




Y1894654

学位论文版权使用授权书

江苏大学、中国科学技术信息研究所、国家图书馆、中国学术期刊（光盘版）电子杂志社有权保留本人所送交学位论文的复印件和电子文档，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文。本人电子文档的内容和纸质论文的内容相一致，允许论文被查阅和借阅，同时授权中国科学技术信息研究所将本论文编入《中国学位论文全文数据库》并向社会提供查询，授权中国学术期刊（光盘版）电子杂志社将本论文编入《中国优秀博硕士学位论文全文数据库》并向社会提供查询。论文的公布（包括刊登）授权江苏大学研究生处办理。

本学位论文属于不保密 。

学位论文作者签名：魏莉
2011年6月13日

指导教师签名：钱章平
2011年6月13日



非线性偏微分方程解析解的研究

The Research on Analytic of Nonlinear Partial Differential Equations

专业名称: 应用数学

指导教师: 钱素平

姓 名: 魏 莉

2011年6月



摘 要

非线性科学被深入研究并广泛应用到了物理、化学、工程、生物等各领域。许多非线性物理现象都可以用非线性方程来很好的描述，所以得到非线性方程的解有很重要的意义。目前，人们已经确立和发展了许多求解非线性系统的有效方法，但是因为求解非线性偏微分方程没有统一而且普适的方法，所以寻找一些行之有效的方法是一项十分有价值的工作。本文用近似对称约化方法和同伦分析法研究了非线性偏微分方程的求解。

全文共分四个部分：

第一章：简要回顾了非线性偏微分方程提出的背景，归纳总结了国内外所提出的求解非线性偏微分方程的一些主要的方法，扼要的介绍了本文研究的主要内容。

第二章：介绍了研究过程中需要的基本理论，基本概念等，并介绍了结合Lie对称和扰动理论产生的近似对称方法及同伦分析法。

第三章：给出带有扰动项的 Burgers 方程的近似对称约化和无穷级数解。

第四章：运用同伦分析法求得了两个非线性偏微分方程的解析解，其中一个是近似长波耦合方程，另一个是奇异扰动 MKdV-KS 方程。本文应用同伦分析法求得了两个方程的显式解析解，该解与其它解法求得精确解十分吻合，证明同伦分析法求解非线性偏微分方程的有效性和巨大的潜力。

所用的方法都可以借助计算机系统如 Maple 和 Mathematica 得以实现。

关键词：非线性偏微分方程，扰动的微分方程，近似对称约化，同伦分析法，级数解，近似解

Abstract

The nonlinear science is substantially studied and widely applied in many fields of physics, chemistry, engineering and biology. Many nonlinear phenomena can be well described by nonlinear equations. Therefore, it is an important and meaningful work to seek the solution of a nonlinear equation. At present, many methods have been established and developed to solve the nonlinear systems, not all these approaches are universally applicable for solving all kinds of nonlinear partial differential equations directly. As a consequence, it is still a very significant task to go on searching for efficient approaches to solve nonlinear partial differential equations. In this thesis, approximate symmetry perturbation approach and the Homotopy Analysis Method (HAM) about solving nonlinear partial differential equations are discussed.

There are four sections in this paper.

In chapter one, the historical background of nonlinear partial differential equations is looked back on, the main methods for solving of nonlinear partial differential equations are summarized, and the primary contents of this paper are reported as well.

In chapter two, we introduce a number of important definitions and theories. The approximate symmetry reduction approach, which is based

on the Lie theory has been established and perturbation theory, and the homotopy analysis method are introduced as well.

In chapter three, we obtain the approximate symmetry reduction and infinite solution for the perturbed Burgers equation.

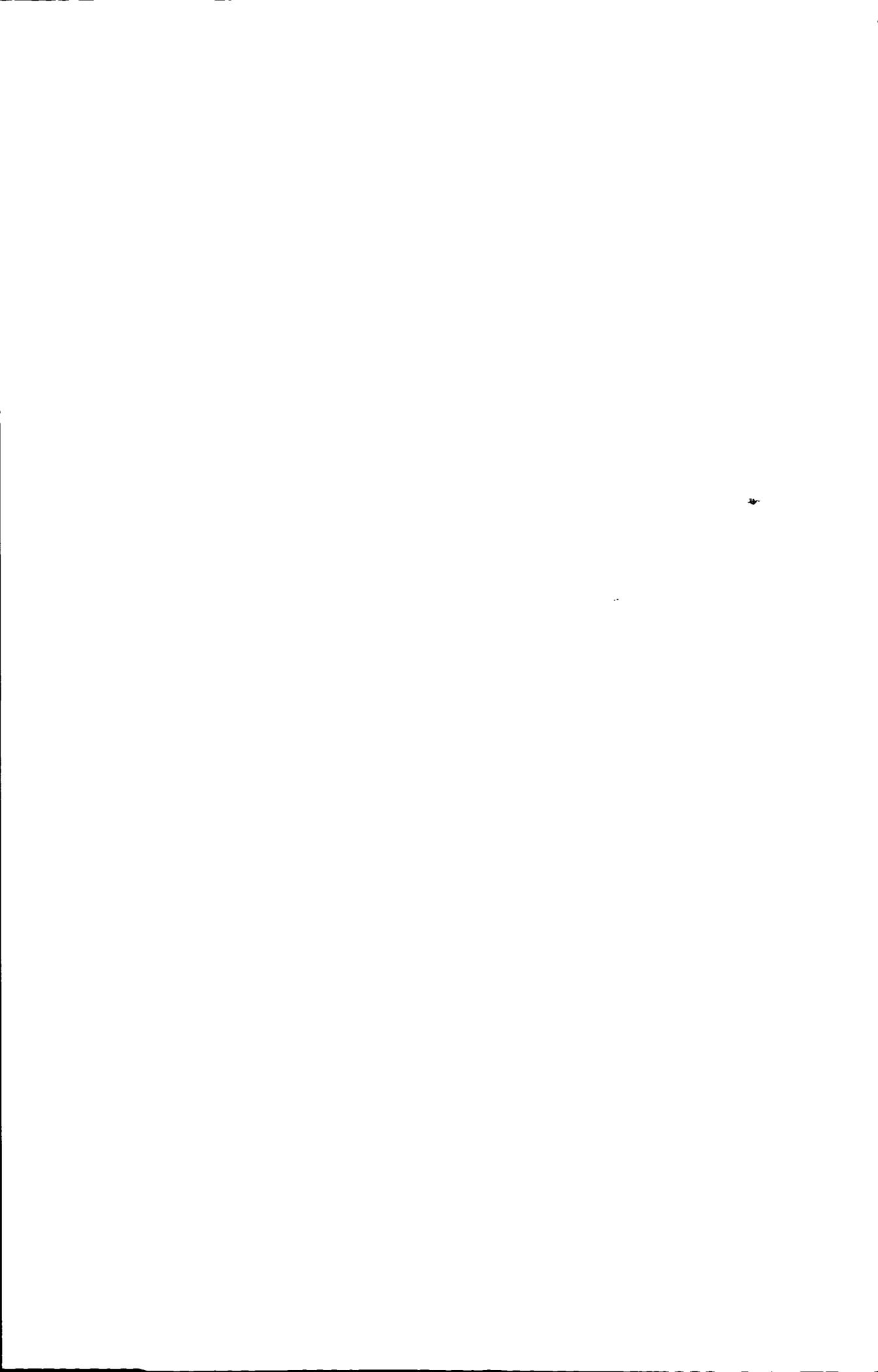
In chapter four, the HAM is used to solve two nonlinear partial differential equations: one is the system of the approximate equations for long water waves, the other is the singularly perturbed MKdV-KS equation. We use the HAM to get the analytic approximation of the two equations. The results obtained by this method have agreement with the exact solution obtained by other methods. It illustrates the validity and the great potential of the HAM in solving nonlinear partial differential equation.

All the methods we proposed can be performed with the help of the Computer of Algebraic System, such as Maple or Mathematica.

KEY WORDS: nonlinear partial differential equations, perturbed equations, approximate symmetry reduction, the Homotopy Analysis Method, series solutions, approximation solutions.

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景及意义.....	1
1.2 研究现状.....	2
1.3 本文主要研究内容.....	3
第 2 章 基本理论和概念	5
2.1 基本概念.....	5
2.1.1 对称约化的相关概念.....	5
2.1.2 同伦的相关概念.....	8
2.2 近似对称约化方法基本思想.....	8
2.3 同伦分析法的基本思想.....	10
第 3 章 用近似对称约化方法求解扰动 Burgers 方程	12
3.1 预备知识.....	12
3.2 扰动 Burgers 方程的近似对称约化.....	12
3.3 扰动 Burgers 方程的无穷级数解.....	14
3.4 本章小结.....	19
第 4 章 同伦分析法在非线性的偏微分方程中的应用	20
4.1 近似长波方程的求解与其近似解的模拟.....	20
4.1.1 近似长波方程的求解.....	20
4.1.2 近似长波方程的数值解模拟.....	23
4.1.3 h 值的选取	24
4.1.4 解的有效性检验.....	26
4.1.5 本节小结.....	28
4.2 奇异扰动 MKdV-KS 方程的同伦近似解.....	29
4.2.1 引言.....	29
4.2.2 奇异扰动 MKdV-KS 方程的求解	29
4.2.3 结论.....	33
第 5 章 总结与展望	34
致 谢	35
参考文献	36
读研期间发表的论文	40



第1章 绪论

1.1 研究背景及意义

随着对客观世界认识的不断深入,在物理、化学、工程、力学等领域涌现出大量的非线性问题,如:理想流体力学发展成为非线性的纳维尔-斯托克斯

(Navier-Stokes)理论;牛顿引力定理发展成为非线性的爱因斯坦引力场方程;线性振动、波动发展成为非线性的振动、波动;光学、热力学、统计力学等都是从线性理论发展为非线性理论;还有,波恩等试图发展非线性的电磁理论;海森堡、德布罗意、波姆及P. B. Burt等都曾努力发展非线性量子力学等。在非线性科学中孤立子理论在自然科学的各个领域占据着十分重要的角色[1-4],这些非线性问题可以模型化为非线性常(偏)微分方程(组),因此许多非线性问题都能转化为对非线性偏微分方程(组)的问题的求解,所以在理论上和应用上非线性偏微分方程(组)解的研究都具有十分重要意义。近几十年来,非线性偏微分方程(组)的求解及其解法研究,一直是非线性科学研究中极其重要和最为活跃的前沿课题和热点问题。

