\bar{H}, \alpha) - \tilde{y}^n(\bar{H}, \alpha)\| d\alpha + \int_{\{I_2\}} \|y(\bar{H}, \alpha) - \tilde{y}^n(\bar{H}, \alpha)\| d\alpha \\ &\leq L d_n = O(d_n) \quad \text{当 } d_n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

其中 L 为某一大于 0 的常数。

这样就证明了 $\tilde{y}^n(\bar{H})$ 在 $n \rightarrow \infty$ 时逼近 $y(\bar{H})$ 。

上面这些讨论都是在围绕着(2-3)这个无限维线性规划和它的离散化形式展开的, 而我们最终要讨论的是逼近无限维变分不等式(2-2)的离散化形式, 以及它的收敛性。

回顾 § 2.1 中提出的(2-2)的形式:

$$\begin{aligned} h^* &\in \Omega \\ \langle \Delta^T(F(\Delta h^*) + \alpha T), h - h^* \rangle &\geq 0 \quad \forall h \in \Omega \\ \Omega &= \left\{ h \in \left[L^2(0, \alpha_{\max}) \right]^n : Ah(\alpha) = b\psi(\alpha), h(\alpha) \geq 0 \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_{\max}] \right\} \end{aligned}$$

我们仍然采用离散化规则 $D(B^{(n)}, \Gamma^{(n)}, P^{(n)})$ 对 $\psi(\alpha)$ 进行离散化, 可以得到以下有限维变分不等式作为(2-2)的离散化形式:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left\langle \Delta^T \left(F \left(\sum_{i=1}^n \Delta h_i^* \right) + \gamma_j T \right), h_j - h_j^* \right\rangle &\geq 0 \quad \forall h_j \in \Omega_j \\ \Omega_j &= \{ h_j : Ah_j = bp_j, h_j \geq 0 \} \quad j \in \langle 1, n \rangle \end{aligned} \quad (2-8)$$

其中, $h = (h_j)_{j \in \langle 1, n \rangle}$ $h^* = (h_j^*)_{j \in \langle 1, n \rangle}$

进一步, 记

$$J(h^n) = \left(\Delta^T \left(F \left(\sum_{i=1}^n \Delta h_i^n \right) + \gamma_j T \right) \right)_{j \in \langle 1, n \rangle}$$

则(2-8)可以被写成一个更规范的形式:

$$\langle J(h^n), h - h^n \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \Omega^n \quad (2-9)$$

$$\Omega^n = \left\{ h = (h_j)_{j \in \langle 1, n \rangle} \mid h_j : Ah_j = bp_j, h_j \geq 0 \right\}$$

在进行其他讨论以前,我们先来证明(2-9)的解的存在性。首先引入证明存在性需要的一个定义。

定义 2.2 假设 Ω 是自反的 Branch 空间 V 的一个子集, V^* 是它的对偶空间, J 是从 Ω 到 V^* 的映射。 J 被称为 Lions 定义下的伪单调 (本文中涉及的伪单调均为 Lions 定义下的伪单调, 后面不再说明[10]), 假如 J 在 Ω 上有界, 并且对 Ω 的所有弱收敛于 Ω 中某点 x 的序列 $\{x^k\}$, 只要满足

$$\limsup_k \langle J(x^k), x^k - x \rangle \leq 0$$

便有

$$\liminf_k \langle J(x^k), x^k - y \rangle \geq \langle J(x), x - y \rangle \quad \forall y \in \Omega$$

在[10]中已经证明了如果 J 在一个非空、有界的闭凸集 Ω 上是伪单调的, 则至少存在一个点 x^* 满足以下变分不等式:

$$\langle J(x^*), x^* - x \rangle \leq 0 \quad \forall x \in \Omega$$

为了证明(2-9)的解集是非空的, 我们将证明(2-9)中的集合 Ω^n 和函数 J 满足上述条件。

定理 2.2 假设 F 为连续函数, Ω^n 为紧集, 则变分不等式(2-9)的解集非空。

证明: 我们逐条来验证 Lions 存在性定理的条件是否满足:

(I) Ω^n 是非空、有界的闭凸集: 从(2-9)以及我们所研究的问题的结构, 很容易得到 Ω^n 是非空、有界的闭凸集。

(II) J 在 Ω^n 上弱连续: 令 $\{h^{(k)}\}$ 为 Ω^n 中的一个数列, 弱收敛到 Ω^n 中的某个点 h , 则有

$$\begin{aligned} \|J(h^{(k)}) - J(h)\| &= \left\| \left(\Delta^T \left(F \left(\sum_{i=1}^n \Delta h_i^{(k)} \right) + \gamma_j T \right) \right)_{j \in \langle 1, n \rangle} - \left(\Delta^T \left(F \left(\sum_{i=1}^n \Delta h_i \right) + \gamma_j T \right) \right)_{j \in \langle 1, n \rangle} \right\| \\ &= \left\| \left(\Delta^T \left(F \left(\sum_{i=1}^n \Delta h_i^{(k)} \right) - F \left(\sum_{i=1}^n \Delta h_i \right) \right) \right)_{j \in \langle 1, n \rangle} \right\| \end{aligned}$$

$\{h^{(k)}\}$ 为弱收敛到 h 的数列, 矩阵 Δ 的每个元素都是有限的, 这意味着向量

$$\sum_{i=1}^n \Delta h_i^{(k)} - \sum_{i=1}^n \Delta h_i = \sum_{i=1}^n \Delta(h_i^{(k)} - h_i) = \Delta \sum_{i=1}^n (h_i^{(k)} - h_i) \text{ 收敛于零向量。}$$

由于 F 是连续的, 因此 $F(\sum_{i=1}^n \Delta h_i^{(k)}) - F(\sum_{i=1}^n \Delta h_i)$ 收敛于零向量。同理,

$\Delta^T \left(F(\sum_{i=1}^n \Delta h_i^{(k)}) - F(\sum_{i=1}^n \Delta h_i) \right)$ 对 $\forall j \in \langle 1, n \rangle$ 也将收敛于零向量, 故有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|J(h^{(k)}) - J(h)\| = 0 \quad (2-10)$$

并且 J 在 Ω^n 上弱连续。

(III) J 在 Ω^n 上有界: F 是连续函数, Ω^n 是紧集, 显然 J 在 Ω^n 上有界。

(IV) J 在 Ω^n 上伪单调: 令 $\{h^{(k)}\}$ 为 Ω^n 中的一个序列, 弱收敛到 Ω^n 中的某个点 h ,

令 y 为 Ω^n 中任意的一个点。首先,

$$\langle J(h^{(k)}) - J(h), h^{(k)} - y \rangle^2 \leq \|J(h^{(k)}) - J(h)\|^2 \|h^{(k)} - y\|^2$$

因为 Ω^n 是有界的, $\|h^{(k)} - y\|^2$ 对任意的 $\{h^{(k)}\}$ 和 y 必然也是有界的, 由(2-10), 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle J(h^{(k)}) - J(h), h^{(k)} - y \rangle = 0$$

接下来, 结合(II)以及 J 的弱连续性, 我们得到:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \langle J(h^{(k)}), h^{(k)} - y \rangle &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\langle J(h), h^{(k)} - y \rangle + \langle J(h^{(k)}) - J(h), h^{(k)} - y \rangle) \\ &= \langle J(h), h - y \rangle \end{aligned}$$

也就是说, J 在 Ω^n 上伪单调。

这样, 我们就证明了有限维变分不等式(2-9)的均衡解的存在性。假设 h^n 是(2-9)的一个解, h^n 是有限维的向量, 我们参照 $\tilde{y}^n(\bar{H})$ 的构造方法, 基于 h^n 构造一个无限维的向量:

$$\tilde{h}^n(\alpha) = h_i^n / (\beta_i - \beta_{i-1}), \quad i = \{i \in \langle 1, n \rangle \mid \alpha \in [\beta_{i-1}, \beta_i]\} \quad (2-11)$$

接下来的工作就是证明 $\tilde{h}^n$ 在 $n \rightarrow \infty$ 时将逼近(2-2)的解。

前面我们已经证明过对于任意的 $n > 0$, (2-9)的均衡解都存在, 因此记 S_k 为变分不等式(2-9)在 $n = k$ 时的解集:

$$S_k = \{h^k \in \Omega^k \mid \langle J(h^k), h - h^k \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \Omega^k\}$$

相应的定义 S_k' :

$$S_k' = \{\tilde{h}^k | h^k \in S_k\}$$

其中 h^k 和 $\tilde{h}^k$ 的对应关系如(2-11)中定义的那样。

定义一个数列: $\{\tilde{h}^k\}$: $\tilde{h}^k \in S_k'$, 每个 $\tilde{h}^k$ 都是从 S_k' 中任意取的。为了证明 $\{\tilde{h}^k\}$ 的收敛性, 我们先介绍以下引理:

引理 2.2 在引理 2.1 的假设条件下, 设 $\{\tilde{h}^{k_m}\}$ 是 $\{\tilde{h}^k\}$ 的任一收敛子列, 并且有 $\tilde{h}^{k_m} \rightarrow \tilde{h}'$, 当 $m \rightarrow \infty$, 则 $\tilde{h}'$ 是无限维变分不等式(2-2)的解。

证明: 根据 S_k' 的定义, 对任意的 k_m , h^{k_m} 是(2-9)在 $n = k_m$ 时的解, 则(2-7)在 $n = k_m$ 时的解 $y^{k_m}(h^{k_m})$ 必满足

$$y^{k_m}(h^{k_m}) = h^{k_m}$$

对应的, 由 $\tilde{y}^n(h)$ 和 $\tilde{h}^n$ 的定义, 有

$$\tilde{y}^{k_m}(h^{k_m}) = \tilde{h}^{k_m}$$

引理 2.1 证明了 $y(h)$ 在 Ω 上关于常数 L_k 是李普希斯连续的, 因此有

$$\begin{aligned} \|y(\tilde{h}') - \tilde{h}'\| &= \|y(\tilde{h}') - y(\tilde{h}^{k_m}) + y(\tilde{h}^{k_m}) - \tilde{y}^{k_m}(h^{k_m}) + \tilde{h}^{k_m} - \tilde{h}'\| \\ &\leq \|y(\tilde{h}') - y(\tilde{h}^{k_m})\| + \|y(\tilde{h}^{k_m}) - \tilde{y}^{k_m}(h^{k_m})\| + \|\tilde{h}^{k_m} - \tilde{h}'\| \\ &\leq (L_k + 1)\|\tilde{h}^{k_m} - \tilde{h}'\| + \|y(\tilde{h}^{k_m}) - \tilde{y}^{k_m}(h^{k_m})\| \end{aligned}$$

根据 $\tilde{h}^{k_m}$ 的构造, 可以知道分别对应于 $\tilde{h}^{k_m}$ 和 h^{k_m} 的总流量也是相等的, 即

$$\int_0^{\alpha_m} \tilde{h}^{k_m} d\alpha = \sum_{i=1}^{k_m} h_i^{k_m} = H^{k_m}$$

所以

$$\begin{aligned} \|y(\tilde{h}') - \tilde{h}'\| &\leq (L_k + 1)\|\tilde{h}^{k_m} - \tilde{h}'\| + \|y(\tilde{h}^{k_m}) - \tilde{y}^{k_m}(h^{k_m})\| \\ &= (L_k + 1)\|\tilde{h}^{k_m} - \tilde{h}'\| + \|y(H^{k_m}) - \tilde{y}^{k_m}(H^{k_m})\| \end{aligned}$$

由于 $\tilde{h}^{k_m} \rightarrow \tilde{h}'$ 当 $m \rightarrow \infty$, 由定理 2.1, 有

$$\|y(H^{k_m}) - \tilde{y}^{k_m}(H^{k_m})\| \rightarrow 0 \quad \text{当 } m \rightarrow \infty$$