1834年,英国科学家、造船工程师约翰-斯科特-罗素(John Scott Russell)在从爱丁堡到格拉斯哥的运河上偶然观察到水面上涌现了光滑而且轮廓分明的巨大孤立波峰。这种孤立波以恒定速度传播,保持形状不变。他把这种波称为孤立波,在题为《论波动》的报告中描述了他观察到的奇妙现象[5]。1895年,根据流体力学知识,荷兰科学家Korteweg(科特维格)和devries(德弗里斯)[6]研究了浅水波运动(即著名的KdV方程),在长波近似和小振幅的假设下,得到单向运动的浅水运动方程,这是最早提出的一个非线性偏微分方程,并求解得到这个方程的行波解,这个解属于周期性椭圆函数——称为椭圆余弦波(cnoidal wave),在波长趋于无限时,它描述了罗素所发现的孤波的运动,波形为 sech^2 。KdV方程的提出从理论上阐明了孤波的存在。20世纪五十年代,著名物理学家费米(Enrico Fermi), John Pasta 和 Stan Ulam 利用第一台大型电子计算机“aniac I”进行了一项数值研究实验(即FPU实验),由于这个实验只在频率空间考察没能发现孤立波解,故没有得到正确解释。其后Toda考虑晶体的非线性运动,

近似模拟这种情况,最终得到孤立波解,FPU问题得到了正确的解答。1965年,用计算机数值模拟法,美国科学家Zabusky(扎布斯基)和Kruskal(克鲁斯卡尔)详细考虑了等离子体中孤立波相互间的非线性碰撞过程,证实了孤立波在相互作用后形状和传播速度保持不变的论断。

自 Korteweg 和 devries 导出 KdV 方程后,可以在不同的背景中作为描述多种多样的物理现象的模型方程不断地推导出 KdV 方程。现在, KdV 方程被视为非线性数学物理模型之一。同时人们陆续在不同的物理和工程实际背景中也提出了许多偏微分方程,如 Burgers 方程, mKdV 方程, Boussinesq 方程, KdV-Burgers 方程, Kuramoto-Sivashinsky 方程, KdV-Buegers-Kuramoto 方程, 非线性 Klein-Gordon 方程, Sine-Gordon 方程, Sinh-Gordon 方程等。到目前为止提出的有物理意义和使用价值的偏微分方程已有几百个,且随着科学技术的不断发展,在各个学科中不断提出许多新的非线性偏微分方程(组)。

1.2 研究现状

众所周知,许多意义重大的自然科学和工程技术问题都可以转化为非线性偏微分方程(组)的研究,并且偏微分方程(组)的精确解可以很好的解释各种自然现象,例如振动、传播波、和孤立子等,所以在理论上和应用上都具有极其重要的价值。现在一些计算机符号运算软件如 Mathematica、Matlab、Maple 等的出现和不断发展,使得偏微分方程(组)的求解及其解法研究逐渐成为一个热点领域。人们提出了许多求解非线性偏微分方程(组)的方法,下面简单介绍一下近几十年来求解非线性偏微分方程(组)一些主要和常用的方法。

1967年, C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal 和 R. M. Miura (简称 GGKM) 提出了逆散射方法[7], 也称非线性 Fourier 分析, 它的基本思想是将这类非线性问题通过常微分算子与本征值转化为线性问题来求解, 这个方法是应用数学的一个重大突破。后来又经过拉克斯 (P. D. Lax) [8] 推广并改进了 GGKM 的上述方法, 使之能够求解其它的非线性偏微分方程, 逐步形成了一种比较系统的求解非线性偏微分方程的方法。1972年, 前苏联的 Zakharov 和 Shabat 将这一方法进行了本质的推广, 解决了高阶 KdV 方程以及立方非线性 Schrödinger 方程等的求解。同年, M. Wadati [9] 得到 MKdV 方程的精确解。Ablowitz[10]等人则将反散射方法推广到一般的情况。屠规彰和李翊神[11-12]

也对反散射法的发展做了很大的贡献。1971年,日本物理学家和数学家 Hirota 教授提出双线性方法(Hirota Bilinear Method)是构造偏微分方程 N-孤子解及其 Bäcklund 变化的一种重要而直接的方法[13-14]。在 1975 年, Wahlquist 和 Estabrook [15](WE)提出了只有两个独立变量的非线性偏微分方程的延拓方法。1874 年,挪威数学家 Sophus Lie 发现某些微分方程的解对于一些连续变换群是不变的,从而引入了连续群的概念,后来被称为李群。李对称方法已被广泛应用于物理、工程、力学等应用科学领域,如水波方程 Boussinesq 方程[16-17], Burgers 方程[18-20], KdV 方程[21-22], 非线性耦合方程组[23-25]等。1969 年, Blunlan 和 Cole[26]在寻找热方程的新解时扩展了 Lie 的方法,称之为非经典约化方法,得到许多标准方法得不到的新解,如对 Canh—Hilliard 方程[27]求解。Clarkson, Kruskal[28] 基于李群方法的相似约化思想提出一种寻找偏微分方程相似约化的方法,这种方法称为直接方法,并且得到了 Boussinesq 方程的相似约化。随着李对称方法在偏微分方程的深入应用和快速发展,尤其是近年来符号运算软件的广泛运用,很好的解决了数学分析和处理中繁琐的代数运算问题,因此不论是群理论方法,还是直接方法,在求解微分方程问题上都得到了更好的发展,求解微分方程的方法也更加多样化,如变量分离方法[29-31], 齐次平衡法[32], 扩展的直接方法[33], 得到了更多的新解。

摄动方法[34]也是一种被广泛地应用于求解非线性问题的分析工具之一,由于摄动方法的有效性常常依赖某个小参数(或大参数)或者被称为摄动量的变量, Lyapunov[35]引入一个人工辅助小参数,发展了 Lyapunov 人工小参数法。Karmishin 等人[36]采用这种思想提出了 σ 展开法。但是人工小参数法与 σ 展开法都需要一些基本法则来指导我们应该在何处设置人工参数 ϵ 。此外,同摄动方法一样,人工小参数法和 σ 展开法均无法提供一个调节级数解收敛区域和收敛速度的简便途径。利用拓扑中的同伦思想, Liao[37-40]提出了一种新的求解非线性问题的解析方法--同伦分析方法,较摄动法有更多的优点,同伦分析方法已成功地应用于许多科学和工程中的非线性问题的研究[41-45]。

1.3 本文主要研究内容

本文围绕非线性偏微分方程的求解问题主要做了一下两部分内容:

一、利用近似对称扰动理论求解含有小参数扰动项的偏微分方程，发现不同阶的相似约化方程在形式上是一致的，因此可以总结出相似约化方程的一般形式，从而求出带有小参数扰动项的偏微分方程的无穷级数解。

二、利用同伦分析法求解非线性偏微分方程及耦合非线性偏微分方程组。我们利用maple软件，通过引入辅助非零参数 h 构造同伦方程，非线性偏微分方程（组）的解的表达式为一个无穷序列，选择合适的 h 值，使解收敛，从而得到所求解的偏微分方程（组）的解。由于计算量的限制，一般所得到的都是非线性偏微分方程（组）的某一阶截断解（即近似解）。把所求的近似解跟原方程（组）的精确解进行数值比较，发现两个解的图形是十分吻合的。在非线性的偏微分方程和非线性耦合方程组中的应用都证实了同伦分析法是求解非线性偏微分方程（组）的一种行之有效的方法。

第2章 基本理论和概念

2.1 基本概念

2.1.1 对称约化的相关概念

定义 2.1.1.1 李变换群

李群 G 称为微分流形 M 上的李变换群, 如果

i). G 中的任一个元素 a 都决定 M 上的一个变换, 即

$$a: M \rightarrow M$$

为微分同胚, 它使

$$x \rightarrow a(x), \quad x \in M,$$

并常将 $a(x)$ 记作 xa 。

ii). $(a, x) \rightarrow xa, \quad a \in G, x \in M,$

作为

$$G \times M \rightarrow M$$

的映射是 G^∞ 的。

iii). 对任意的 $a, b \in G$ 的和 $x \in M,$

$$x(ab) = (xa)b.$$

定义 2.1.1.2 单参数变换群

若微分流形 M 上的李变换群 G 为一实数加群, 则称之为 M 上的一个单参数变换群, 对任意实数 t , 都决定 M 上的一个变换

$$\varphi_t: M \rightarrow M, t \in R$$

使

$$p \rightarrow \varphi_t(p), p \in M$$

而 G 中的乘法满足

$$\varphi_t \varphi_s = \varphi_{t+s} \circ$$

定义 2.1.1.3 微分方程的对称:

考虑含有两个变量的非线性演化方程

$$u_t = F(x, t, u, u_x, \dots) \quad (2.1.1.1)$$

设 M 是全体连续函数的集合, 即 $M = \{u(x, t)\}$, 方程的解集可以表示为

$$N = \{u \in M \mid u_t = F(x, t, u, u_x, \dots)\} \quad (2.1.1.2)$$

设 $G = \{g_\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathbb{R}\}$ 是作用在 M 上的单参数变换群, 即

$$g_\varepsilon: u \rightarrow \bar{u}(u, \varepsilon), \quad \bar{u}(u, 0) = u$$

对 M 中的任意 u , 将

$$g_\varepsilon u = \bar{u}(u, \varepsilon) = \bar{u}_\varepsilon(u)$$

可看做 M 中过 u 的一条曲线 (ε 为曲线参数), 也称为 u 在 g_ε 作用下的轨道. 记

$\sigma(u) = \left. \frac{d\bar{u}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$, $\sigma(u)$ 就是单参数变换群 g_ε 在 M 中对应的向量场. 若

$$g_\varepsilon: u \rightarrow \bar{u}(u, \varepsilon)$$

是微分方程的不变群, 则

$$\bar{u}_t = F(x, t, \bar{u}, \bar{u}_x, \dots) \quad (2.1.1.3)$$

把 $\bar{u}(u, \varepsilon)$ 关于 ε 进行泰勒展开

$$\bar{u}(u, \varepsilon) = u + \varepsilon \left. \frac{d\bar{u}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \varepsilon^2 \left. \frac{d^2\bar{u}}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} + \dots = u + \varepsilon \sigma + \varepsilon^2 \left. \frac{d^2\bar{u}}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} + \dots \quad (2.1.1.4)$$

从而

$$K(\bar{u}) = K(\bar{u})|_{\varepsilon=0} + \varepsilon \left. \frac{dK(\bar{u})}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \varepsilon^2 \left. \frac{d^2K}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} + \dots$$

因为

$$\bar{u}|_{\varepsilon=0} = u, \quad \sigma(u) = \left. \frac{d\bar{u}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$$

这样, 由复合求导法则

$$\begin{aligned} \frac{dK(\bar{u})}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \left(\frac{\partial K}{\partial \bar{u}} \frac{d\bar{u}}{d\varepsilon} + \frac{\partial K}{\partial \bar{u}_x} \frac{d\bar{u}_x}{d\varepsilon} + \frac{\partial K}{\partial \bar{u}_{xx}} \frac{d\bar{u}_{xx}}{d\varepsilon} + \dots \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{\partial K}{\partial u} \sigma + \frac{\partial K}{\partial u_x} \sigma_x + \frac{\partial K}{\partial u_{xx}} \sigma_{xx} + \dots \end{aligned}$$

记

$$K'(u)[\sigma] = \frac{\partial K}{\partial u_x} \sigma + \frac{\partial K}{\partial u_x} \sigma_x + \frac{\partial K}{\partial u_{xx}} \sigma_{xx} + \dots \quad (2.1.1.5)$$

这样,

$$\frac{dK(\bar{u})}{d\varepsilon} = K'(u)[\sigma]$$

所以

$$K(\bar{u}) = K(u) + \varepsilon K'(u)[\sigma] + \varepsilon^2 \frac{d^2 K(\bar{u})}{d\varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} + \dots \quad (2.1.1.6)$$

将方程 (2.1.1.4) 和 (2.1.1.6) 代入方程 (2.1.1.2) 中, 然后利用 (2.1.1.1) 化简后有

$$\varepsilon \sigma_t + \varepsilon^2 \frac{d^2 \bar{u}}{d\varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} + \dots = \varepsilon K'(u)[\sigma] + \varepsilon^2 \frac{d^2 K(\bar{u})}{d\varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} + \dots$$

上式消去公因子 ε , 再令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 我们得到

$$\frac{d\sigma}{dt} = K'(u)[\sigma] \quad (2.1.1.7)$$

其中 $K'(u)[\sigma]$ 由公式 (2.1.1.5) 定义。满足上面方程的 σ 称为这个方程的对称。

定理 2.1.1.1 设 $\sigma(u)$ 是偏微分方程 $F(x, t, u, u_x, u_t, \dots) = 0$ 的一个对称, 则 u 是方程的与 σ 相应的不变群的群不变解必须且只须满足

$$F(x, t, u, u_x, u_t, \dots) = 0$$

$$\sigma(u) = 0.$$

定理 2.1.1.2 如果 $g_\varepsilon: u \rightarrow \bar{u}(u, \varepsilon)$ 是单参数不变群, σ 满足对称方程 (2.1.1.7),

记 $\bar{u} = g_\varepsilon u$, 设 \bar{u} 满足

$$\frac{d\bar{u}}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \sigma(u), \quad \bar{u}(u, 0) = u$$

若 u 是非线性演化方程 (2.1.1.1) 的任意一个解, 则 $\bar{u}(u, \varepsilon)$ 是非线性演化方程的一族解。

2.1.2 同伦的相关概念

设 X 与 Y 是拓扑空间, 连续映射 $f: X \rightarrow Y$, 设 X', X'' 是 X 的子空间, Y', Y'' 是 Y 的子空间, 如果映射 $f: X \rightarrow Y$ 适合 $f(X') \subseteq Y', f(X'') \subseteq Y''$, 则记 $f: (X, X', X'') \subseteq (Y, Y', Y'')$, 用 I 表示直线上的区间。

定义 2.1.2.1 同伦

设 f 和 $f': (X, X', X'') \rightarrow (Y, Y', Y'')$ 是两个映射, 如果存在映射 $F: (X * I, X' * I, X'' * I) \rightarrow (Y, Y', Y'')$ 使得 $F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = f'(x)$, 对任意的 $x \in X$ 成立, 则称 f 与 f' 相对于 $(X', X''), (Y', Y'')$ 来说是同伦的。

注 1 当 X', X'', Y', Y'' 是空集时, 称为 (绝对) 同伦。

注 2 映射 f 与 f' 同伦具有明显的几何直观, 即连接 f 到 f' 的一连续变形。

2.2 近似对称约化方法基本思想

考虑含有小参数 ε 的两个自变量 (x, t) 的 k 阶偏微分方程:

$$F(x, t, u, \dots, u_{i_1, i_2, \dots, i_k}; \varepsilon) = F_0(x, t, u, \dots, u_{i_1, i_2, \dots, i_k}) + \varepsilon G(x, t, u, \dots, u_{h_1, h_2, \dots, h_k}) \quad (2.2.1)$$

式中 $i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_p$ 取自 $\{x, t\}$ 的集合。

利用近似对称扰动理论求解偏微分方程 (2.2.1) 的近似对称约化和无穷级数解的步骤如下所示:

首先, 假设偏微分方程 (2.2.1) 有如下形式解

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n \quad (2.2.2)$$

将 (2.2.2) 代入偏微分方程 (2.2.1), 然后根据 ε 的次数合并同类项, 并令 ε 的系数全为零, 从而得到下面的方程组:

$$\begin{aligned}
 O(\varepsilon^0): F_0(x, t, u_0, \dots, u_{0, i_1, j_2, \dots, i_k}) &= 0, \\
 O(\varepsilon^1): F_1(u_1, \dots, u_{1, i_1, j_2, \dots, i_k}) + G_0(u_0, \dots, u_{0, i_1, j_2, \dots, j_p}) &= 0, \\
 O(\varepsilon^2): F_2(u_1, \dots, u_{1, i_1, j_2, \dots, i_k}) + G_1(u_0, \dots, u_{0, i_1, j_2, \dots, j_p}) &= 0, \\
 &\dots\dots\dots \\
 O(\varepsilon^n): F_n(u_1, \dots, u_{1, i_1, j_2, \dots, i_k}) + G_n(u_0, \dots, u_{0, i_1, j_2, \dots, j_p}) &= 0, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

其中, $O(\varepsilon^n)$ 所对应的方程称为所求偏微分方程(2.2.1)的第 n 阶近似对称方程。

其次, 利用李对称理论设方程(2.2.3)的李对称为:

$$V = X \frac{\partial}{\partial x} + T \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{n=0}^{\infty} U_n \frac{\partial}{\partial u_n} \tag{2.2.4}$$

求解其特征函数:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dt}{T} = \frac{du_0}{U_1} = \dots = \frac{du_n}{U_n} = \dots$$

得到的相似解为

$$u_n = a(x, t) + V_n(\xi)b(x, t), (n = 0, 1, \dots)$$

式中 $\xi = c(x, t)$ 。

把求解的 $u_n (n = 0, 1, \dots)$ 代入(2.2.2), 我们得到偏微分方程(2.2.1)的级数约化解是

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n (a(x, t) + V_n b(x, t)). \tag{2.2.5}$$

最后, 将(2.2.5)代入偏微分方程(2.2.1), 我们可以得到 k 阶常微分方程组:

$$\begin{aligned}
 E_0(V_0, V_{0, \xi}, \dots, V_{0, \xi, \xi, \dots, \xi}) &= 0, \\
 E_1(V_0, V_1, V_{0, \xi}, V_{1, \xi}, \dots, V_{0, \xi, \xi, \dots, \xi}, V_{1, \xi, \xi, \dots, \xi}) &= 0, \\
 &\dots\dots\dots \\
 E_n(V_0, \dots, V_n, V_{0, \xi}, \dots, V_{n, \xi}, V_{0, \xi, \xi, \dots, \xi}, V_{n, \xi, \xi, \dots, \xi}) &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\dots\dots\dots (2.2.6)$$

可以通过常微分方程组 (2.2.6) 分别求出 $V_0, V_1, \dots, V_n, n = 2, 3, \dots$, 从而得到偏微分方程 (2.2.1) 的解。

2.3 同伦分析法的基本思想

同伦 (Homotopy) 理论是代数拓扑 (Topology) 学的一个分支。设 $F, G: Z \rightarrow Y$ 是连续映射, I 表示单位区间 $[0, 1]$, 若存在连续映射 $H: Z \otimes I \rightarrow Y$, 使得对任意的 $x \in Z$, 有 $H(x, 0) = F(x)$ 和 $H(x, 1) = G(x)$, 则称 F, G 是同伦映射, 并称 H 为连接 F 和 G 的一个同伦。

考察微分方程

$$N[u(t)] = 0, \tag{2.3.1}$$

其中, N 为非线性算子, t 为时间, $u(t)$ 为未知函数。构造如下的同伦方程

$$(1-q)L[\Phi(t;q) - u_0(t)] = q\hbar H(\eta)N[\Phi(t;q)], \tag{2.3.2}$$

其中, $q \in [0, 1]$ 为嵌入变量, $\Phi(t;q)$ 为 $u(t)$ 的映射函数, \hbar 为非零辅助参数, $H(\eta)$ 为非零辅助函数, $u_0(t)$ 为 $u(t)$ 的初始近似解, L 为辅助线性算子, 它有如下的特性:

$$L(u) = 0, \text{ (当 } u = 0 \text{)} \tag{2.3.3}$$

显然, 当 $q=0$ 和 $q=1$ 时, 根据构造的同伦, 我们分别得到

$$L[\Phi(t;0) - u_0(t)] = 0 \tag{2.3.4}$$

以及

$$N[\Phi(t;1)] = 0 \tag{2.3.5}$$

从而得到

$$\Phi(t;0) = u_0(t), \quad \Phi(t;1) = u(t) \tag{2.3.6}$$

即当 q 从 0 增加到 1 时, $\Phi(t;q)$ 也从方程的初始近似解 $u_0(t)$ 变化到方程的精确

解 $u(t)$ 。在拓扑学中，称这样的持续的变化是连续形变。

对零阶形变方程 (2.3.2) 中的变量 q ，两边 k 次求导，然后令 $q=0$ ，最后除以 $k!$ 。我们得到高阶形变方程

$$L[u_k(t) - \chi_k u_{k-1}(t)] = \hbar H(t) R_k(\bar{u}_{k-1}, t), \quad (2.3.7)$$

其中

$$u_k(t) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \Phi(t; q)}{\partial q^k} \quad (2.3.8)$$

为 k 阶形变导数，并有

$$R_k(\bar{u}_{k-1}, t) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1} N[\Phi(t; q)]}{\partial q^{k-1}} \Big|_{q=0} \quad (2.3.9)$$

且

$$\chi_k = \begin{cases} 0, & k=1 \\ 1, & k > 1 \end{cases} \quad (2.3.10)$$

高阶形变方程为线性方程，其解是

$$u_k(t) = u_k^*(t) + \chi_k u_{k-1}(t) + \mathcal{G}_k(t), \quad (2.3.11)$$

这里 $u_k^*(t)$ 为高阶形变方程的特解， $\mathcal{G}_k(t)$ 为线性算子 L 的基本解。这时我们可以得到方程 (2.3.1) 的同伦级数解：

$$u(t) = u_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t). \quad (2.3.12)$$

第3章 用近似对称约化方法求解扰动Burgers方程

3.1 预备知识

在本章中, 我们来讨论扰动 Burgers 方程[46]

$$u_t = 2uu_x + u_{xx} + \varepsilon\lambda(u^2u_x + uu_{xx} + u_x^2 + u_{xxx}) \quad \varepsilon \ll 1 \quad (3.1.1)$$

的近似对称和无穷级数解, 其中 ε 为较小的实数, λ 是常数。

根据近似对称扰动方法, 非线性偏微分方程的解可以表示成包含小参数的级数和的形式。对于本章所要求解的方程, 我们假设解的一般形式为

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_j \quad (3.1.2)$$

其中, u_j 是 x 和 t 的函数。把 (3.1.2) 代入所要求解的非线性偏微分方程 (3.1.1), 合并 ε 各次幂的系数, 并使其系数值全为 0, 我们可以得到下面的微分方程组:

$$O(\varepsilon^0): u_{0t} - u_{0xx} - 2u_0u_{0x} = 0 \quad (3.1.3.1)$$

$$O(\varepsilon^1): u_{1t} - u_{1xx} - \lambda u_{0xxx} - 2(u_1u_{0x} + u_0u_{1x}) - 3\lambda(u_{0x}^2 + u_0^2u_{0x} + u_0u_{0xx}) = 0 \quad (3.1.3.2)$$

$$O(\varepsilon^2): u_{2t} - u_{2xx} - \lambda u_{2xxx} - 2(u_0u_{2x} + u_2u_{0x} + u_1u_{1x}) - 3\lambda(u_0^2u_{1x} + u_0u_{1xx} + u_1u_{0xx}) - 6\lambda(u_0u_{0x}u_{1x} + u_0u_1u_{0x}) = 0 \quad (3.1.3.3)$$

... ..

$$O(\varepsilon^j): u_{jt} - u_{jxx} - \lambda u_{j-1,xxx} - 2 \sum_{i=0}^j u_i u_{j-1-i,x} - 3\lambda \left(\sum_{i=0}^{j-1} u_i u_{j-1-i,xx} + \sum_{i=0}^{j-2} u_i^2 u_{j-2-i,x} \right) + 6\lambda \left(\sum_{i=0}^{j-3} u_{i,x} u_{j-1-i,x} + \sum_{i=0}^{j-3} \sum_{i=0}^{j-1} u_i u_{i+1} u_{j-1-i,x} \right) = 0 \quad (3.1.3.4)$$

... ..