可以得到 $y(\tilde{h}') = \tilde{h}'$, $\tilde{h}'$ 就是无限维变分不等式(2-2)的解。

引理 2.2 证明了当 $n \rightarrow \infty$ 时, 总是存在(2-9)的某个解是收敛于无限维变分不等式(2-2)的解。

最后, 我们来证明在某些条件下, 有限维变分不等式(2-9)的均衡解在 $n \rightarrow \infty$ 时将收敛于无限维变分不等式(2-2)的唯一均衡解。

定理 2.3 在引理 2.2 的基础上, 假设 F 在 Ω 上单调, 且条件 A 成立, 则 $\{\tilde{h}^k\}$ 收敛。令 $\tilde{h} = \lim_{k \rightarrow \infty} \{\tilde{h}^k\}$, 则 $\tilde{h}$ 是无限维变分不等式(2-2)的唯一均衡解。

证明: 由于 $\{\tilde{h}^k\}$ 是有界的, 则一定存在两个收敛子列

$$\begin{aligned} \{\tilde{h}^{k_i}\} : \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{h}^{k_i} &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \tilde{h}^k = \tilde{h}_{\sup} \\ \{\tilde{h}^{k_j}\} : \lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{h}^{k_j} &= \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \tilde{h}^k = \tilde{h}_{\inf} \end{aligned}$$

由引理 2.2, $\tilde{h}_{\sup}$ 和 $\tilde{h}_{\inf}$ 都是(2-2)的解。因为 F 在 Ω 上单调连续, 且条件 A 成立, 文献[7]已经证明了在上述条件下(2-2)有唯一均衡解, 则必然有 $\tilde{h}_{\sup} = \tilde{h}_{\inf}$, 这意味着 $\{\tilde{h}^k\}$ 是一个收敛数列。令 $\tilde{h} = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{h}^k$, 则 $\tilde{h}$ 就是无限维变分不等式(2-2)的唯一均衡解。

定理 2.4 在定理 2.3 的假设基础上, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 数列 S_k' 收敛于只含一个元素 $\tilde{h}$ 的集合 $\{\tilde{h}\}$, 并且 $\tilde{h}$ 是无限维变分不等式(2-2)的唯一均衡解。

证明: 由 $\{\tilde{h}^k\}$ 的构造可知, 每个 $\tilde{h}^k$ 都是从 S_k' 中任意取的。由定理 2.3, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $S_k' \rightarrow \{\tilde{h}\}$, 则 $\tilde{h}$ 是无限维变分不等式(2-2)的唯一均衡解。

§ 2.4 小结

在本章中, 我们介绍了具有多类别多目标出行者的无限维交通网络均衡问题, 以及均衡解存在的条件。出于工程和计算机领域应用的考虑, 本章提出了一种离散化的方法, 将无限维交通网络均衡问题转化成有限维的网络均衡问题, 并对收敛性和精度都进行了分析证明, 从而从理论上保证了只要离散化细度足够小, 就能通过求解有限维网络均衡问题, 得到无限维交通网络均衡问题的近似解。有了理论上的保证, 本文后面的讨论和分析, 包括建立的 Multi-Agent 仿真模型,

都是基于这一问题的离散化形式进行的。

第三章 Agent 技术的发展及应用

Multi-Agent 系统是当今人工智能中的前沿学科，是分布式人工智能研究的一个重要分支，其目标是将大的复杂系统经过分割，建造成小的、彼此相互通信及协调的、易于管理的系统。**Agent** 的研究涉及 **Agent** 的知识、目标、技能、规划以及如何使 **Agent** 协调行动解决问题等。**Multi-Agent** 系统的应用研究开始于 20 世纪 80 年代中期，近几年呈明显增长的趋势。**Multi-Agent** 技术已成为当今人工智能研究的热点之一。

§ 3.1 Agent 的概念和特征

Agent 的概念出现于 20 世纪 70 年代的人工智能中，80 年代后期成长起来。虽然 **Agent** 的使用日趋广泛，但是对于 **agent** 的定义，一直没有一个统一的定义形式。但是，大家对 **Agent** 的一般特征有着共同的认识。那就是，**Agent** 一般具有自主性、交互性、反应性和主动性的特征：

1、自主性：**Agent** 具有属于其自身的计算资源和局限于自身行为控制的机制，能在无外界直接操纵的情况下，根据其内部状态和感知到的（外部）的环境信息，决定和控制自身的行为；

2、交互性：能与其他 **Agent** 进行多种形式的交互，能有效地与其他 **Agent** 协同工作；

3、反应性：能感知所处的环境，并对相关事件做出适时反应；

4、主动性：能遵循承诺采取主动行动，表现出面向目标的行为。

不少学者称具有上述特征 1~4 的实体称为反应式 **Agent**，有些对 **Agent** 赋予了更多拟人化的要求。一般来说，多 **Agent** 系统中一个自主的 **Agent** 应具有如下基本能力：

1、感知能力：一个 **Agent** 必须具有感知周围环境变化的能力，这样才能在变化的环境中保持决策的正确性以及具有适应性。

2、通信能力：**Agent** 具有与其它 **Agent** 通信的能力。这样才能相互协作，共同完成作业任务。

3、行动及控制能力：**Agent** 对环境应该有作用和控制能力。

4、推理能力：**Agent** 必须对自身的活动以及其它 **Agent** 的活动做出判断和推理，以决定活动的有效性及做出下一步的行动规划。这些特征正是复杂的交通

信号控制系统所需要的。

§ 3.2 Agent 的模型和结构

由于 Agent 模型结构是 Agent 技术的基础，因此，关于 Agent 模型结构的研究是目前主要的研究领域之一。对于 Agent 的模型构成，存在着各种不同的观点。一般认为一个 Agent 应包括感应器、决策控制器、精神状态、知识库、通信器等几部分[11]。

在这方面，Bartman 的 BDI 模型（图 3-1）是一种被普遍接受的 Agent 的理论基础，从哲学上对人的行为意图进行了深入的研究，认为只有保持信念（Belief）、愿望（Desire）和意图（Intention）的理性平衡才能有效地解决问题。他认为在开放世界中，理性 Agent 的行为不能直接由信念与愿望以及由这两者组成的规划所驱动，在愿望与规划之间应有一个基于信念的意图存在。一个理性 Agent 的行为是受制于意图的。Agent 不会毫无理由地随意改变自己的意图，也不会坚持不合实际的意图。

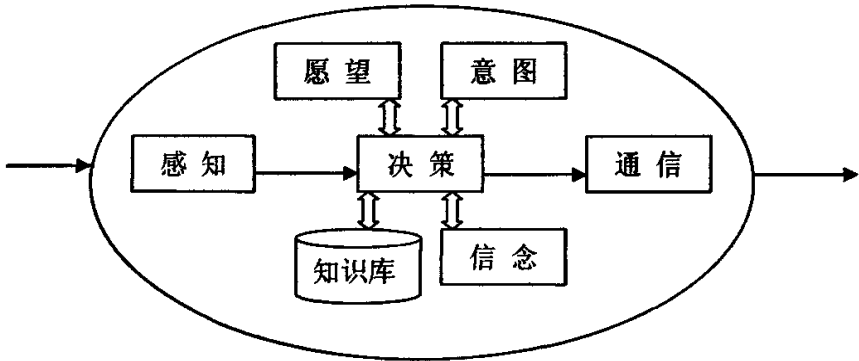


图 3-1 BDI 模型

另外一些学者将 Agent 模型认为由 head、body、communicator 组成的实体，head 是控制的决策部分，body 是 agent 所具有的功能或能力，communicator 是与外界进行联系的通道。对于单个 agent，都具有自己的不完整数据库、智能系统、处理单元、执行机构以及对外通讯接口，如图 3-2。

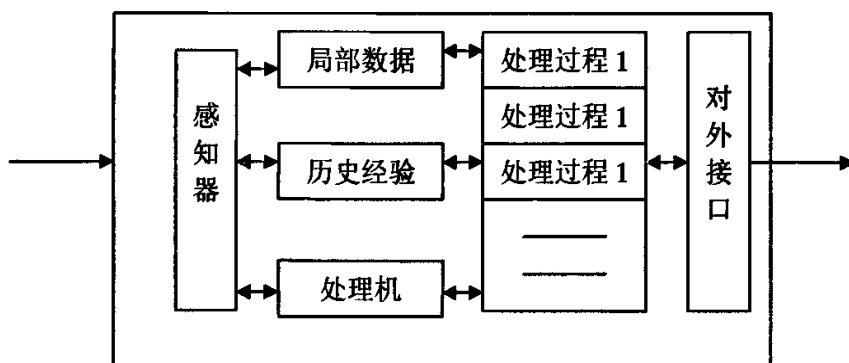


图 3-2 单 Agent 结构示意图

MAS (Multi-Agent System) 的体系结构是指多 Agent 系统中 Agent 间的信息关系和控制关系，以及问题求解能力的分布模式，它是结构和控制的有机结合，是提供 Agent 活动和交互的框架。它描述了组成 Agent 的基本成分及其作用，以及各个成分之间的联系及交互机制等，MAS 的体系结构大致可分为三类：

1、审慎式体系结构 (Deliberative Architecture)

该体系结构的特点是 Agent 中包含了显式表示的世界符号模型，Agent 的决策是通过基于模板匹配和符合操作的逻辑推理做出的，如同人们通过深思熟虑、精心推敲后作出决策一样，因此称为审慎式体系结构。该体系结构在 DAI 中占主导地位；

2、反应式体系结构 (Reactive Architecture)

其特点是 Agent 中包含了感知内外部状态变化的感知器，一组对相关事件做出反应的过程，和一个依据感知器信息激活某过程执行的控制系统。Agent 的行动是由于受到某种刺激而引发的，因此被称为反应式体系结构。该体系结构在目前主流分布式体系中占主导地位；

3、混合式体系结构 (Hybrid Architecture)

其特点是 Agent 中包含了审慎式和反应式两种结构框架，而且是分层组织的，前者建立在后者的基础之上

§ 3.3 MAS 仿真

§ 3.3.1 系统仿真概述

系统仿真（也称计算机仿真或计算机模拟）(Simulation Based Modeling Methods) 是通过建立仿真模型，在计算机上再现真实系统，并模拟真实系统的运行过程而得到系统解的研究方法。作为分析评价现有系统运行状态或设计优化

未来系统性能与功能的一种技术手段,它通过运行具体仿真模型和对计算机输出信息的分析,实现对实际系统运行状态和变化规律的综合评估与预测,进而实现对真实系统设计与结构的改善或优化[12].

§ 3.3.2 系统仿真的方法步骤

在现实世界中存在着许多大小不一、复杂程度不同、构造以及性能差异很大的系统,根据它们产生的不同可以分为诸多的类型。首先,我们生存在一个复杂的自然系统中,自然科学的相关领域就是研究这类系统的。其次,人类在生产建设过程中开发了许多系统,以提高工作效率,对这些系统性能的了解以及合理的设计和管理,能有效地控制它们并使他们更好的作用。最后一类系统是人类在长期生活、生产、交互过程中形成的社会经济系统。由于这类系统主体就是人类本身,人类行为的复杂性、交互性使这些与人的活动有关的系统更具有复杂性。

在系统科学的研究中,系统描述与求解的方法是其中的主要问题。描述、求解各类系统的方法有多种,下图 3-3 从总体上将各类方法进行了分类。系统求解的方法一般分为两类:一类采用真实系统本身进行研究;另一类采用系统模型进行研究,而采用系统模型时由 3 种类型组成:物理模型、数学模型及仿真模型。

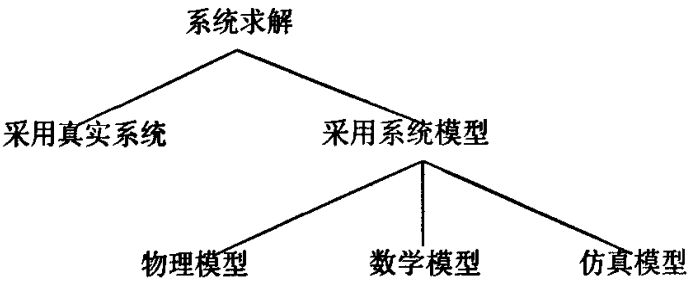


图 3-3 系统分类方法

人们在建造一个建筑物或装置以前总要做个整体的模型,各种实验,从而为设计方案提供有力的理论和技术支持,这就是构造物理模型来求解系统。而建立系统的数学模型,用它来反映系统的运行,同时采用数学模型来分析、求解系统也是人们长期使用的系统求解方法。已有的数学工具尤其是微分方程已成功描述了一些简单系统,如连续变化系统,目前微分方程也是这类系统的主要求解方法。但是对许多复杂系统,无论是建立数学模型的建立还是模型的求解在实际操作中都有很大困难,仿真计算机为微分方程描述的系统求解提供了仿真工具与技术,而数字计算机的发展在技术上为仿真系统的实现提供了强大的工具,仿真技术的应用范围随之有了很大的突破。一些无法用现有数学工具建立数学模型的系

统，往往就采用仿真模型，就是在计算机上再现真实系统，并仿真真实系统的运行过程，从而求解系统。

目前人们比较接受的系统仿真的概念是：系统仿真以相似原理、系统技术、信息技术以及其应用领域有关专业技术作为基础，以计算机和各种物理效应设备为工具，利用系统模型对真实的或设想的系统进行动态研究的一门多学科的综合技术。它作为一种系统建模方法与工具已经在自然科学、工程技术、管理领域都获得了广泛的应用。同时，仿真方法在社会经济系统的建模和解释方面具有独到的优势，它以“相对简单的微观个体活动可以突现出宏观层面的复杂行为”的角度理解社会和经济过程，这种复杂系统的研究方法更符合社会经济系统的内在本质。

§ 3.3.3 基于 Multi-Agent 的仿真系统建模

随着系统仿真技术的不断发展，其应用范围不断扩大，复杂程度不断提高。作为系统仿真核心技术之一的建模技术，也面临着进一步的发展，如何在复杂的系统仿真环境下，提高建模的科学性和可用性，是我们面临的一个主要问题[13]。

传统的系统仿真技术通常要经过两次建模(如图 3-4 所示)，首先由对所建模型有着深入了解的专业研究人员通过数学建模给出系统模型，然后由计算机编程人员在系统模型的基础上给出仿真模型。其间两者要进行多次沟通协调，系统建模耗时长，效率低，而且系统结构变化所引起的代价也较高。

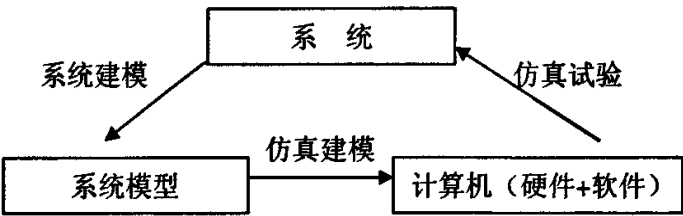


图 3-4 传统的系统仿真建模

面向对象技术中的 UML(统一建模语言：Unified Modeling Language)将系统建模与仿真建模合二为一，专业人员利用 UML 构建的模型可以直接指导编程人员进行编程工作，有利于系统仿真的快速建模，适应了现代复杂系统动态多变的发展趋势。面向 Agent 技术作为面向对象技术的后续，应继承 UML 这一成熟优秀的建模技术，并根据 Agent 的特性加以扩展，形成面向 Agent 的 UML (AUML)，以指导面向 Agent 的系统建模。

面向对象的统一建模语言 UML

UML 是 20 世纪 80 年代后期与 90 年代初期出现的面向对象分析与设计方法

浪潮的后继工作。它统一了多种表示方法，而且对其做了进一步的发展，并最终统一为大众所接受的标准建模语言。1997 年 UML 被 OMG(对象管理组: Object Management Group)采用，并成为面向对象建模的行业标准语言，日前其最新版本为 2.0。UML 是一种定义良好、易于表达、功能强大且普遍适用的图形化建模语言，融入了软件工程领域的新思想、新方法及新技术，其最初用于标准化对象类的设计，后来被扩展为支持面向对象系统中所涉及的所有部件，统一了面向对象分析、设计过程中的常用方法，是面向对象技术强有力的辅助开发工具。

UML 表示法是 UML 最重要的内容，其定义了 9 种图来支持面向对象技术的开发过程，从描述系统角度可分为两类：

(1)描述系统静态结构模型：包括类图；对象图；构件图；配置图。

(2)描述系统动态行为模型：包括用例图；顺序图；状态图；活动图；协作图。

面向 Agent 的统一建模语言 AUML

UML 作为一种标准建模语言已经广泛应用于面向对象的系统建模中，由于其产生主要是为了解决面向对象系统建模困难的问题，所以目前 UML 还不能直接用于面向 Agent 的系统。但是，Agent 作为对象的后继，与对象之间存在许多相似之处，甚至在一定程度，Agent 可以看作是一种特殊的对象。同时，UML 作为一种经过实践检验的成功建模语言，已经被人们广泛使用，这为 UML 向 Agent 扩展奠定了良好的社会基础。所以，在 UML 语言基础上作一定的扩展，以满足面向 Agent 系统的要求不仅是可行的，而且是目前比较实用的方法。

因此，根据 Agent 的特性以及面向 Agent 系统的建模要求就可以来扩展 UML。Odell 等人提出了 AIP (Agent Interaction Protocols)的三层表示模型，在 UML 的基础上进行了扩展，扩展后的模型定位为 AUML (Agent UML)，AUML 对 UML 中的基本元素作了一定的调整从而满足了面向 Agent 系统的要求。目前，OMG 和 FIPA (Foundation of Intelligent Physical Agents) 等组织都正在通过扩展 UML 来制定 AUML[14]。

§ 3.4 小结

本章介绍了 Agent 理论的发展历史，以及 Agent 的概念特征、模型结构等。同时又引入了系统仿真方面的基本原理，和基于 Multi-Agent-System (MAS)的系统仿真建模。介绍了广泛应用于面向对象技术中的统一建模语言 UML，在此基础上，根据 Agent 的特性要求，得到了适用于面向 Agent 系统的 AUML 扩展性建模语言，为面向 Agent 系统的分析设计提供了良好的工具帮助，大大提高了面向 Agent 系统建模的快速性、有效性，进一步增加了面向 Agent 系统实现的可行

性。在第四章中，我们将结合前两章的铺垫，应用 Agent 理论和 MAS 仿真模型来研究无限维网络均衡问题的解。

第四章 基于 Agent 理论的网络均衡模型

§ 4.1 基于 Agent 理论的交通网络均衡模型

§ 4.1.1 基于 Multi-Agent 技术的交通网络系统

我们建立的 MAS 仿真系统，是以整个交通网络为空间，模拟所有出行者动态选择路线，同时随着流量分配的变化相应改变网络成本结构，循环此过程，使网络逐步靠近均衡状态。在系统中，网络 Agent 和出行者 Agent 之间存在实时的通信过程，出行者 Agent 都具备选择最低成本出行路线的能力，而网络 Agent 本身具有学习能力，能够通过自身属性和出行者 Agent 的传递的信息，动态的调整自身属性，从而推动整个网络向均衡方向发展。图 4-1 是系统结构框架图。

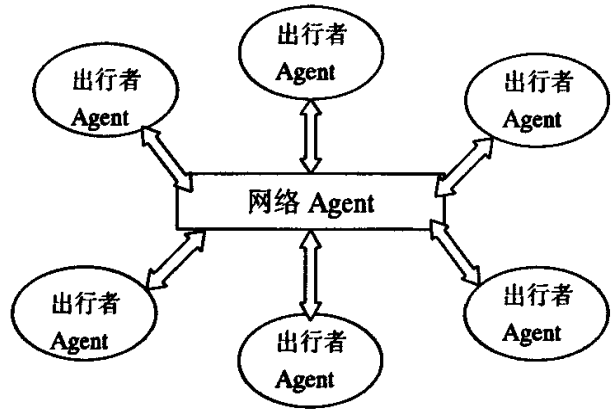


图 4-1 系统结构框架图

§ 4.1.2 Agent 描述

Agent 描述包括 Agent 的状态、Agent 的行为规则和 Agent 之间的相互作用。一旦确定了模型中所有 Agent 的这些内容，模型会自动重复向前演进。

第二章中，我们已经描述了整个问题，并将这个具有无限类出行者的交通网络均衡问题进行了离散化，并证明了在原连续均衡问题存在唯一均衡解的条件下，只要离散化规则 $D(B^{(n)}, \Gamma^{(n)}, P^{(n)})$ 中的分割细度足够细，离散化后的得到的

问题的均衡解一定能够充分逼近原问题的解。但是，在第二章，我们出于条件的通用性，只是定义了 $D(B^{(n)}, \Gamma^{(n)}, P^{(n)})$ 所必须满足的收敛性条件，即令

$$d_{1n} = \max_{j \in \langle 1, n \rangle} \{\beta_j - \beta_{j-1}\}, \quad d_{2n} = \sum_{j=1}^n |p_j - \int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} \psi(\alpha) d\alpha|, \quad d_n = \max\{d_{1n}, d_{2n}\}$$

必须有

$$d_n \rightarrow 0, \quad \text{当 } n \rightarrow \infty$$

我们定义如下的离散化规则 $D_1(B^{(n)}, \Gamma^{(n)}, P^{(n)})$ 作为 Agent 系统中的应用：

$$\beta_j = \frac{j}{n} \alpha_{\max}, \quad \gamma_j = \beta_j, \quad p_j = \frac{\alpha_{\max}}{n} \psi(\beta_j), \quad j = 1, \dots, n$$

显然，

$$\begin{aligned} d_{1n} &= \frac{\alpha_{\max}}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right) \\ d_{2n} &= \sum_{j=1}^n \left| \frac{\alpha_{\max}}{n} \psi(\beta_j) - \int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} \psi(\alpha) d\alpha \right| \\ &= \sum_{j=1}^n \left| \int_{\frac{j-1}{n} \alpha_{\max}}^{\frac{j}{n} \alpha_{\max}} (\psi(\frac{j}{n} \alpha_{\max}) - \psi(\alpha)) d\alpha \right| \\ &\leq n * \frac{\alpha_{\max}}{n} * \max_{\substack{j \in \langle 1, n \rangle \\ \alpha \in [\frac{j-1}{n} \alpha_{\max}, \frac{j}{n} \alpha_{\max}]}} \left| \psi(\alpha) - \psi(\frac{j}{n} \alpha_{\max}) \right| \end{aligned}$$

由于 $\psi(\alpha)$ 在 $[0, \alpha_{\max}]$ 上连续有界，故必定是李普希斯连续的，因此存在正常数 L_ψ ，使得

$$\max_{\substack{j \in \langle 1, n \rangle \\ \alpha \in [\frac{j-1}{n} \alpha_{\max}, \frac{j}{n} \alpha_{\max}]}} \left| \psi(\alpha) - \psi(\frac{j}{n} \alpha_{\max}) \right| \leq L_\psi * \frac{\alpha_{\max}}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

即

$$d_{2n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

所以 $d_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ，即

$$d_n \rightarrow 0 \text{ 当 } n \rightarrow \infty.$$

有了确定的离散化规则，我们的 MAS 仿真系统就可以基于 $D_1(B^{(n)}, \Gamma^{(n)}, P^{(n)})$ 对 $\psi(\alpha)$ 进行离散化而得到的有限维变分不等式(2-8)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left\langle \Delta^T (F(\sum_{i=1}^n \Delta h_i^*) + \gamma_j T), h_j - h_j^* \right\rangle &\geq 0 \quad \forall h_j \in \Omega_j \\ \Omega_j &= \{h_j : Ah_j = bp_j, h_j \geq 0\} \quad j \in \langle 1, n \rangle \end{aligned}$$