式中 $u_{-1} = 0$ 。

3.2 扰动Burgers方程的近似对称约化

为了得到上面对称约化方程组的一些精确解, 我们假设方程 (3.1.1) 的李点对称有下面的形式

$$\sigma_j = X \frac{\partial}{\partial x} u_j + T \frac{\partial}{\partial t} u_j - U_j \quad (j=0,1,\dots) \quad (3.2.1)$$

式中 X, T , 和 $U_j (j=0,1,\dots)$ 都是 x, t 和 $u_j (j=0,1,\dots)$ 的函数, 即在下面形式的变换下方程组 (3.1.3) 是不变的

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x, \\ t &\rightarrow t, \\ u_j &= u_j + \varepsilon' \sigma_j + O(\varepsilon'^2) \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

ε' 是小参数。通过这样的一个变换, 方程组 (3.1.3) 的线性化方程组是

$$\sigma_{0t} - \sigma_{0xx} - 2(u_0 \sigma_{0x} + \sigma_0 u_{0x}) = 0 \quad (3.2.3.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1t} - \sigma_{1xx} - \lambda \sigma_{1xxx} - 2(u_0 \sigma_{1x} + \sigma_1 u_{0x} + \sigma_{1x} u_1 + \sigma_0 u_{1x}) - 3\lambda(u_0^2 \sigma_{1x} + \sigma_1 u_{0xx} + u_0 \sigma_{0xx}) \\ - 6\lambda(u_{0x} \sigma_{1x} + u_0 \sigma_0 u_{0x}) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.3.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{2t} - \sigma_{2xx} - \lambda \sigma_{2xxx} - 2(u_0 \sigma_{3x} + \sigma_1 u_{2x} + u_1 \sigma_{1x} + \sigma_2 u_{0x} + u_1 \sigma_{1x} + u_2 \sigma_0) - 3\lambda(u_0^2 \sigma_{1x} + u_0 \sigma_{1xx} \\ + \sigma_1 u_{0xx} + u_1 \sigma_{0xx} + \sigma_0 u_{1xx}) - 6\lambda(u_{1x} \sigma_0 u_0 + u_1 u_0 \sigma_{0x} + \sigma_0 u_1 u_{0x} + \sigma_1 u_0 u_{0x} + u_{0x} \sigma_{1x}) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.3.3)$$

... ..

$$\begin{aligned} \sigma_{jt} - \sigma_{jxx} - \lambda \sigma_{j-1,xxx} - 2 \left(\sum_{i=0}^{j-1} u_i \sigma_{j-1-i,x} + \sum_{i=0}^{j-1} u_{i,x} \sigma_{j-1-i} \right) - 3\lambda \left(\sum_{i=0}^{j-1} u_i \sigma_{j-1-i,xx} + \sum_{i=0}^{j-1} \sigma_i u_{j-1-i,xx} \right) \\ - 6\lambda \sum_{i=0}^{j-3} \sum_{s=i+1}^{j-1} u_i u_s \sigma_{j-1-s,x} = 0 \end{aligned} \quad (3.2.3.4)$$

... ..

把 (3.2.1)、(3.2.2) 和在方程组 (3.1.3) 中求的 $u_j (j=0,1,\dots)$ 代入到原方程, 可得到 $u_1, u_{1x}, u_{1xx}, \dots, u_2, u_{2x}, u_{2xx}, \dots$ 的多项式。再令多项式的各项系数为零, 就得到 X, T , 和 $U_j (j=0,1,\dots)$ 应满足的条件

$$\begin{aligned} X &= \frac{cx}{2} + x_0, T = ct + t_0, U_0 = -\frac{cu_0}{2}, U_1 = -cu_1, \\ U_2 &= -\frac{3cu_2}{2}, U_3 = -2cu_3, U_4 = -\frac{5cu_4}{2}, \dots, U_j = -\frac{(j+1)u_j}{2}, \dots \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

其中 x_0, c 和 t_0 是任意的常数。通过解对应的特征方程

$$\frac{dx}{X} = \frac{dt}{T} = \frac{du_0}{U_0} = \dots = \frac{du_n}{U_n} = \dots$$

得到所求方程的相似解, 进而得到其无穷级数解。

3.3 扰动Burgers 方程的无穷级数解

根据 x_0, t_0, c , 下面分三类情形来讨论。

第一类: $c \neq 0, x_0 \neq 0, t_0 \neq 0$

在这种情形下, 特征方程具有下面的形式

$$\frac{dx}{cx/2+x_0} = \frac{dt}{ct+t_0} = \frac{du_0}{-cu_0/2} = \dots = \frac{du_n}{-(n+1)u_n/2} = \dots \quad (3.3.1)$$

求解特征方程 (3.3.1), 我们得到这个对称对应的相似变量:

$$\xi = \frac{cx + 2x_0}{\sqrt{ct + t_0c}} \quad (3.3.2)$$

从而方程组 (3.1.3) 的群不变解是

$$\begin{aligned} u_0 &= (ct+t_0)^{-1/2} V_0(\xi), u_1 = (ct+t_0)^{-1} V_1(\xi), u_2 = (ct+t_0)^{-3/2} V_2(\xi) \\ u_3 &= (ct+t_0)^{-2} V_3(\xi), u_4 = (ct+t_0)^{-5/2} V_4(\xi), \dots, u_j = (ct+t_0)^{-(j+1)/2} V_j(\xi), \dots \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

相对应的, 所求方程 (3.1.1) 有下面形式的解

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j (ct+t_0)^{-(j+1)} V_j(\xi) \quad (3.3.4)$$

从而偏微分方程组 (3.2.3) 相似约化为常微分方程组:

$$O(\varepsilon^0): V_{0\xi\xi} = -\frac{c\xi}{2} V_{0\xi} - 2V_0V_{0\xi} - \frac{c}{2} V_0 \quad (3.3.5.1)$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^1): V_{1\xi\xi} = & -\frac{c\xi}{2} V_{1\xi} - 2(V_0V_{1\xi} + V_1V_{0\xi}) - 3\lambda(V_0V_{0\xi\xi} + V_{0\xi}^2 + V_0^2V_{0\xi}) \\ & -cV_1 - \lambda V_{0\xi\xi\xi} \end{aligned} \quad (3.3.5.2)$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^2): V_{2\xi\xi} = & -\frac{c\xi}{2} V_{2\xi} - 3\lambda(V_1V_{0\xi\xi} + V_0^2V_{1\xi} + V_0V_{1\xi\xi}) - 2(V_1V_{1\xi} + V_0V_{2\xi} + V_2V_{0\xi}) \\ & -6\lambda(V_{0\xi}V_{1\xi} + V_0V_1V_{0\xi}) - \frac{3c}{2} V_{2\xi} - \lambda V_{1\xi\xi\xi} \end{aligned} \quad (3.3.5.3)$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^3): V_{3\xi\xi} = & -\frac{c\xi}{2} V_{3\xi} - 3\lambda(V_2V_{0\xi\xi} + V_{1\xi}^2 + V_1V_{1\xi\xi} + V_0^2V_{2\xi} + V_0V_{2\xi\xi} + V_1^2V_{0\xi}) \\ & -2(V_2V_{1\xi} + V_1V_{2\xi} + V_3V_{0\xi} + V_0V_{3\xi}) - 6\lambda(V_0V_1V_{1\xi} + V_{0\xi}V_{2\xi} + V_0V_2V_{0\xi}) \\ & -2cV_3 - \lambda V_{2\xi\xi\xi} \end{aligned}$$

(3.3.5.4)

... ..

$$\begin{cases} O(\varepsilon^j): V_{j\xi\xi} = -\frac{c\xi}{2}V_{j\xi} - \frac{j+1}{2}V_j - \lambda V_{j-1,\xi\xi\xi} - 2\sum_{i=0}^{j-1} V_i V_{j-i,\xi} \\ \quad - 3\lambda\left(\sum_{i=0}^{j-1} V_i V_{j-1-i,\xi\xi} + 2\sum_{i=0}^{j-3} V_{i,\xi} V_{j-1-i,\xi} + \sum_{i=0}^{j-1} V_i \sum_{s=0}^{j-1-i} V_s V_{j-1-i-s,\xi}\right) \\ O(\varepsilon^{j+1}): V_{j\xi\xi} = -\frac{c\xi}{2}V_{j\xi} - \frac{j+1}{2}V_j - \lambda V_{j-1,\xi\xi\xi} - 2\sum_{i=0}^{j-1} V_i V_{j-i,\xi} \\ \quad - 3\lambda\left(\sum_{i=0}^{j-1} V_i V_{j-1-i,\xi\xi} + 2\sum_{i=0}^{j-3} V_{i,\xi} V_{j-1-i,\xi} + \sum_{i=0}^{j-1} V_i \sum_{s=0}^{j-1-i} V_s V_{j-1-i-s,\xi} + V_{(j+1)/2,\xi}^2\right) \end{cases} \quad (3.3.5.5)$$

$$j = 0, 2, 4, \dots, 2n, \dots$$

式中, $V_{-1,\xi} = 0, V_{-2,\xi} = 0, V_{-1,\xi\xi\xi} = 0, V_{-1,\xi\xi} = 0, V_{-1} = 0$ 。