来进行。并且假定基于第二章中提出并已证明的使得无限维和有限维问题均衡解存在且唯一的条件。

在我们建立的模型中,出行者 Agent 和网络 Agent 构成了整个交通网络系统。

(1) 出行者 Agent

出行者 Agent 是网络的使用者, VOT 参数值是每个出行者 Agent 的属性。出行者 Agent 具有独立的决策能力,可以从网络 Agent 那里获得即时的网络成本函数,根据自身 VOT 参数值,动态选择成本最小的路线,并将其选择路线的结果通过 Agent 之间的通讯发送给网络 Agent。

(2) 网络 Agent

网络 Agent 是整个交通网络 and 所有出行者 Agent 的载体,它有两个重要属性:

一. 网络的近似均衡流量密度 $\bar{h}$ 。在不断循环的系统周期中,路径上的流量密度将随着出行者 Agent 的路径选择的改变而不断被改变。如果直接用新的流量密度去替换 $\bar{h}$,是不能保证系统最终收敛性的,因此网络 Agent 将在每个周期中保持固定的 $\bar{h}$,在周期的最后依据新的流量密度,结合一定的步长来修正 $\bar{h}$,直到网络达到近似均衡状态时, $\bar{h}$ 就是我们要求解的网络近似均衡解。

二. 网络成本结构函数。基于(2-8)和(2-9)的结构,我们定义

$$J(\bar{H}, \gamma) = \Delta^T (F(\Delta \bar{H}) + \gamma T)$$

为网络成本结构函数。其中, γ 是出行者 Agent 的 VOT 参数值, $\bar{H} \in \bar{\Omega}$ 是近似均衡流量,和近似均衡流量密度 $\bar{h}$ 一样,网络 Agent 只在每个周期的最后依据新的流量结合一定的步长来修正 $\bar{H}$ 。在每个周期中,对于固定的 $\bar{H}$,网络成本函数 $J(\bar{H}, \gamma)$ 就是关于出行者 Agent 的 VOT 参数的函数,和网络流量分配的暂时改变无关。通过网络成本函数,每个出行者 Agent 都可以即时计算出自己选择任意一条路径的成本。

网络 Agent 还具有以下两种能力:

一. 判断能力,即通过自身的属性判断网络是否已达到我们可接受范围的近似均衡状态。

二. 学习能力,即能够按一定的学习法则,根据一定的迭代步长不断更新近似均衡流量密度和网络成本函数,并将更新的结果发送给每个出行者 Agent,从而使整个网络不断向均衡状态演进。

事实上,网络 Agent 的这些属性和能力,很大程度上决定了整个仿真系统的工作过程,具体的判断法则和学习法则我们将在 § 4.1.3 中结合系统工作过程详细描述。

在确定了两类 Agent 的属性、能力等对 Agent 本身特点的描述性定义后,基于前面所描述的这个网络均衡问题的特征,我们还必须确定带有不同 VOT 参数的出行者 Agent 的数量分布。

(3) 出行者 Agent 的分类

根据离散化规则 $D_1(B^{(n)}, \Gamma^{(n)}, P^{(n)})$ 的直观定义, 当所有出行者被分为 n 类时, p_j 代表了 VOT 参数 α 落在区间 $[\beta_{j-1}, \beta_j]$ 中的出行者在所有出行者中的分布概率, 这一类出行者的 VOT 参数值统一被设定为 γ_j . 显然 bp_j 代表了这部分出行者的实际数量, 它等于出行者分布在各条不同路径上的流量总和, 即 $Ah_j = bp_j$. 对应于 $D_1(B^{(n)}, \Gamma^{(n)}, P^{(n)})$, 我们定义 n 类出行者 Agent, 第 j 类出行者 Agent 的 VOT 参数值统一被设定为 γ_j , 数量为 bp_j 按四舍五入规则取整, 记为 $\lfloor bp_j \rfloor$, $j = 1, 2, \dots, n$. 这样, 不同 VOT 参数的出行者 Agent 的数量分布就符合了概率密度函数 $\psi(\alpha)$ 规定的分布规律. 出于系统运行效率和收敛性的综合考虑, 出行者 Agent 的分类数 n 在整个模拟过程中并不是固定的, 而是逐渐增大, 即在系统演进过程中逐步细化出行者 Agent 的分类, 这在 § 4.1.3 也会作具体界定.

§ 4.1.3 系统的工作过程

上文定义了两类 Agent 的功能, 同时我们还需要为这些 Agent 编写一个行为时间表(schedule), 通过产生一系列具有特定顺序的 Agent 行为来定义系统工作的进程.

(1) 初始化

系统初始化: 根据 § 4.1.2 的描述, 我们需要对出行者 Agent 进行分类, 确定每类出行者的数量, 并且出行者 Agent 的分类将随着系统的不断运行逐步细化. 我们在初始化状态将所有出行者 Agent 归为一类, 即分类数 n 为 1. 并设定迭代的步长序列 $\{t_k\}$:

$$t_0 = 1, \quad t_{k+1} = t_k - (1/2)t_k^2$$

出行者 Agent 初始化: 生成 1 类出行者 Agent, 所有出行者 Agent 的 VOT 参数值统一被设定为 $\alpha_{\max}$.

网络 Agent 初始化: 在初始状态我们可以假定所有出行者都选择某一条路径, 则分别容易得到属于 $\hat{\Omega}$ 的可行向量 $\bar{H}^{(0)}$ 作为初始近似均衡流量, 以及相应的初始近似均衡流量密度 $\bar{h}^{(0)}$.

(2) 系统演进过程

完成了初始化工作以后, 我们可以设计系统的演进过程, 即两类 Agent 如何按照既定的行动规则和学习法则, 在有限的时间内尽快使网络达到或接近均衡状态.

所谓系统演进, 即系统进入一个周期性的循环, 每个 Agent 都执行规定的行为, 直到网络 Agent 判断整个网络系统达到可接受的近似均衡状态而停止. 我们设定第 k ($k \geq 1$) 周期的工作流程:

1. 系统将所有出行者 Agent 重新分为 $n_k = \left\lceil \frac{1}{t_k} \right\rceil$ 类($\lceil \cdot \rceil$ 表示四舍五入取整),

分类方法同 § 4.1.2 中的描述, 第 j 类出行者 Agent 的 VOT 参数值统一被设定为 γ_j . $\{t_k\}$ 是系统初始化中已经确定的迭代步长序列。

2. 网络 Agent 保持现有的网络成本函数, 出行者 Agent 逐个 (无顺序规定) 按成本最低原则的选择路线, 并通过通信将自己的选择信息传递给网络 Agent.
3. 网络 Agent 收集所有出行者 Agent 的路径选择信息。通过统计每类出行者 Agent 的数量及其路径的选取, 进行系统终止条件的判断。若网络系统已达到近似均衡状态, 终止系统循环; 否则, 根据学习法则, 修正 $\bar{h}^{(k)}$ 和 $\bar{H}^{(k)}$ 更新网络成本函数。系统继续进入下一周期的循环。

(3) 网络 Agent 的判断规则

根据我们设计的系统工作过程在第 k 周期, 出行者 Agent 被分为 n_k 类。按照 § 4.1.2 中我们对出行者 Agent 的分类方法作了描述, 第 j 类出行者 Agent 的 VOT 参数值统一被设定为 γ_j , 数量为 $\lfloor bp_j \rfloor$, $j = 1, 2, \dots, n_k$, 同类的出行者 Agent 一定选择同样的路径。我们在(2-7)中定义的有限维线性规划 $LP^{(n)}$ 是(2-3)的离散形式, 它的直观解释, 即在假定网络成本函数固定 (与流量分配无关) 的情况下, 当所有出行者都选择了对自己成本最低的路径, 则目标函数也一定是达到了最小。因此, 网络 Agent 根据收集到的所有出行者 Agent 的路径选择信息, 假设第 j 类出行者 Agent 选择第 i_j 条路径, 则得到

$$y_j^{n_k}(\bar{h}^{(k)}, \gamma_j) = \lfloor bp_j \rfloor e_{i_j}, \quad y^{n_k}(\bar{h}^{(k)}) = (y_j^{n_k}(\bar{h}^{(k)}))_{j \in \langle 1, n_k \rangle}$$

其中,

$$e_{i_j} \in R^n, \quad e_{i_j}(m) = \begin{cases} 1 & m = i_j \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$y^{n_k}(\bar{h}^{(k)})$ 是离散形式的实际流量密度向量, 也是 $LP^{(n_k)}$ 问题的近似解。再根据 § 2.3 中定义的转换方法, 将 $y^{n_k}(\bar{h}^{(k)})$ 转换为连续形式的无限维向量 $\tilde{y}^{n_k}(\bar{h}^{(k)})$ 作为 (2-3) 定义的无限维线性规划 LP 的近似解。

另外网络 Agent 通过统计出行者 Agent 对路径的选择, 累加得到各条路径的出行者总流量, 记为 $H^{(k)}$. 由 $\tilde{y}^{n_k}(\bar{h}^{(k)})$ 的结构和定义可知, $H^{(k)}$ 和 $\tilde{y}^{n_k}(\bar{h}^{(k)})$ 满足

$$\text{关系: } H_k = \int_0^{\alpha_m} \tilde{y}^{n_k}(\bar{h}^{(k)}) d\alpha.$$

定义一个判断函数:

$$g(h) = \max_{y \in \Omega} \langle \Delta^T (F(\Delta H) + \alpha T), h - y \rangle$$

$$s.t. \Omega = \{y \in [L^2(0, \alpha_{\max})]^n : Ay(\alpha) = b\psi(\alpha), y(\alpha) \geq 0 \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_{\max}]\}$$

$g(h)$ 是在 Ω 上的非负连续函数, H 和 h 的关系同前文定义, 显然当且仅当 $g(h) = 0$ 时, h 代表了网络的均衡流量密度。从另一方面来看, 即线性规划问题

$$LP \quad \min_{y \in \Omega} \langle \Delta^T (F(\Delta H) + \alpha T), y \rangle$$

的解 $y(h)$ 满足:

$$y(h) = h$$

时 h 是无限维网络均衡问题(2-2)的解。进一步, 设 $\varepsilon' > 0$ 为可接受的误差范围, 则对任意 $\bar{h}$, 只要满足 $\|g(\bar{h})\| \leq \varepsilon'$, 我们就可以判定网络达到近似均衡状态。另一方面, 由 $g(h)$ 的定义, 必定存在与 $\bar{h}$ 无关的常数 $N > 0$, 使得 $g(\bar{h}) < N\|y(\bar{h}) - \bar{h}\|$, 因此, 只要满足 $\|y(\bar{h}) - \bar{h}\| < \varepsilon'/N$, 同样可以判断 $\bar{h}$ 是网络的近似均衡流量密度, 网络达到近似均衡状态。由此可见, 这两种判断方式本质上是相同的。

结合我们刚才的描述, 在第 k 周期, $\tilde{y}^{n_k}(\bar{h}^{(k)})$ 作为 LP 的近似解, 如果重新设定可接受误差 $\varepsilon > 0$, 如果有

$$\|\tilde{y}^{n_k}(\bar{h}^{(k)}) - \bar{h}^{(k)}\| < \varepsilon$$

则可以判断 $\bar{h}^{(k)}$ 是网络的近似均衡解。事实上, 用 $\|\tilde{y}^{n_k}(\bar{h}^{(k)}) - \bar{h}^{(k)}\| < \varepsilon$ 来判断网络的近似均衡在实际操作中仍然是有困难的, 因为这是一个无限维的积分, 很难用计算机直接计算得到。但是, 基于前文对 $\bar{h}^{(k)}$ 和 $\tilde{y}^{n_k}(\bar{h}^{(k)})$ 的定义可知, 这两个无限维向量都和 § 2.3 中定义的 $\tilde{y}^*(\bar{H}, \alpha)$ 具有相类似的形式, 即存在有限个分割点

$$0 = \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n = \alpha_{\max}$$

对 $\forall \alpha, \alpha' \in [\beta_{i-1}, \beta_i]$, 都有 $\tilde{y}^*(\bar{H}, \alpha) = \tilde{y}^*(\bar{H}, \alpha')$ 。同理, 对于 $\bar{h}^{(k)}$ 和 $\tilde{y}^{n_k}(\bar{h}^{(k)})$, 假设它们的分割点序列分别为

$$0 = \gamma_0^1 < \gamma_1^1 < \gamma_2^1 < \dots < \gamma_n^1 = \alpha_{\max} \quad \text{和} \quad 0 = \gamma_0^2 < \gamma_1^2 < \gamma_2^2 < \dots < \gamma_{n^2}^2 = \alpha_{\max}$$

将这些分割点合并成为一个新的分割点集合:

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n = \alpha_{\max}, \quad (n^0 \leq n^1 + n^2).$$

于是,

$$\|\tilde{y}^{n_k}(\bar{h}^{(k)}) - \bar{h}^{(k)}\| = \sum_{i=1}^{n_k} (\gamma_i - \gamma_{i-1}) \|\tilde{y}^{n_k}(\bar{h}^{(k)}, \gamma_i) - \bar{h}^{(k)}(\gamma_i)\|.$$

这样的计算形式相对更适合计算机离散化操作。我们在系统实际运作过程中，分隔点序列在每个循环周期出行者 Agent 重新分类后都可以得到，因此这样的判断方法是具有可操作性的。

(4) 网络 Agent 的学习法则：

网络 Agent 的学习就是在系统尚未达到近似均衡状态的情况下，通过每个周期计算，不断修正自身的属性，更新网络成本函数，以推进系统的演进。根据 § 4.1.2 对网络 Agent 的描述，我们需要修正它两个属性：网络的近似均衡流量密度 $\bar{h}$ 和近似均衡流量 $\bar{H}$ ，从而更新网络成本函数 $J(\bar{H}, \gamma)$ 。系统在每一周期都会计算得到 $\tilde{y}^{n_k}(\bar{h}^{(k)})$ 和实际流量 $H^{(k)}$ ，这两个向量分别代表了当前网络中的实际路径流量密度和实际的路径总流量。但是如果直接用 $\tilde{y}^{n_k}(\bar{h}^{(k)})$ 和 $H^{(k)}$ 去替换 $\bar{h}^{(k)}$ 和 $\bar{H}^{(k)}$ ，是不能保证系统最终的收敛性的，必须用一个修正步长序列 $\{t_k\}$ 来控制整个过程，

$$t_0 = 1, \quad t_{k+1} = t_k - (1/2)t_k^2$$

$\{t_k\}$ 是我们在系统初始化时定义的，令

$$\bar{H}^{(k+1)} = \bar{H}^{(k)} + t_k D^{(k)}, \quad D^{(k)} = H^{(k)} - \bar{H}^{(k)}$$

$$\bar{h}^{(k+1)} = \bar{h}^{(k)} + t_k d^{(k)}, \quad d^{(k)} = \tilde{y}^{n_k}(\bar{h}^{(k)}) - \bar{h}^{(k)}$$

这样就完成了参数的修正和网络成本函数的更新，可以进入下一周期的循环。我们将在后面证明用 $\{t_k\}$ 作为修正步长序列是可以确保系统收敛的。这样重复周期性的循环，直到网络 Agent 判断网络已经达到近似均衡状态，系统便结束了工作。图 4-2 是流程图。

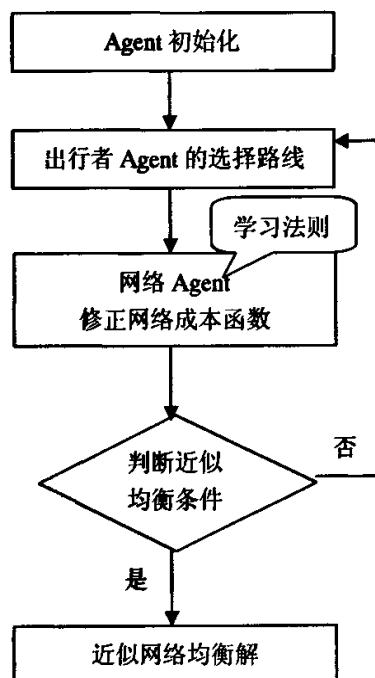


图 4-2 系统运行流程图

这一重复演进的系统工作过程从直观上也是非常容易理解的, 即在每个循环过程中, 在假设网络成本结构不变的前提下, 所有出行者都选择成本最低的路径作为出行路线, 这样就累加形成了新的网络流量分布 H . 我们并不直接用 H 去替代网络成本函数中的参数向量 $\bar{H}$, 而是用这两者之间的差值再乘以一个逐步缩小的系数来修正 $\bar{H}$, 这样做是为了确保这个循环的过程能使网络逐步逼近均衡状态, 而不是在一些非均衡状态中反复徘徊震荡。

综上所述, 要证明我们设计的这个 MAS 仿真系统的有效性, 只要证明我们所定义的系统工作过程在一定的条件下能够确保在有限的时间内使模拟的网络达到均衡状态, 从而得到(2-8)的解。

(3) 系统工作过程的收敛性分析

在第二章和本章前面部分关于无限维网络均衡问题的离散化以及 MAS 仿真系统模型中, 为了方便与 Agent 工作过程相联系, 我们一直基于路径形式的均衡来讨论。而在仿真系统的收敛性分析和证明中, 我们将基于边形式的均衡来分析, 这也是为了方便我们的证明过程。

在问题的概述中, 我们已经定义边形式的流量密度 x 和对应的边形式的累加流量 X , 并且有

$$x = \Delta h, \quad X = \Delta H \quad \text{和} \quad h = \Delta^T x, \quad H = \Delta^T X$$

同样, 设 $y_1(\bar{x})$ 为 LP 问题基于边形式的精确解, 则有 $y_1(\bar{x}) = \Delta y(\bar{h})$ 和

$y(\bar{h}) = \Delta^T y_1(\bar{x})$ ，而相应的近似解 $\tilde{y}_1(\bar{x}) = \Delta \tilde{y}(\bar{h})$ 和 $\tilde{y}(\bar{h}) = \Delta^T \tilde{y}_1(\bar{x})$ 。

因此，我们定义基于边形式的判断函数：

$$g_1(x) = \max_{y_1 \in Z} \langle F(X) + \alpha T, x - y_1 \rangle$$

$$s.t. \ Z = \left\{ y_1 \in [L^2(0, \alpha_{\max})]^M : A_1 y_1(\alpha) = b \psi(\alpha), y_1(\alpha) \geq 0 \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_{\max}] \right\}$$

其中 $A_1 = A \Delta^T$

显然，对任意的 $h \in \Omega$ ， $x = \Delta h$ ，都有 $g(h) = g_1(x)$ 。我们证明系统的收敛性，只要证明在有限个循环周期内，边形式的近似均衡流量密度 $\bar{x}^{(k)}$ 一定能使 $\|g_1(\bar{x}^{(k)})\| \leq \varepsilon$ ，其中 ε 是系统初始化时选定的可接受的系统逼近误差。

下面我们引入以下两个引理，它们将对算法收敛性的证明起到重要作用。

引理 4.1 Polyak 引理[15] 令 p 为一正数， $\{u_k\}$ 为一正数序列， $\{a_k\}$ 为一非负序列，且

$$u_{k+1} \leq u_k - a_k u_k^{1+p}$$

则对任意的 k ，有

$$u_k \leq u_0 \left(1 + p u_0^p \sum_{i=0}^{k-1} a_i\right)^{-1/p}$$

特别的，若 $p = 1$ 和 $a_k = a$ ，对任意 k 都有

$$u_k \leq u_0 / (1 + a u_0 k)$$

引理 4.2 假设 F 在 $\hat{\Omega}$ 上强单调， $F(X)$ 和 $\nabla F(X)$ 在 $\hat{\Omega}$ 上李普希斯连续，条件 A 成立，则 ∇g_1 在 Ω 上可微，且关于常数 $L_{\nabla g_1}$ 是李普希斯连续。同时有

$$(1) \nabla g_1(x) = \langle \nabla F(X), x - y_1(x) \rangle + H(x) \quad (4-1)$$

$$g_1(x) \geq \beta \|X - X^*\|_2^2$$

其中 $H(x) = F(X) + \alpha T$ ， X^* 表示边形式的网络均衡流量， β 是 F 的强单调系数（如果 F 是单调但不是强单调的，则令 $\beta = 0$ ）

(2) 若进一步有 $\|\tilde{y}_1(x) - y_1(x)\| \leq \varepsilon$ ，有

$$g'_1(x; \tilde{y}_1(x) - x) = \langle \nabla g_1(x), \tilde{y}_1(x) - x \rangle \leq -g_1(x) - \beta \|\tilde{y}_1(x) - x\|^2 + c\varepsilon$$

其中 c 为某一正常数。

证明：(1) 因为条件 A 成立，所以 $y_1(x)$ 是唯一解，故(4-1)等号右边的表达式有

意义。由函数的微分法则，可以得到(4-1)成立。

最后，

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \langle H(x), x - y_1(x) \rangle \\ &\geq \langle H(x), x - x^* \rangle \\ &\geq \langle F(X) - F(X^*), x - x^* \rangle \\ &\geq \beta \|X - X^*\|_2^2 \end{aligned}$$

所以，命题得证。

(2) 由于 $F(X)$ 在 $\hat{\Omega}$ 上李普希斯连续，则 $H(x)$ 有界，并且存在正常数 c_1

$$\|H(x)\| \leq c_1$$

$\nabla F(X)$ 在 $\hat{\Omega}$ 上李普希斯连续，则 $\nabla F(X)$ 有界，并且存在正常数 c_2

$$\|\nabla F(X)\| \leq c_2$$

显然向量 $\tilde{y}_1(x) - x$ 有界，则并且存在正常数 c_3

$$\|\tilde{y}_1(x) - x\| \leq c_3$$

所以，

$$\begin{aligned} \langle \nabla g_1(x), \tilde{y}_1(x) - x \rangle &= \langle \nabla F(X)(x - y_1(x)) + H(x), \tilde{y}_1(x) - x \rangle \\ &= \int_0^1 \langle \nabla F(X)(x - \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_1(x) - y_1(x)), \tilde{y}_1(x) - x \rangle_2 d\alpha \\ &\quad + \langle H(x), \tilde{y}_1(x) - y_1(x) + y_1(x) - x \rangle \\ &\leq -g_1(x) - \beta \|\tilde{y}_1(x) - x\|^2 + (c_1 + c_2 c_3) \varepsilon \end{aligned}$$

令 $c = c_1 + c_2 c_3$ ，则有

$$\langle \nabla g_1(x), \tilde{y}_1(x) - x \rangle \leq -g_1(x) - \beta \|\tilde{y}_1(x) - x\|^2 + c\varepsilon$$

所以，命题得证。

定理 4.1 令 $\{\bar{x}^{(k)}\}$ 为上述模拟算法每个循环周期得到的边形式的近似均衡流量密度所组成的序列。假设条件 A 成立， ∇F 在 $\hat{\Omega}$ 上李普希斯连续， F 在 $\hat{\Omega}$ 上强单调。则 $\{\bar{x}^{(k)}\}$ 将收敛于无限维变分不等式(2-2)的均衡解。

证明：由引理 4.1 可知，序列 $\{t_k\}$ 单调收敛于 0，并且 $t_k = O(1/k)$ 。由引理 4.2 知，

∇g_1 在 Ω 上可微，且关于常数 $L_{\nabla g_1}$ 是李普希斯连续的。根据我们前面设定的循环

过程，有 $d_1^{(k)} = \tilde{y}_1^{t_k}(\bar{x}^{(k)}) - \bar{x}^{(k)}$ ，则对 $\forall k$ ， $\|d_1^{(k)}\| \leq D$ ， D 为 Ω 的直径。在 § 4.1.2

中我们具体说明了在仿真过程中采用的离散化规则，有 $d_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ，结合定理 2.1，

有

$$\|\tilde{y}_1^{n_k}(\bar{x}^{(k)}) - y_1^{n_k}(\bar{x}^{(k)})\| = O\left(\frac{1}{n_k}\right)$$