从而把 $O(\varepsilon^n)$ 所对应的方程约化为二阶的常微分方程, 并且 V_n 可以通过

V_0, V_1, \dots, V_{n-1} , 来解出。并且方程 (3.3.5.1) 有 Kummer 方程解

$$\begin{aligned} V_0 = & \frac{2C_1\left(\frac{c}{2} + C_1\right)C_2 K_1\left(\frac{3c+2C_1}{2c}, \frac{3}{2}, -\frac{c\xi^2}{4}\right) - 2c\left(-\frac{c}{2} - C_1\right)K_2\left(\frac{3c+2C_1}{2c}, \frac{3}{2}, -\frac{c\xi^2}{4}\right)}{c^2\xi\left(K_1\left(\frac{3c+2C_1}{2c}, \frac{3}{2}, -\frac{c\xi^2}{4}\right) + K_2\left(\frac{3c+2C_1}{2c}, \frac{3}{2}, -\frac{c\xi^2}{4}\right)\right)} \\ & + \frac{2\left(C_1 K_1\left(\frac{3c+2C_1}{2c}, \frac{3}{2}, -\frac{c\xi^2}{4}\right) + K_2\left(\frac{3c+2C_1}{2c}, \frac{3}{2}, -\frac{c\xi^2}{4}\right)\right)}{c\xi\left(K_1\left(\frac{3c+2C_1}{2c}, \frac{3}{2}, -\frac{c\xi^2}{4}\right) + K_2\left(\frac{3c+2C_1}{2c}, \frac{3}{2}, -\frac{c\xi^2}{4}\right)\right)} \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

其中, C_1 和 C_2 是任意的常数, $K_1(\mu, \nu, z)$ 和 $K_2(\mu, \nu, z)$ 这两种形式的 Kummer 函数是满足下面这个方程的

$$zy'(z) + (\nu - z)y'(z) - \mu y(z) = 0 \quad (3.3.7)$$

特别的, 在 t 无限增大的时候, 一般项是无穷小的, 所以解 (3.3.4) 是收敛的。

第二类: $c = 0, x_0 \neq 0, t_0 \neq 0$

这时 (3.2.4) 变成下面的形式

$$X = x_0, T = t_0, U_0 = 0, U_1 = 0,$$

$$U_2=0, U_3=0, U_4=0, \dots, U_j=0, \dots$$

特征方程为

$$\frac{dx}{x_0} = \frac{dt}{t_0}$$

求解特征方程, 得到这个对称对应的相似量是

$$\xi = -\frac{-tx_0 + t_0x}{t_0}$$

从而方程组的群不变解是

$$u_0 = V_0(\xi), u_1 = V_1(\xi), u_2 = V_2(\xi), u_3 = V_3(\xi),$$

$$u_4 = V_4(\xi), \dots, u_j = V_j(\xi), \dots$$

代入解的表达式 (3.1.2) 中, 得到方程的相似约化解是

$$u_0 = e^{x^2}. \tag{3.3.8}$$

从而方程 (3.2.3) 的相似约化方程组是

$$O(\varepsilon^0): V_{0\xi\xi} = \left(-2V_0 - \frac{x_0}{t_0}\right)V_{0\xi} \tag{3.3.9.1}$$

$$O(\varepsilon^1): V_{1\xi\xi} = \frac{-x_0}{t_0}V_{1\xi} - 2(V_0V_{1\xi} + V_1V_{0\xi}) - 3\lambda(V_{0\xi}^2 + V_0V_{0\xi\xi} + V_0^2V_{0\xi}) - \lambda V_{0\xi\xi\xi} \tag{3.3.9.2}$$

$$O(\varepsilon^2): V_{2\xi\xi} = \frac{-x_0}{t_0}V_{2\xi} - \lambda V_{1\xi\xi\xi} - 2(V_2V_{0\xi} + V_1V_{1\xi} + V_0V_{2\xi}) - 3\lambda(V_1V_{0\xi\xi} + V_0^2V_{1\xi} + V_0V_{1\xi\xi}) - 6\lambda(V_{0\xi}V_{1\xi} + V_0V_1V_{0\xi}) \tag{3.3.9.3}$$

$$O(\varepsilon^3): V_{3\xi\xi} = -\frac{x_0}{t_0}V_{3\xi} - \lambda V_{2\xi\xi\xi} - 2(V_3V_{0\xi} + V_2V_{1\xi} + V_1V_{2\xi} + V_0V_{3\xi}) - 6\lambda(V_0V_1V_{1\xi} + V_{0\xi}V_{2\xi} + V_0V_2V_{0\xi}) - 3\lambda(V_0V_{2\xi\xi} + V_{1\xi}^2 + V_1V_{1\xi\xi} + V_2V_{0\xi\xi} + V_0^2V_{2\xi} + V_1^2V_{0\xi}) \tag{3.3.9.4}$$

... ..

$$\begin{cases} O(\varepsilon^j): V_{j\xi\xi} = -\frac{x_0}{t_0} V_{j\xi} - \lambda V_{j-1,\xi\xi\xi} - 2 \sum_{i=0}^{j-1} V_i V_{j-i,\xi} \\ \quad - 3\lambda \left(\sum_{i=0}^{j-1} V_i V_{j-1-i,\xi\xi} + 2 \sum_{i=0}^{j-3} V_{i,\xi} V_{j-1-i,\xi} + \sum_{i=0}^{j-1} V_i \sum_{s=0}^{j-1-i} V_s V_{j-1-i-s,\xi} \right) \\ O(\varepsilon^{j+1}): V_{j\xi\xi} = -\frac{x_0}{t_0} V_{j\xi} - \lambda V_{j-1,\xi\xi\xi} - 2 \sum_{i=0}^{j-1} V_i V_{j-i,\xi} \\ \quad - 3\lambda \left(\sum_{i=0}^{j-1} V_i V_{j-1-i,\xi\xi} + 2 \sum_{i=0}^{j-3} V_{i,\xi} V_{j-1-i,\xi} + \sum_{i=0}^{j-1} V_i \sum_{s=0}^{j-1-i} V_s V_{j-1-i-s,\xi} + V_{(j+1)/2,\xi}^2 \right) \end{cases} \quad (3.3.9.5)$$

$$j = 0, 2, 4, \dots, 2n, \dots$$

... ..

其中 $V_{-1,\xi} = 0, V_{-2,\xi} = 0, V_{-1,\xi\xi\xi} = 0, V_{-1,\xi\xi} = 0, V_{-1} = 0$ 。

从而把 $O(\varepsilon^n)$ 所对应的方程约化为二阶的常微分方程，并且 V_n 可以通过 V_0, V_1, \dots, V_{n-1} ，求解出，并且方程 (3.3.9.1) 有 \tanh 函数解：

$$V_0 = \frac{1}{2} \frac{-C_1 x_0 - 2 \tanh\left(\frac{\xi + C_2}{C_1}\right) t_0}{C_1 t_0}$$

式中 C_1, C_2 是任意的常数。

第三类： $x_0, c = 0, t_0 \neq 0$

在这种情况下，(3.2.4) 成为下面的形式

$$\begin{aligned} X = 0, T = t_0, U_0 = 0, U_1 = 0, \\ U_2 = 0, U_3 = 0, U_4 = 0, \dots, U_j = 0, \dots \end{aligned}$$

这时，方程的相似变量为

$$\xi = x$$

相似解为

$$u_0 = V_0(\xi), u_1 = V_1(\xi), u_2 = V_2(\xi), u_3 = V_3(\xi), u_4 = V_4(\xi), \dots, u_j = V_j(\xi), \dots$$

从而这个所求方程相似约化解为

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j V_j(\xi) \quad (3.3.10)$$

相对应的相似约化方程是

$$O(\varepsilon^0): V_{0\xi\xi} = -2V_0V_{0\xi} \quad (3.3.11.1)$$

$$O(\varepsilon^1): V_{1\xi\xi} = -\lambda V_{0\xi\xi\xi} - 2(V_0V_{1\xi} + V_1V_{0\xi}) - 3\lambda(V_{0\xi}^2 + V_0V_{0\xi\xi} + V_0^2V_{0\xi}) \quad (3.3.11.2)$$

$$O(\varepsilon^2): V_{2\xi\xi} = -\lambda V_{1\xi\xi\xi} - 2(V_0V_{2\xi} + V_1V_{1\xi} + V_2V_{0\xi}) - 3\lambda(V_0^2V_{1\xi} + V_0V_{1\xi\xi} + V_1V_{0\xi\xi}) - 6\lambda(V_{0\xi}V_{1\xi} + V_0V_1V_{0\xi}) \quad (3.3.11.3)$$

$$O(\varepsilon^3): V_{3\xi\xi} = -\lambda V_{2\xi\xi\xi} - 2(V_0V_{3\xi} + V_2V_{1\xi} + V_3V_{0\xi} + V_1V_{2\xi}) - 3\lambda(V_{1\xi}^2 + V_1V_{1\xi\xi} + V_1^2V_{0\xi} + V_2V_{0\xi\xi} + V_0V_{2\xi\xi} + V_0^2V_{2\xi}) - 6\lambda(V_0V_1V_{1\xi} + V_0V_2V_{0\xi} + V_{2\xi}V_{0\xi})$$

$$(3.3.11.4)'$$

... ..

$$\left\{ \begin{array}{l} O(\varepsilon^j): V_{j\xi\xi} = -\lambda V_{j-1,\xi\xi\xi} - 2\sum_{i=0}^{j-1} V_i V_{j-i,\xi} \\ \quad - 3\lambda(\sum_{i=0}^{j-1} V_i V_{j-1-i,\xi\xi} + 2\sum_{i=0}^{j-3} V_{i,\xi} V_{j-1-i,\xi} + \sum_{i=0}^{j-1} V_i \sum_{s=0}^{j-1-i} V_s V_{j-1-i-s,\xi}) \\ O(\varepsilon^{j+1}): V_{j\xi\xi} = -\lambda V_{j-1,\xi\xi\xi} - 2\sum_{i=0}^{j-1} V_i V_{j-i,\xi} \\ \quad - 3\lambda(\sum_{i=0}^{j-1} V_i V_{j-1-i,\xi\xi} + 2\sum_{i=0}^{j-3} V_{i,\xi} V_{j-1-i,\xi} + \sum_{i=0}^{j-1} V_i \sum_{s=0}^{j-1-i} V_s V_{j-1-i-s,\xi} + V_{(j+1)/2,\xi}^2) \end{array} \right. \quad (3.3.11.5)$$

$$j = 0, 2, 4, \dots, 2n, \dots$$

... ..

其中, $V_{-1,\xi} = 0, V_{-2,\xi} = 0, V_{-1,\xi\xi\xi} = 0, V_{-1,\xi\xi} = 0, V_{-1} = 0$ 。

从而把 $O(\varepsilon^n)$ 所对应的方程约化为二阶的常微分方程, 并且 V_n 可以通过

V_0, V_1, \dots, V_{n-1} , 来解出。特别的, 方程 (3.3.11.1) 有 \tanh 函数解:

$$V_0 = \frac{\tanh\left(\frac{\xi + C_2}{C_1}\right)}{C_1}$$

式中, C_1, C_2 是任意的常数。

3.4 本章小结

在这一章里，我们用近似对称扰动方法研究了扰动 Burgers 方程。扰动 Burgers 方程相对应的相似约化方程可以通过 maple 数学软件得到，并且相似约化方程的一般形式及解的一般形式也都分别求了出来。幸运的是，我们也得到了零阶相似约化方程的解。

然而，由于很难求证级数解的本身的收敛性，所以我们在文中没有提到解的收敛性。但是从上面的计算可以看出我们能用近似对称扰动理论求解扰动非线性偏微分方程，得到无穷级数解析解。

第4章 同伦分析法在非线性偏微分方程中的应用

同伦分析法是一种新的、一般性的求解强非线性问题的解析近似方法。它在方法上彻底抛弃了小参数的假设，从根本上克服了传统摄动法的局限性，在逻辑上包含了其他“非摄动方法”，从而更具一般性。该方法被成功用于解决工程技术中的许多非线性问题。在这一章中我们主要用同伦分析法得到非线性偏微分方程的孤立波解的高精度近似解析解。另外，我们也提出了一种有效地判断所得近似解近似程度的方法，在实际应用中非常方便。

文中介绍的方法，均可以在计算机代数系统如 Mathematica、Maple 等中得到完全实现，可以在短时间内得到某个非线性问题的高精度近似解析解。

4.1 近似长波方程的求解与其近似解的模拟

4.1.1 近似长波方程的求解

在这一节中我们利用同伦分析法求解得到了近似长波方程组的孤波解的近似解析解，同时我们把所得的近似解与其它方法得到的方程的精确解做了对比，发现二者非常接近。

考虑下面近似长波方程组[47]:

$$\begin{cases} u_t - uu_x - v_x + u_{xx} / 2 = 0 \\ v_t - (uv)_x - v_{xx} / 2 = 0 \end{cases} \quad (4.1.1)$$

方程组有下面的孤波解

$$\begin{cases} u(x,t) = \alpha \tanh[(\alpha x + \beta t + \gamma)/2] / 2 + \alpha / 2 + c \\ v(x,t) = \alpha^2 \operatorname{sech}^2[(\alpha x + \beta t + \gamma)/2] / 4 \end{cases} \quad (4.1.2)$$

为了简便起见，方程的孤波解中我们选取 $\alpha = 2, \gamma = 0, c = 0$ 。根据同伦分析法的理论，我们选取下面的值作为所求方程组的初始值：

$$\begin{cases} u_0 = u(x,0) = \tanh(x) + 1 \\ v_0 = v(x,0) = \operatorname{sech}^2(x) \end{cases} \quad (4.1.3)$$

定义线性微分算符

$$L_u[\phi(x,t;q)] = \frac{\partial \phi(x,t;q)}{\partial t}, \quad L_v[\phi(x,t;q)] = \frac{\partial \phi(x,t;q)}{\partial t} \quad (4.1.4)$$

L_u, L_v 满足约束条件

$$L_u[C_1]=0, \quad L_v[C_1]=0 \quad (4.1.5)$$

其中 C_1 和 C_2 为常数, ϕ, φ 为 x, t 的函数。并且定义下面的非线性算子

$$N_u[\phi(x,t;q), \varphi(x,t;q)] = \frac{\partial \phi(x,t;q)}{\partial x} - \phi(x,t;q) \frac{\partial \phi(x,t;q)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi(x,t;q)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(x,t;q)}{\partial x^2} \quad (4.1.6)$$

和

$$N_v[\phi(x,t;q), \varphi(x,t;q)] = \frac{\partial \varphi(x,t;q)}{\partial x} - \phi(x,t;q) \frac{\partial \varphi(x,t;q)}{\partial x} - \frac{\partial \phi(x,t;q)}{\partial x} \varphi(x,t;q) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x,t;q)}{\partial x^2} \quad (4.1.7)$$

式中, $q \in [0, 1]$, $\phi(x,t;q)$ 和 $\varphi(x,t;q)$ 是 x, t 和 q 的函数。 \hbar_u, \hbar_v 为非零的辅助参数。

我们假定 $H_u(x,t)=1, H_v(x,t)=1$, 构造近似长波方程组的零阶形变方程:

$$(1-q)L_u[\phi(x,t;q) - u_0(x,t)] = q\hbar_u N_u(\phi(x,t;q), \varphi(x,t;q)) \quad (4.1.8)$$

$$(1-q)L_v[\varphi(x,t;q) - v_0(x,t)] = q\hbar_v N_v(\phi(x,t;q), \varphi(x,t;q)) \quad (4.1.9)$$

从上面两式中可以看出, 当 $q=0$ 及 $q=1$ 时, 有下面的结论:

$$\begin{aligned} \phi(x,t;0) &= u_0(x,t), \varphi(x,t;0) = v_0(x,t), \\ \phi(x,t;1) &= u(x,t), \varphi(x,t;1) = v(x,t) \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

当 \hbar_u 和 \hbar_v 都选择合适的数值, 且 $n \geq 1$ 时有

$$u_n(x,t) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \phi(x,t;q)}{\partial q^n} \Big|_{q=0} \quad (4.1.11)$$

和

$$v_n(x,t) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \varphi(x,t;q)}{\partial q^n} \Big|_{q=0} \quad (4.1.12)$$

并且我们可以得到如下两式

$$\phi(x,t;q) = u_0(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)q^n, \quad \varphi(x,t;q) = v_0(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,t)q^n \quad (4.1.13)$$

在 $q=1$ 时均是收敛的。从而我们得到

$$u(x,t) = u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x,t), \quad v(x,t) = v_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x,t) \quad (4.1.14)$$

两个零阶形变方程 (4.1.8), (4.1.9) 两边对 q 求导 n 次, 然后同除以 $n!$, 取 $q=0$,

可得到 n 阶形变方程

$$\begin{aligned} L_u [u_n(x,t) - \chi_n u_{n-1}(x,t)] &= \hbar_u R_n^u \left(\vec{u}_{n-1}, \vec{v}_{n-1} \right), \\ L_v [v_n(x,t) - \chi_n v_{n-1}(x,t)] &= \hbar_v R_n^v \left(\vec{u}_{n-1}, \vec{v}_{n-1} \right) \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

式中

$$R_n^u \left(\vec{u}_{n-1}, \vec{v}_{n-1} \right) = \frac{\partial u_{n-1}(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=0}^{n-1} u_i(x,t) \frac{\partial u_{n-1-i}(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial v_{n-1}(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_{n-1}(x,t)}{\partial x^2} \quad (4.1.16)$$

$$R_n^v \left(\vec{u}_{n-1}, \vec{v}_{n-1} \right) = \frac{\partial v_{n-1}(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=0}^{n-1} u_i(x,t) \frac{\partial v_{n-1-i}(x,t)}{\partial x} - \sum_{i=0}^{n-1} v_i(x,t) \frac{\partial u_{n-1-i}(x,t)}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_{n-1}(x,t)}{\partial x^2} \quad (4.1.17)$$

其中 $\chi_n = \begin{cases} 0, & n \leq 1 \\ 1, & n > 1 \end{cases}$

当 $n \geq 1$ 时, n 阶形变方程 (4.1.15) 的解变成下面的形式

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= \chi_n u_{n-1}(x,t) + \hbar_u L^{-1} \left[R_n^u \left(\vec{u}_{n-1}, \vec{v}_{n-1} \right) \right], \\ v_n(x,t) &= \chi_n v_{n-1}(x,t) + \hbar_v L^{-1} \left[R_n^v \left(\vec{u}_{n-1}, \vec{v}_{n-1} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

从上面两式可以看出方程组的解包含两个参数 \hbar_u, \hbar_v 。可通过调节两个参数的值得使得 u_n, v_n 都收敛。为了计算上方便, 这里取 $\hbar_u = \hbar_v = \hbar$ 。这样, $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 的值只取决于 \hbar 的选取。为了得到方程组的解, 我们需要求 $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ 和 $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ 的值, 即将 (4.1.18) 代入构造的同伦方程中, 提取 q 的系数, 得到如下方程:

$$\begin{cases} u_{1t} = \frac{1}{2}\hbar \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \hbar u_0 \frac{\partial u_0}{\partial t} + \hbar \frac{\partial u_0}{\partial t} - \hbar \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ v_{1t} = -\frac{1}{2}\hbar \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \hbar \frac{\partial v_0}{\partial t} - \hbar v_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} - \hbar u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{cases} \quad (4.1.19)$$

$$\begin{cases} u_{2t} = (\hbar+1) \frac{\partial u_1}{\partial t} - \hbar \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{1}{2}\hbar \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \hbar \left(u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \\ v_{2t} = (\hbar+1) \frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{1}{2}\hbar \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \hbar \left(u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + u_1 \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (4.1.20)$$

$$\begin{cases} u_{3t} = (1+\hbar) \frac{\partial u_2}{\partial t} - \hbar \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{1}{2}\hbar \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \hbar \left(u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \\ v_{3t} = (1+\hbar) \frac{\partial v_2}{\partial t} - \frac{1}{2}\hbar \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - \hbar \left(v_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + u_2 \frac{\partial v_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \\ \vdots \end{cases} \quad (4.1.21)$$

归纳得到

$$\begin{cases} u_{nt} = (\hbar+1) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial t} - \hbar \frac{\partial v_{n-1}}{\partial x} + \frac{1}{2}\hbar \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} - \hbar \left(\sum_{i=0}^{n-1} u_i \frac{\partial u_{n-1-i}}{\partial x} \right) \\ v_{nt} = (\hbar+1) \frac{\partial v_{n-1}}{\partial t} - \frac{1}{2}\hbar \frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial x^2} - \hbar \left(\sum_{i=0}^{n-1} u_i \frac{\partial v_{n-1-i}}{\partial x} + \sum_{i=0}^{n-1} v_i \frac{\partial u_{n-1-i}}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (4.1.22)$$

通过 maple 软件我们可以很容易求得 $u_i, v_i (i=1,2,3,\dots)$ 。

4.1.2 近似长波方程的数值解模拟

把定义的初始值

$$\begin{cases} u_0 = u(x,0) = \tanh(x) + 1 \\ v_0 = v(x,0) = \sec h^2(x) \end{cases}$$

代入 (4.1.19) (4.1.20) 和 (4.1.21) 中得到

$$\begin{cases} u_1(x,t) = -\frac{2\hbar t}{\cosh(2x)+1} \\ v_1(x,t) = \frac{8\hbar \sinh(x)t}{\cosh(3x)+3\cosh(x)} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} u_2 &= \frac{-\hbar t (\hbar t \sin \hbar(x) + \cosh(x) \hbar + \cosh(x))}{\cosh(x)^3} \\ v_2 &= \frac{\hbar t (2 \cosh(x) \sinh(x) \hbar + 2 \cosh(x) \sinh(x) + 2 \hbar \cosh(x)^2 t - 3 \hbar t)}{\cosh(x)^4} \\ u_3 &= \frac{\hbar t (6 \hbar \cosh(x) t \sinh(x) (\hbar + 1) + \hbar \cosh(x)^2 (3 \hbar + 2 \hbar t^2 + 6) + 3 \cosh(x)^2 + 2 \hbar^2 t^2)}{3 \cosh(x)^4} \\ v_3 &= \frac{2 \hbar t \left(3 \sinh(x) \cosh(x)^2 (\hbar^2 + 1) - 2 \hbar^2 \sinh(x) t^2 (3 - \cosh(x)^2) \right. \\ &\quad \left. + 6 \sinh(x) \hbar \cosh(x)^2 + 6 \hbar t \cosh(x)^3 (\hbar + 1) - 9 t \cosh(x) \hbar (\hbar - 1) \right)}{3 \cosh(x)^5} \end{aligned} \right.$$