而在第 k 循环周期之初，我们都重新将出行者 Agent 分为 $n_k = \left\lceil \frac{1}{t_k} \right\rceil$ 类，故

$$\|\tilde{y}_1^{n_k}(\bar{x}^{(k)}) - y_1^{n_k}(\bar{x}^{(k)})\| = O(t_k)$$

定义

$$\sigma = \max\{g_1(\bar{x}^{(0)}), [L_{\nabla_n} D^2 + 2c]\}$$

我们将用归纳法来证明，对 $\forall k$ ， $g_1(\bar{x}^{(k)}) \leq \alpha_k$ 。

显然，当 $k = 0$ 结论成立。若 $g_1(\bar{x}^{(k)}) \leq \alpha_k$ ：

$$\begin{aligned} g_1(\bar{x}^{(k+1)}) &= g_1(\bar{x}^{(k)} + t_k d_1^{(k)}) \\ &\leq g_1(\bar{x}^{(k)}) + t_k \langle \nabla g_1(\bar{x}^{(k)}), d_1^{(k)} \rangle + \frac{L_{\nabla_n} \|d_1^{(k)}\|^2}{2} t_k^2 \\ &\leq g_1(\bar{x}^{(k)}) + t_k \left(-g_1(\bar{x}^{(k)}) - \beta \|d_1^{(k)}\|^2 + c t_k \right) + \frac{L_{\nabla_n} \|d_1^{(k)}\|^2}{2} t_k^2 \\ &\leq (1-t_k) g_1(\bar{x}^{(k)}) + \frac{L_{\nabla_n} D^2 + 2c}{2} t_k^2 \\ &\leq (1-t_k) \alpha_k + \frac{\sigma}{2} t_k^2 \\ &= \alpha_k \left(1 - \frac{t_k}{2}\right) \\ &\leq \alpha_{k+1} \end{aligned}$$

即对 $\forall k$ ， $g_1(\bar{x}^{(k)}) \leq \alpha_k$ 且 $g_1(\bar{x}^{(k)}) = O(t_k) = O(1/k)$ 。所以，当 $k \rightarrow \infty$ 时， $\{\bar{x}^{(k)}\}$ 将收敛于无限维变分不等式(2-2)的均衡解。

这样，就从理论上证明了，在定理 4.1 所述条件下，我们所设计的整个 MAS 仿真系统的收敛性。

由上述收敛性证明，可知上述循环过程，只要循环周期足够长，出行者 Agent 的分类就越细，所得的近似均衡解就能充分接近精确解。事实上，那些 α 属性值非常靠近分界点的出行者 Agent，对网络成本结构非常敏感，因而在选择路线时很容易发生波动，即使网络已经接近均衡状态。Agent 分类越来越细，则可以将这些敏感的 Agent 与其它 Agent 尽量分离，从而有效减少误差，使结果更接近精确解。

§ 4.2 实例分析

这一节中我们一个简单的交通网络均衡问题来进一步分析讨论我们的模拟算法。网络结构如图 4-3，出行者成本计算函数由表 4-1 列出。从出发点至终点的出行者总流量为 6.

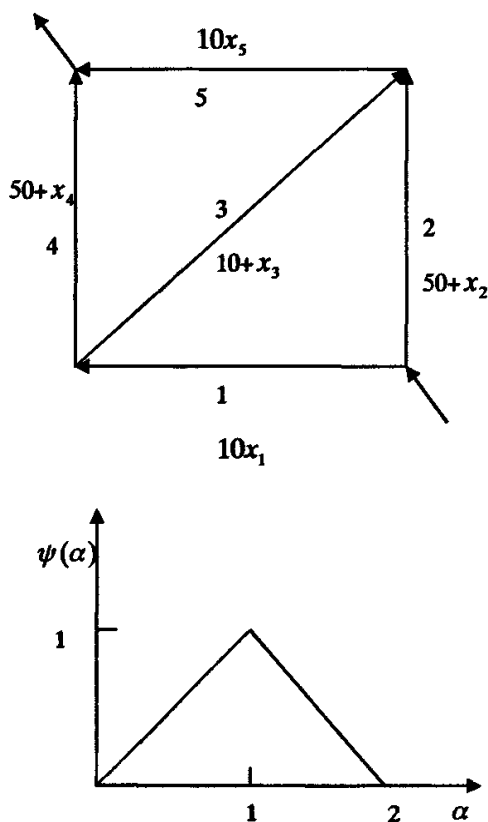


图 4-3 网络结构和 VOT 概率密度函数

表 4-1 出行者成本函数.

arcs	1	2	3	4	5
Delay function	$10x_1$	$50 + x_2$	$10 + x_3$	$50 + x_4$	$10x_5$
$T_a :$	100	90	10	100	100

上述模拟模型可以利用标准软件模拟平台开发实现，我们采用目前国际上比较流行的 repast 软件类库，并基于 java 平台来构建模型。

实际模拟中，兼顾到控制系统误差和保持一定的运行速度，我们将出行者总流量 b 和道路收费向量 T 同时扩大 200 倍，显然这样的变换可以尽量减少迭代过

程中舍入误差对结果精度的影响。表 4-2 是设定系统误差 ε 在 0.1, 0.05, 0.01 时 MAS 仿真系统模拟得到的近似均衡解, 以及与文献中基于连续迭代算法得到的精确解的比较。图 4-4 是 ε 取 0.01 时, 随着系统的演进, 各条边累加流量逐渐收敛于均衡解的过程演示, 其中横坐标为系统循环周期数, 纵坐标为边流量。

表 4-2 近似均衡解

ε	0.1	0.05	0.01
$\ X - X^*\ /\ X^*\ $	0.3916136%	0.0681%	0.0296%

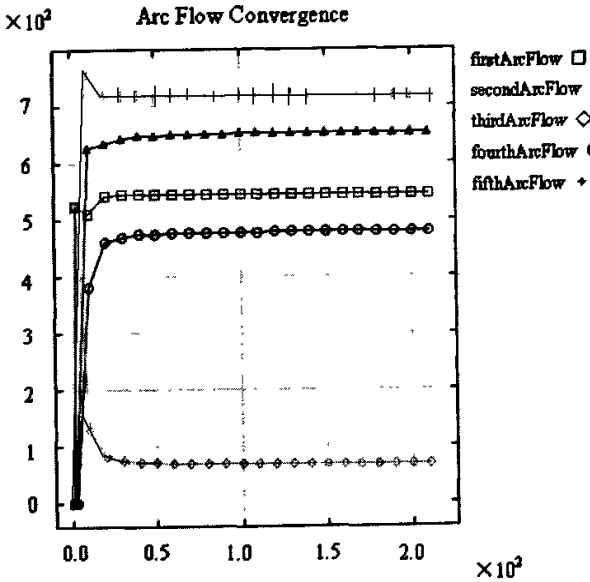


图 4-4 模拟效果图

§ 4.3 Agent 理论在港口竞争问题中的应用

§ 4.3.1 港口竞争理论

从广义的角度看, 全球运输系统也是一个网络系统, 在该系统中存在众多参与者, 每个参与者通过自身的选择和活动对网络产生影响力, 从而改变网络的一些属性。网络系统对每个参与者也具有一定的约束力, 港口作为连接全球运输网络的重要节点, 在网络中起到承上启下的作用。运输网络结构的改变会影响港口的运营状况, 同时, 港口不同措施的选择也会影响到全球运输网络的结构, 两者之间是相互作用的关系。从长期来看, 两者处于动态的变化中, 但短期内, 往往存在一种短期均衡状态。在均衡状态, 每个港口的市场份额, 应采取的最佳策略

都是港口竞争理论所研究的问题，本质上也是一种更复杂的网络均衡问题。

港口作为全球运输网络的重要节点，它的竞争力和经营状况受到诸多因素的影响。首先，港口一般都是在执法部门的监控之下的，尤其是海关的限制。其次，港口的基本特征对港口的竞争力有很大的影响。普通的产品，一般来说只要产品的质量过关和相对较低的价格，就能获得较大的吸引力。港口服务具有明显的派生性，港口受腹地经济的发展状况和其所处地理位置的影响很大。

最重要的一点，就是港口具有相当普遍的外部性特征。当一个港口在业界树立一个良好的印象后，选择这一港口的客户将越来越多。为了满足顾客增长的需要，港口往往会投入较多的精力去改善港口的管理水平，进一步提高港口的吞吐能力，从而提高港口的服务效率，降低货物在港逗留时间，更好的满足发货人的需要。随着经营规模的扩大，港口的运营成本降低，在服务费用方面也有了降价的空间，从而港口具有更强的竞争力。

从船公司方面来看，如果港口的吞吐量越来越大，船公司是比较愿意把这个港口作为运输的枢纽港，一些中转的业务也很可能被吸引过来，这样必然会增加在港口的航班密度来稳定或吸引更多的货源。航班密度的上升，又使发货人和货代能更方便、快捷的运输货物，享受更好的服务。那么越来越多的发货人和货代将选择这一港口，从而形成良性循环。以上描述的是正的网络外部性。反之，港口失去竞争力而陷入恶性循环时，则是负的网络外部性。

图 4-5 是港口的竞争策略设计图。

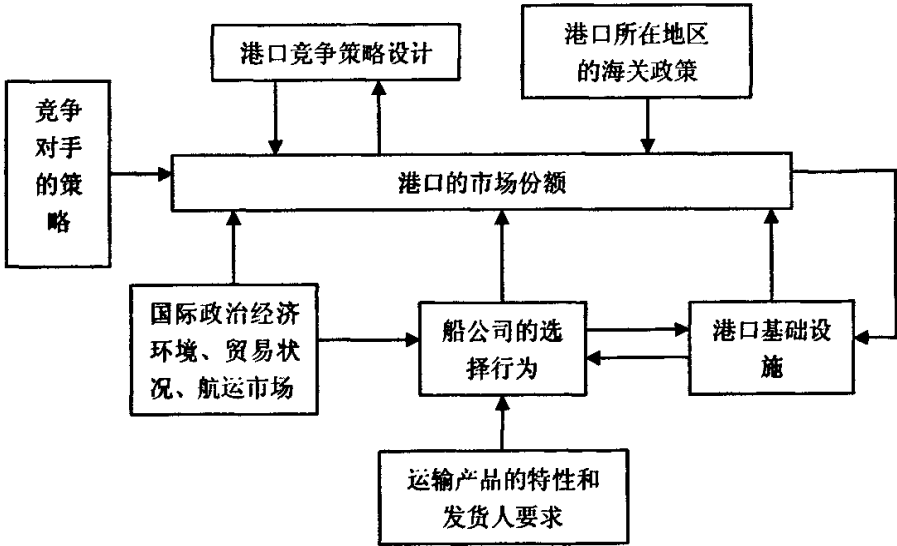
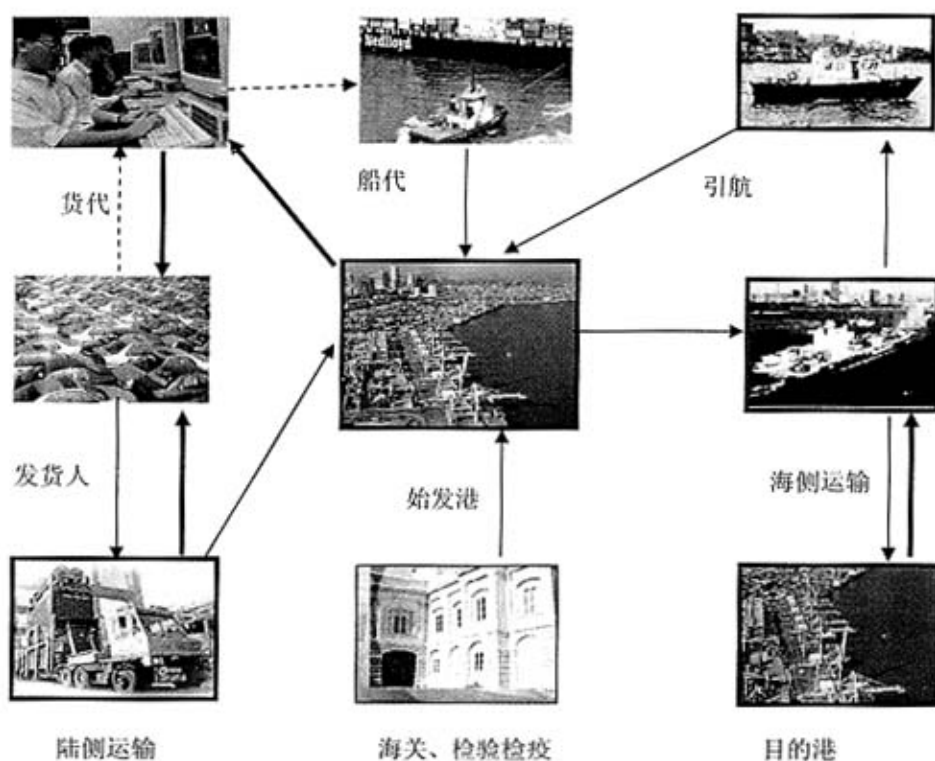