由于篇幅所限，我们只列出 $u_i, v_i (i=1, 2, 3)$ 的值。

4.1.3 \hbar 值的选取

当 u_n, v_n 的级数收敛时，其函数必为近似长波方程组的解，所以必须保证 u_n, v_n 的级数收敛。

任给一点 (x, t) ，则 u_n, v_n 在该点的值是 \hbar 的幂函数。如果存在某个区间 \mathfrak{R}_\hbar ，使得对于任一 $\hbar \in \mathfrak{R}_\hbar$ ，该幂级数均收敛于同一个值，则在区间 \mathfrak{R}_\hbar （成为 \hbar 的有效区间）内， $u_n(x, t) \square \hbar, v_n(x, t) \square \hbar$ 平行于 \hbar 轴，所以通过观察该曲线的图像（称为 \hbar 曲线），便可以选择合适的 \hbar 值以保证级数的收敛，遗憾的是，尽管在直观上我们认为这样选择 \hbar 值保证级数收敛是正确的，但并没有得到理论上的严格证明。

图1为 $(x, t) = (13.5, 5.5)$ 时 u, u_x, u_{xx} 的曲线图，从图中可以看出大约在 $-2.5 < \hbar < 2.5$ 范围内级数收敛，图2为 $(x, t) = (13.5, 5.5)$ 时， v, v_x, v_{xx} 的曲线图，从图中可以看出也是在大约 $-2.5 < \hbar < 2.5$ 范围内时级数是收敛的。

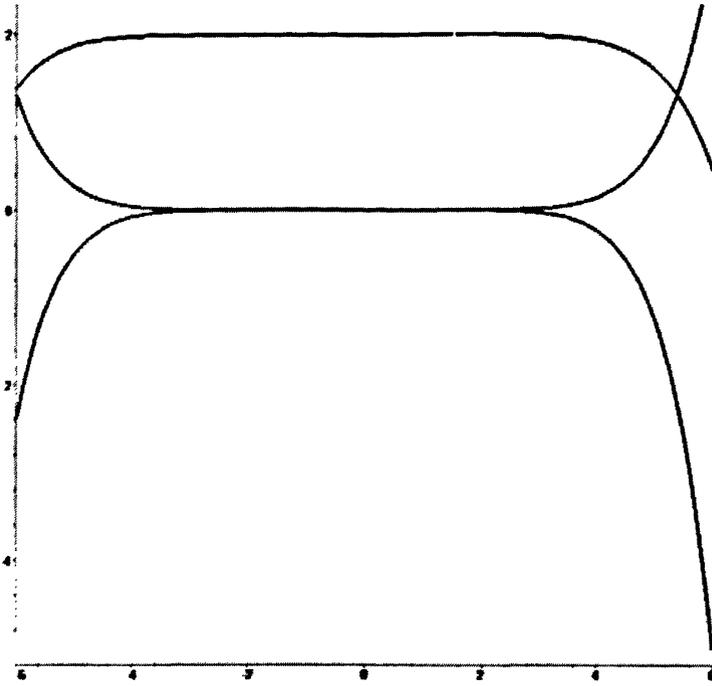


图 1 在 $(x, t) = (13.5, 5.5)$ 时, u 的 h 曲线图。

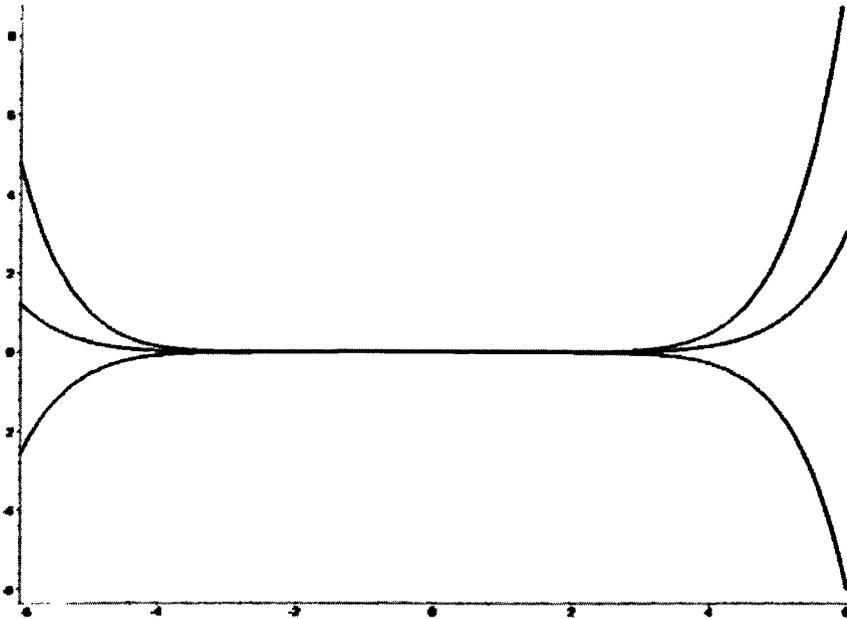


图 2 在 $(x, t) = (13.5, 5.5)$ 时, v 的 h 曲线图。

一般来说在同伦分析法中, 我们可以根据需要调整和控制收敛的区间和程度。

4.1.4 解的有效性检验

在实际计算中，我们不可能计算无限多项，只能在某一阶截断，因此得到的解析解是非线性耦合方程组的近似解，为了明确所求近似解的近似程度，我们通过 maple 软件计算得到当 $\hbar = -1.8$ 时， u, v 的 8 阶近似解，和其当 $\alpha = 2, \gamma = 0, c = 0$ 时的孤波解

$$\begin{cases} u(x,t) = \alpha \tanh[(\alpha x + \beta t + \gamma)/2]/2 + \alpha/2 + c \\ v(x,t) = \alpha^2 \operatorname{sech}^2[(\alpha x + \beta t + \gamma)/2]/4 \end{cases}$$