图 4-5 港口的竞争策略设计图

§ 4.3.2 集装箱运输网络

集装箱运输易于装卸,使得集装箱运输成为国际贸易的主要运输方式,也是港口运营的聚焦点。集装箱运输的出口流程可用下图表示。图中表示了当发货人向货代提出运输申请后,货代接收申请,然后向船代订舱,发货人的货物通过陆侧的运输被运至港口的一个过程。海上承运人的船到达始发港的海域时,经过等待后由引航船引至港口。货物通过海关、检验检疫等执法机构的检查后,集装箱被从船上卸下,需要装船的集装箱又被装上船,再由海上运输至目的港,如果把发货人理解为国外的发货商,这一流程就成为集装箱的进口流程。



从广义上来说,集装箱的运输过程完全可以用网络来表示。在上图中,可以看出,集装箱相继流转,使一个的移动过程。集装箱在流转过程中,货物的使用价值并没有发生变化,改变的只是货物的时间价值和空间价值。因此,可以认为集装箱的运输过程是一个服务过程。

忽略海关等执法机关的影响,对集装箱运输服务的费用和效率影响较大的过程包括:货代的服务、陆侧的运输服务、始发港的装卸运输服务、海上的运输服务、目的港的装卸运输服务、目的港的陆上运输服务。同时这些分隔过程的相互

协调能力能力，也在一定程度上影响了集装箱运输的质量。从事集装箱运输的各部分通常是不同的经济实体，他们之间虽然都有完成集装箱运输的目的，也存在相互利益冲突。

因此，要分析集装箱的运输效率和效益必须从系统角度出发，综合考虑集装箱运输的全过程。运输过程中任意节点都与其它部分相关联，分析单个参加者的贡献和作用，只有用网络的方法才能恰当表示。

§ 4.3.3 集装箱运输过程中的决策问题

集装箱运输过程是牵涉到方方面面的，因此货主常常委托代理机构。一次货主的运输本质上就是选择合适的货代公司。但是，依据不同的贸易方式，货代公司所办理的业务是不同的。

在集装箱国际运输中，最主要的条款是 CIF 和 FOB。所谓的 CIF (Carriage and Insurance Paid to ...named place of destination)是指卖方自负运费，订立从装运地将货物运至目的地的运输合同，并办理货物运输保险，而风险自货物在装运地交给承运人时，即由卖方转移给买方承担。在这种贸易条款下，集装箱的运输由卖方承担。卖方在选择合适的货代公司后，由货代公司负责选择运输路径和运输方式以及相关申报活动。当货物抵达目的港以后，由买方的货代公司负责清关、陆上运输等业务。在 FOB 条款下，卖方在指定装运港将货物装船越过船舷后，即完成了任务，随后的一切费用和 risk 均由买方承担。FOB (Free on Board) 方式下，买方负责运输路径和运输方式的选择，买方的货运代理人负责从装运港至目的地的全部运输过程。卖方只负责把集装箱运输到买方指定的堆场，卖方的货代负责陆上运输及清关、报检活动。

集装箱运输完成之后，货代公司向卖方提交货运代理发票、提单等单证，卖方向货运代理支付货运代理费及货运代理人垫付的保险费，运费、报关费、装箱费等费用。无论是 CIF 方式还是 FOB 方式，运输过程的决策都是由代表货主利益的代理来负责进行的，并且，货代与船公司通常鉴定所谓的 (Yard to Yard) 合同。

在集装箱运输过程中，船公司只负责船舶运营和合港口装卸费用的支付。船公司的决策主要是航线、船型、运费、服务质量等。船公司能否被指定为承运商，一般由其服务质量和价格以及货代的偏好决定。

港口在集装箱运输中起到转运枢纽的作用，集装箱从货主的仓库装货后，进入港口堆场，并必须向港口缴纳一定的装卸和储存费。船进港后，港口负责集装箱从船上到港口堆场的装卸过程，并向船公司收费。因此，港口的服务价格和服务质量间接的影响了货代和船公司的选择港口的决策行为。

不管是货主、货代、船公司，还是港口本身，都追求自身利润的最大化，所以，他们都回采取各种措施尽可能的吸引更多的客户。比如提高服务质量，降低服务价格。港口、货代、船公司三者之间的利益既背反又密切联系。因此每一方在策略设计的过程中，都要考虑策略对集装箱流量的影响以及其他两者的决策。因此，参与者的策略、收益、市场份额是一个相互联系的整体，如何选择合适的策略使得收益最大化就成为每个参与者关心的问题。

§ 4.3.4 基于 MAS 的港口竞争模型

在 § 4.3.2 中，我们从经济学的角度出发，定性的给出了港口竞争的基本理论，分析了集装箱运输市场的基本特征和影响港口竞争的各种因素。从集装箱运输流程图，可以看出，集装箱运输过程可以用网络来表述，网络中的节点可以看成是集装箱的转运点，弧可以理解为运输过程或服务过程。我们又从港口的网络外部性出发，描述了港口这一复杂的运输网络中，港口和港口的使用者之间互相影响，逐步过渡到一种均衡状态。

具体到微观层面，港口的使用者，包括发货人，货代，船公司，他们选择哪个港口，所考虑的因素未必相同，比如，各因素间的地位对发货人来说是一样的吗？是否每个人都关心相同的问题。显然，不同性质的发货人，对港口的服务费用，服务质量，货物在港逗留时间，航线密度等各种因素的侧重程度必然是有差异的。同样，对于不同的货代，船公司，也都会根据自身的情况来选择最适合自己的港口。

另一方面，港口通过向发货人提供服务获得一定的收入，港口收入的总额不但与港口的定价有关，还与经过港口的吞吐量相关。因此，港口的选择竞争策略这个过程本质上是一个动态博弈问题，或者是一个双层规划问题。上层的港口首先确定价格，下层的发货人根据价格选择港口，并且港口能够预知发货人的选择结果。每个参与者都有自己的行动目标，每个港口的策略设计是相互影响的，都希望通过改变自身策略设计提升对发货人的吸引力，从而增加收益，这一点也是本模型比一般交通网络均衡模型更为复杂的地方。

所以，我们不难总结出，港口竞争网络模型，也是一个具有多类别出行者的网络均衡模型。因此，我们可以基于多类别出行者网络均衡理论来解释港口的竞争行为和集装箱流量在网络中的分配情况。结合在第二章、第三章的研究，我们将应用 Agent 理论，在假设只有两个港口竞争共同腹地的货物的前提下，建立港口竞争策略设计的网络均衡模型。为了增强所建立模型和系统的可操作性，我们对某些实务，在对网络均衡状态影响不大的前提下，作了简化。

Agent 描述

(1) 发货人 Agent

在海运实务中发货人 Agent 本身并不选择运输路线, 只是决定货源地、目的地运输方式及到港时间。具体的路线安排由货代来决定。

(2) 货代 Agent

我们定义负责出口货物运输的出口货代 Agent 和负责进口货物运输的进口货代 Agent。

出口货代 Agent 根据自己的效用偏好, 综合考虑港口的收费和服务质量以及航班密度这三个因素选择出运货物的港口, 并向船公司订舱, 然后根据航班时间, 负责安排货物到港口的运输, 清关以及在港口的转运活动, 并把货物交给承运船公司。

进口货代 Agent 根据所接受的货单, 提前与船公司确认货物到港时间, 负责进口货物在港口的转运活动, 清关, 以及离港运输。

(3) 船公司 Agent

船公司 Agent 根据自己的效用偏好, 综合考虑港口的停靠成本和转运时间这两个因素选择停靠的港口和航班班次, 按照预定的航班时间从公海进入港口泊位, 在规定的时间内完成进港货物的卸载和出港货物的装船, 离开港口, 并负责海上运输。假设船公司对港口的选择和航班确定是每年进行一次, 之后就在选定港口设固定航班。

(4) 港口 Agent

港口位置、航道条件、泊位数、港口收费、堆场空间、机械设备等港口的内部因素, 都属于港口 Agent 的属性。并假定航线成本由始发港和目的港决定, 与选择的船公司无关。港口 Agent 可以通过改变内部因素来改变收费和服务质量等外部因素, 达到提升港口竞争力的目的。当然内部因素的改变也直接影响了港口的运营成本, 并且竞争对手采取的策略也是港口 Agent 决策的重要考虑因素。所以港口 Agent 在设计竞争策略时总是选择认为对自己收益最大的运营策略。假设港口 Agent 也是每年调整自己的运营策略。

(6) 港口腹地 Agent

我们定义港口腹地 Agent 为两个港口直接腹地的总和, 即港口共同腹地, 它是所有发货人和货代的载体。

事实上, 港口竞争的网络均衡模型要相对我们前面建立的交通网络均衡模型复杂的多, 以上定义的 4 类 Agent 只是其中最主要的 Agent, 在系统运行中, 还要根据实际操作的需要定义其他的一些 Agent, 如车辆 Agent、货物 Agent 等等, 才能使系统真正运行起来。

我们用下面的系统工作流程图来表明基于 MAS 的两个港口竞争仿真模型的

运行规则。

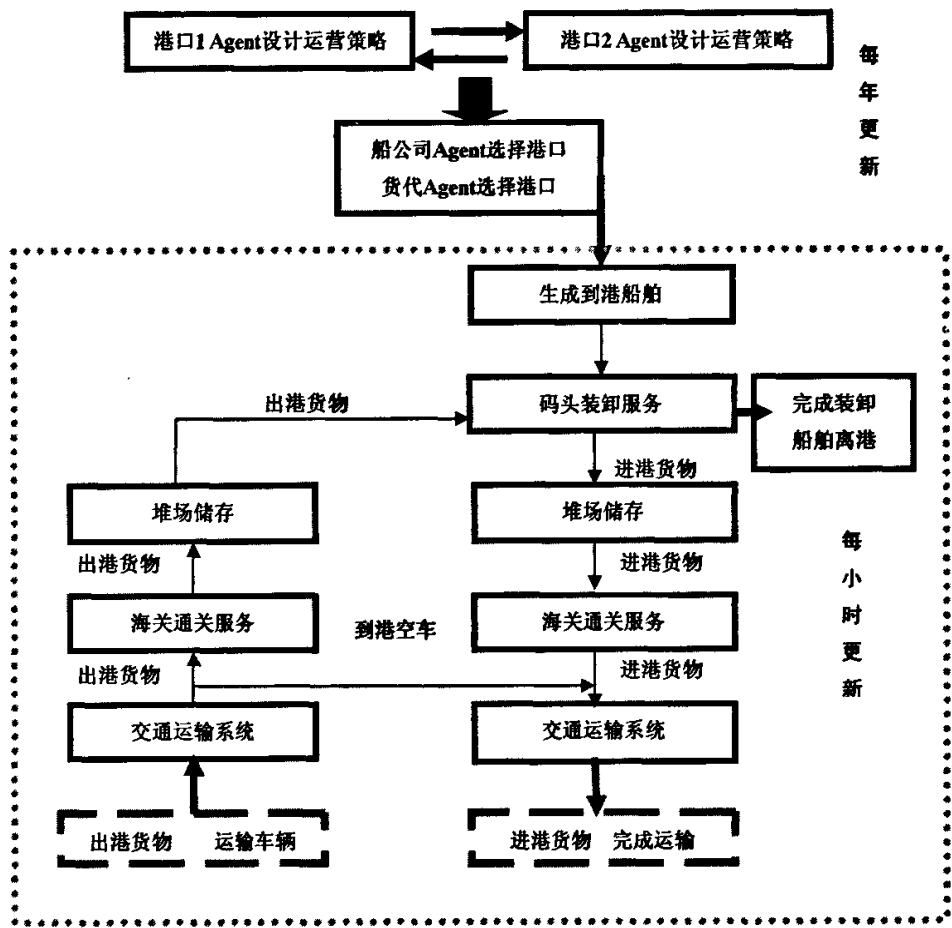


图 4-6 系统工作流程图

§ 4.4 小结

本章在第二章得到的离散化形式的基础上，建立了 Multi-Agent 仿真系统，定义了不同类别的出行者 Agent 和网络 Agent，并赋予所有 Agent 各自的属性，最终通过一定的学习法则、判断法则使系统在达到近似均衡状态时停止，从而求得了近似均衡解。同时，还对这种系统的工作过程的可行性进行了分析，证明了在一定的条件下，通过这样的循环和学习过程，系统必能在有限时间内达到可接受范围的近似均衡状态，即收敛性得到了保证。最后，还将模型拓展到港口竞争策略设计问题，建立了更复杂、更具应用背景的 MAS 模型，从而将 Agent 理论的应用推广到了更广阔的层面。

第五章 总结与展望

由于网络系统在人类生活占据着越来越重要的地位,网络系统均衡的研究就尤为重要,而在网络系统中,参与的实体数量很多,各自拥有自己的行为方式和目的,网络经过长期的运行,能够达到静态的均衡状态,每一位网络中的出行者再也不能通过自己单方面的行动来改善自己的状况,如自己的旅行成本最小化,或收益最大化。

近年来 Agent 技术的研究与应用正在成为人工智能研究的一个热点。至于标准的 Agent 的定义,现在计算机与人工智能领域的研究者并未给出一个全面接受的定义,但对于一个 Agent 来说,它一般应具有自主性、协作性、反应性、学习性等特点。多个 Agent 之间相互协作、相互作用,形成了 Multi-Agent 系统(MAS),是实际应用的主要形式。Agent 的发展为交通网络仿真开辟了一个新的途径,Agent 所具有特点正可以使仿真中出行者对路径的选择与实际更为接近,从而通过微观元素个体行为所产生的相互作用来反映整个网络系统的宏观状态。另一方面,网络系统本身作为一类特殊的 Agent,通过不断的学习和协调,促使网络逐步靠近均衡状态。本文基于 Multi-Agent 仿真技术,使用 Java 语言实现了无限类出行者动态选择出行路线的交通网络模拟系统,从更直观的角度和方法来求解无限维交通网络均衡点。

基于 Multi-Agent 技术的建模表明,我们可以通过模拟异质性的个体决策者的行为,来探究整个交通网络系统的宏观特征。MAS 关注的是大量微观个体间的交互行为及其共同作用的结果,这些行为可以是不同个体之间的直接关系,也可以是许多个体在共同环境下的间接关系。MAS 不同与经典算法中以一个或一组方程的形式来体现系统中变量之间的因果关系,而是需要为各类不同的主体设定相互的关联方式及强度。本文以 MAS 为构架,并将经典算法融入 Agent 的决策中,因而不仅从理论上保证了模型的可行性、收敛性,又为复杂的均衡问题提供了更直观更具可操作性的解法。

由于所学知识有限,研究技巧稚嫩,和时间有限,本文存在不少不足之处和有待进一步深入研究的地方。以作者的角度来看,可以继续研究和完善的方面为:

(1) 在分析交通网络时,假定了起点和终点之间的旅行需求是确定的,对于需求不确定的情形没有进行分析,在需求不确定的情形下,问题将更为复杂,对其进行有效分析将使得模型的实用性更强。

(2) 对港口竞争策略设计这一背景,本文只建立了 MAS 模型,定义了 Agent 的属性和方法,但没有进行实例分析,希望能有港口竞争方面等的实例(如洋山港和釜山港),来运用建立模型和算法,把理论研究真正应用到实际背景中,为

理论和实际都带来贡献和发展。

总之，将发展迅速的人工智能技术应用到网络均衡乃至竞争策略设计这方面的研究，它的前景是十分可观的。希望在这方面的研究有新的发展，帮助越来越多的网络结构能够受到很好的控制和优化，有助于改善人们生产生活方式。

参考文献

- [1] Nash J. Equilibrium points in n -person games [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences USA, 1950, 36: 48-49.
- [2] Baye M R, Tian G Q, Zhou J X. Characterization of the existence of equilibria in games with discontinuous non-quasiconcave payoffs [J]. Review of Economic Studies, 1993, 60: 935-948
- [3] Nishimura K, Friedman J. Existence of Nash equilibrium in n person games without quasi-concavity [J]. International Economic Review, 1981, 22: 637-648
- [4] A. Nagurney, Net Economics: A Variational Inequalities Approach [M], Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, the Netherlands, Second Edition, 1999.
- [5] Patrick T. Harker, Jong-Shi Pang, Finite-Dimensional Variational Inequality and Nonlinear Complementarity Problems: A Survey of Theory, Algorithms and Applications, Mathematical Programming, 48, 1990, 161-220.
- [6] Marcotte P, Zhu D L. An efficient algorithm for a bicriterion traffic assignment problem [A]. In: Triennial Symposium on Transportation Analysis[C], Proceeding of TRISTAN II, Capri, June 23-28, 1994, 891-897.
- [7] Marcotte P, Zhu D L. Equilibria with infinitely many differentiated classes of customers [A]. In: Complementarity and Variational Problems [C], Proceedings of the 13th International Conference on Complementarity Problems: Engineering and Economics and Applications and Computational Methods. SIAM, Philadelphia, PA, 1997, 234~258
- [8] 孙晋文, 基于 agent 的智能交通控制策略与可视化动态仿真研究[D], 华中科技大学, 2001
- [9] 尹宏宾, 徐建闽等, 一种区域交通信号最优配时的算法研究[J], 暨南大学学报, 1998, Vol.19, No.1.
- [10] Lions, J.-L., Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires [M], Dunod, Paris, 1969.
- [11] 蔡朝辉, 宋靖雁等, 基于 Multi-agent 的道路交通流控制模型, 公路交通科技[J], 2002, Vol.19, No.2, 105-109.
- [12] 马寿峰, 李英等, 一种基于 agent 的单路口交通信号学习控制方法[J], 系统工程学报, 2002, Vol.17, No.6, 526-530.
- [13] 赵新俊, 工行仁, 龚光红, 仿真建模中的概念模型研究[J], 系统仿真学报, 2003, 15(5), 614-616.
- [14] 承向军, 杨肇夏, 一种交通信号自学习控制方法及仿真实现[J], 系统仿真学报, 2004, Vol.16, No.7, 1519-1524.

- [15] Polyak, B. T., Introduction to Optimization [A], In Optimization Software[M], New-York, 1987.
- [16] Wooldridge M, Jennings N R. Intelligent agents: theory and practice [J]. The Knowledge Engineering Review , 1995, 10 (2) : 115~152.
- [17] Beneson I. Multi-agent simulation of residential dynamics in the city [J]. Computer, Environment and Urban systems, 1998, 22: 25-42.
- [18] N. R. Jennings. On agent-based software engineering [J]. Artificial Intelligence, 2000, 17(2): 277-296.
- [19] J.L. Adler, G. Satapathy, etc. A multi-agent approach to cooperative traffic management and route guidance[J], Transportation Research Part B 2005, Vol.39: 297-318.
- [20] Jeremy Blum, Azim Eskandarian, Enhancing intelligent agent collaboration for flow optimization of railroad traffic[J], Transportation Research Part A 2002, Vol. 36: 919-930.
- [21] Filippo Logi, Stephen G.Ritchie, etc. A multi-agent architecture for cooperative inter-jurisdictional traffic congestion management[J], Transportation Research Part C 2002, Vol. 10, 507-527.
- [22] A. Nagurney, Net Economics [A], In A Variational Inequalities Approach[M], Second Edition, Dordrech , The Netherlands, 1999.
- [23] D. Zhu, P. Marcotte, New Generalized Monotonicity [J], Journal of Optimization Theory and Applications, 1995, Vol. 87, No. 2, 457-471.
- [24] A. Nagurney, Congested Urban Transportation Networks and Emission Paradoxes [J], Transportation Research D 5, 2000, 145-151.
- [25] Beckmann, M. J., McGuire, C. B., and Winsten, C. B., Studies in the Economics of Transportation [M], Yale University Press, New Haven, Connecticut, USA, 1956.
- [26] Button, K.J., Environmental Externalities and Transport Policy [M], Oxford Review of Economic Policy 6, 1990.
- [27] Dafermos S., and Sparrow, F. T., The Traffic Assignment Problem for a General Network, Journal of Research of the National Bureau of Standards 73B, 1969, 91-118.
- [28] Dafermos S., Traffic equilibrium and variational inequalities [J]. Transportation Science, 1980, 14(1): 42-54.
- [29] Dafermos S., The traffic assignment problem for multi-class user transportation networks [J]. Transportation Science, 1972, 6 (1): 73-87.
- [30] Fisk, C., More Paradoxes in the Equilibrium Assignment Problem,

Transportation Research Part B, Methodological 13, 1979, 305-309.

[31] Charnes, A., Cooper, W. W., Some network Characterizations for Mathematical Programming and Accounting Approaches to Planning and Control [J], The Accounting Review 42, 1967, 24-52.

[32] 施欣, 港口竞争对策模型的研究[J], 系统工程理论与实践, 1998, 18(9), 27-33.

[33] 吉阿兵, 基于极效率 DEA 模型的港口绩效评价[J], 系统工程, 2005, 23(4): 119-122.

[34] 吕永波等, 我国主要集装箱港口的竞争力评价研究[J], 北方交通大学学报, 2002, 26(5): 102-105.

致谢

时光飞逝，转眼已经到了在复旦管院学习生涯的终点。在这里，我度过了人生中最重要的一段时光。三年学习生活中的点点滴滴，不仅让我汲取了丰富的知识，也激发了许多人生的感悟，让我变得更加坚强。当我完成这篇毕业论文的时候，心中充满了欣喜，它将为我的三年难以忘怀的复旦生涯划上句号，更是另一段新生活的开始。

首先感谢恩师朱道立教授。他用的渊博知识，引领我走入科研的大门。他务实敬业的精神、治学严谨的态度和诲人不倦的热情，激励着我探索科学和真理。他的鼓励和教诲我将终生铭记！

感谢管科系的叶耀华老师、殷志文老师、徐以汎老师、黄学祥老师、徐庆老师、戴锡老师、赵来军老师，他们的教导让我学到更多的知识，他们的关怀和指引给予我许多人生的启示。

感谢系办公室的吴勤旻老师和陈璞老师三年来对我的关心和帮助。

感谢同门的兄弟姐妹张江华、吴远开、胡一宏、朱怀意、苏多坚、朱玲玲，孔庆霞、吴显扬、斯樊锋以及其他的师兄师姐师弟师妹们，与他们共同学习和交流的过程，给了我无数的灵感和启发，师兄师姐的指引让我在未来的人生道路上更加自信。

感谢我的室友陈海燕、敖雯、项阳、吴巧云、王谨、柳杰，与大家朝夕相处的时光将让我永远难以忘怀。

感谢我的父母，他们用辛勤的汗水养育我，无论成功与挫折都默默的支持和鼓励着我，是他们无私的付出，使我有机会踏入复旦校园。

感谢复旦给了我学习和成长的空间，在这里度过的时光是我人生中最宝贵的财富。