与精确解进行比较。从图 3 和图 4 中可以看出所求得的近似解与孤波解是十分吻合的。

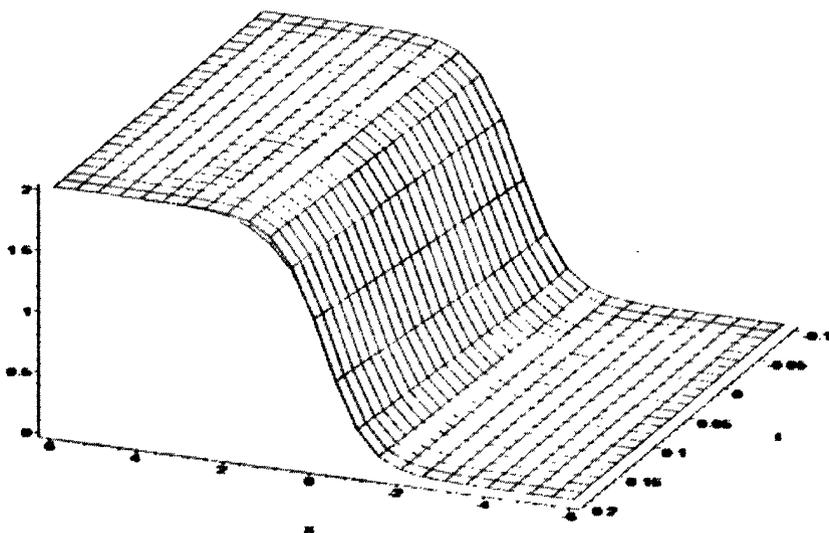


图3 当 $\hbar = -1.8$ 时， u 的 8 阶近似解与孤波解中 u 值的比较

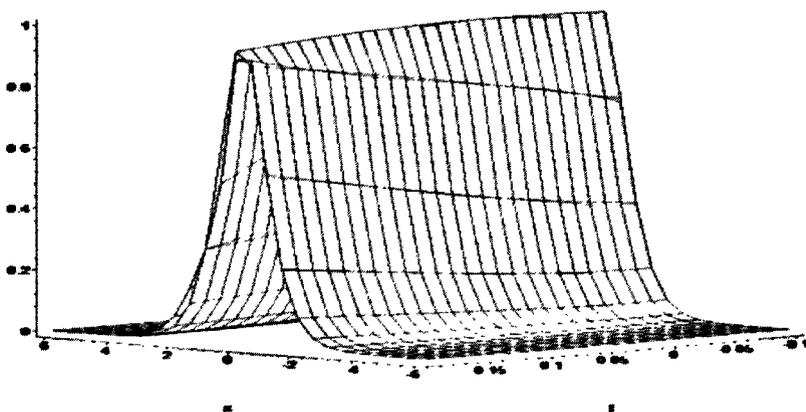


图4 当 $\hbar = -1.8$ 时， v 的 8 阶近似解与孤波解中 v 值的比较。

为了更好的说明同伦分析法在求解非线性偏微分方程组得到的近似解准确性，下面用图 5，图 6 的三维图，表示了精确解和用同伦分析法得到的近似解的绝对误差。

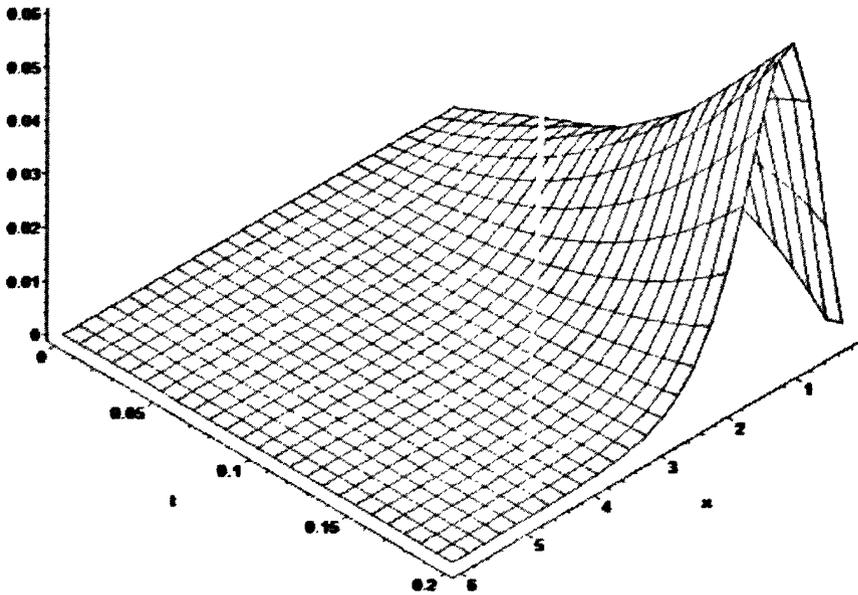


图5 当 $\hbar = -1.8$ 时， u 的 8 阶近似解与孤波解中 u 值的差的绝对值。

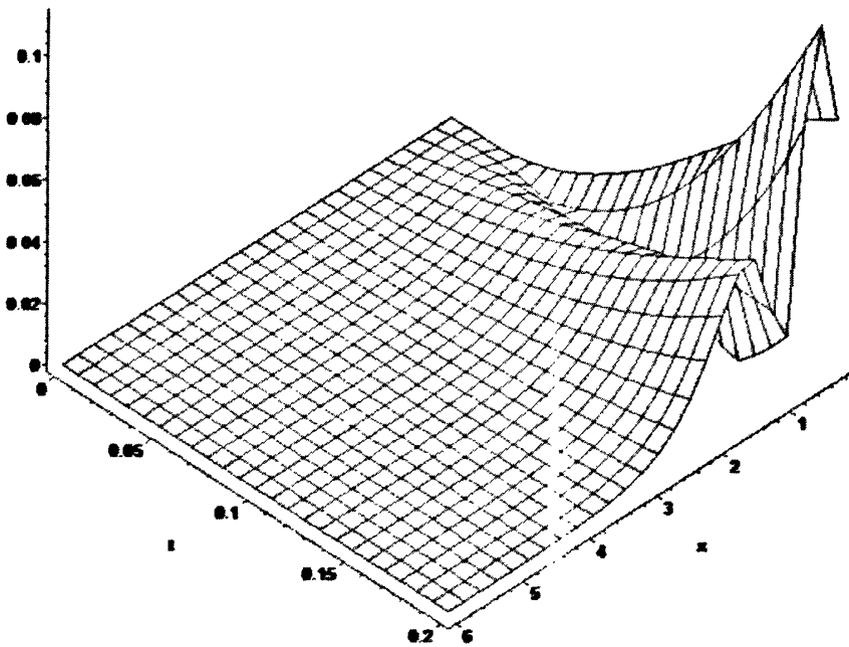


图 6 当 $\hbar = -1.8$ 时， v 的 8 阶近似解与孤波解中 v 值的差的绝对值比较。

4.1.5 本节小结

本节用同伦分析法得到了近似长波方程组的近似解析解, 所得到的结果在图形上与原方程组的精确解十分吻合, 并且其差的绝对值数值很小, 说明所求得的近似解是很接近原方程组的精确解的, 表明同伦分析法对于求解非线性耦合方程组的近似解析解十分有效。同伦分析法借助计算机代数系统 Mathematica 或 Maple 非常容易实现, 说明这种方法在应用中是切实可行的。

通过上面的应用, 我们可以看到同伦分析法在应用上有以下的优点

(1) 可以灵活选择初值函数。

级数解的收敛区域和收敛速度, 主要取决于初值函数。选择一组好的初值函数, 可以更有效地逼近一个非线性问题的精确解。用同伦分析方法求解非线性偏微分方程的时候, 对初值函数的选择在一定程度上有很大的自由。

(2) 可以调节和控制级数解的收敛范围和收敛速度。

通过控制引入的辅助参数 h , 为调节和控制级数的收敛范围和收敛速度提供了一个简单的途径。

(3) 同伦分析法不依赖于小参数, 因此也适合于求解强非线性问题。

(4) 可以借助计算机代数系统 (如 Mathematica、maple) 实现计算过程, 便于实行机械化计算, 在短时间内可以得到我们需要的结果, 并且结果的可靠度比较高。

当然同伦分析法也带有一定的局限性。

(1) 带有一定的先验性

同伦分析法的解表达原则, 隐含着一定的假设, 即我们要或多或少地知道一些关于待求问题的解的先验知识, 当解决一个全新的非线性问题时, 只能用不同的初值函数试探。

(2) 有待完善数学理论

到目前为止, 通过观察所谓的 h 曲线来确定同伦分析法中辅助参数 h 值的选取, 在数学上尚缺乏严格的理论证明来保证这样选取的 h 是合适的。另外对所得近似解的误差也缺乏严格的理论分析。

总之, 同伦分析法是一种新的、一般性地求解强非线性问题的解析近似方法。它在方法上彻底抛弃了小参数假设, 从根本上克服了传统摄动法的局限性;

在逻辑上包含了其他“非摄动方法”，从而更具一般性。

用同伦分析法求解近似长波方程时，由于方程是耦合方程组，所以在用 \hbar 曲线确定需要调整和控制收敛区间和程度上，我们采用简单一些的方法，令 $\hbar_u = \hbar_v = \hbar$ 来确定 \hbar 曲线的一个有效区间，在计算上更加方便。再者，我们在求解近似长波方程时，加入了近似解析解与其它方法所求的精确解的差的绝对值，从三维图形上，我们可以更直观的了解同伦分析法对于求解非线性偏微分方程的有效性。

4.2 奇异扰动MKdV-KS方程的同伦近似解

4.2.1 引言

KdV 方程是非线性波动理论中的一个经典模型，关于KdV方程的各种推广方程或与其他方程的耦合模型大量出现在众多的应用学科领域。关于MKdV方程的孤立波解已见诸于许多文献，但由于MKdV方程本身是舍去高阶项近似而得到的，因此有必要研究MKdV方程小扰动之后的解。在本节中我们用同伦分析法来讨论奇异扰动MKdV-KS方程 [48] 的近似解析解。

考虑如下方程

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} + \varepsilon(u_{xx} + u_{xxxx}) = 0 \quad (4.2.1.1)$$

这个方程出现在很多种情况下，如，垂直面上的浅水系统。

4.2.2 奇异扰动 MKdV-KS 方程的求解

根据前面所讲的同伦分析法的理论，首先定义扰动 MKdV-KS 方程的线性微分算符为

$$L = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4.2.2.1)$$

构造下列零阶形变方程

$$(1-q) \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) = q \hbar \left(\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) \right) \quad (4.2.2.2)$$

式中 $q \in [0,1]$ 为一个重要的嵌入参数； \hbar 是一个非零辅助参数。

$$\text{拟设 } u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k u_k(x,t) \quad (4.2.2.3)$$

把 (4.2.2.3) 代入 (4.2.2.2) 式中, 提取 q^k 的系数为:

$$q^0: u_{0,t} = 0 \quad (4.2.2.4.1)$$

$$q^1: \frac{\partial u_1}{\partial t} = \hbar \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial t} \right) + \hbar \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + 6\hbar u_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \hbar \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) + \hbar \varepsilon \left(\frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} \right) \quad (4.2.2.4.2)$$

$$q^2: \frac{\partial u_2}{\partial t} = \hbar \varepsilon \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} + 6\hbar u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + 6\hbar u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \hbar \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_1}{\partial t} + \hbar \frac{\partial u_1}{\partial t} + \hbar \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} \quad (4.2.2.4.3)$$

$$q^3: \frac{\partial u_3}{\partial t} = \hbar \varepsilon \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} + 6\hbar u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + 6\hbar u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + 6\hbar u_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \hbar \varepsilon \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial t} + \hbar \frac{\partial u_2}{\partial t} + \hbar \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} \quad (4.2.2.4.4)$$

归纳 (4.2.2.4.1) 到 (4.2.2.4.4) 得:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \hbar \frac{\partial u_0}{\partial t} + \hbar \frac{\partial u_0}{\partial x^3} + \hbar \varepsilon \left(\frac{\partial u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial x^4} \right) + 6\hbar u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad (4.2.2.5.1)$$

$$\frac{\partial^k u_k}{\partial t} = (1 + \hbar) \frac{\partial^{k-1} u_{k-1}}{\partial t} + \hbar \frac{\partial^{k-1} u_{k-1}}{\partial x^3} + \hbar \varepsilon \left(\frac{\partial^{k-1} u_{k-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^{k-1} u_{k-1}}{\partial x^4} \right) + 6\hbar \left(\sum_{j=0}^{k-1} u_j \frac{\partial^{k-1-j} u_{k-1-j}}{\partial x} \right)$$

$k > 1$

$$(4.2.2.5.2)$$

定义初始值为

$$u_0 = e^{x^2} \quad (4.2.2.6)$$

把 (4.2.2.4) 代入到 (4.2.2.2) 中, 利用 maple 软件得到 u_1, u_2, u_3, \dots 的值, u_1, u_2, u_3 表达式比较繁琐, 所以在附录中列出。在实际计算中, 用同伦方法我们一般得到的是在某一阶截断的解, 即所求方程的一个近似解, 在本节中我们取三阶近似, 所以

$$u = u_0 + q u_1 + q^2 u_2 + q^3 u_3 \quad (4.2.2.7)$$

把上面所求的 u_1, u_2, u_3 的表达式代入到 (4.2.2.3) 式中我们得到所求方程的三阶近似解, 分别为

$$\begin{aligned}
 u_1 &= 2e^{x^2} (6x + 4x^3 + 6xe^{x^2} + 7\varepsilon + 26x^2\varepsilon + 8x^4\varepsilon) \hbar t \\
 u_2 &= 52e^{x^2} \hbar t x^2 \varepsilon + 16e^{x^2} \hbar t x^4 \varepsilon + 12e^{x^2} \hbar t x + 8e^{x^2} \hbar t x^3 + 14e^{x^2} \hbar t \varepsilon + 1800 \hbar^2 t^2 e^{x^2} x \varepsilon \\
 &+ 128 \hbar^2 t^2 e^{x^2} \varepsilon^2 x^8 + 216 \hbar^2 t^2 e^{x^2} e^{2x^2} x^2 + 1992 \hbar^2 t^2 (e^{x^2})^2 x \varepsilon + 1728 \hbar^2 t^2 (e^{x^2})^2 x^5 \varepsilon \\
 &+ 7208 \hbar^3 t^2 e^{x^2} \varepsilon^2 x^4 + 7464 \hbar^2 t^2 e^{x^2} \varepsilon^2 x^2 + 52 t \hbar^2 e^{x^2} x^2 \varepsilon + 16 t \hbar^2 e^{x^2} x^4 \varepsilon + 4752 \hbar^2 t^2 (e^{x^2})^2 x^3 \varepsilon \\
 &+ 1376 \hbar^3 t^2 e^{x^2} x^5 \varepsilon + 128 \hbar^2 t^2 e^{x^2} x^7 \varepsilon + 3520 \hbar^2 t^2 e^{x^2} \varepsilon^2 x^6 + 108 \hbar^2 t^2 (e^{x^2})^2 + 60 \hbar^2 t^2 e^{x^2} \\
 &+ 12 t \hbar e^{2x^2} x + 792 \hbar^2 t^2 (e^{x^2})^2 x^2 + 36 \hbar^2 t^2 e^{x^2} e^{2x^2} + 966 \hbar^2 t^2 e^{x^2} \varepsilon^2 + 32 \hbar^2 t^2 e^{x^2} \varepsilon \\
 &+ 360 \hbar^2 t^2 e^{x^2} \varepsilon^2 + 240 \hbar^2 t^2 e^{x^2} x^2 + 12 t \hbar^2 e^{2x^2} x + 8 t \hbar^2 e^{x^2} x^3 + 12 t \hbar^2 e^{x^2} x + 480 \hbar^2 t^2 (e^{x^2})^2 x^4 \\
 u_3 &= 52e^{x^2} \hbar t x^2 \varepsilon + 16e^{x^2} \hbar t x^4 \varepsilon + 2246 \hbar^3 e^{x^2} t^3 e^{2x^2} x^5 + 12e^{x^2} \hbar t x + 8e^{x^2} \hbar t x^3 + 14e^{x^2} \hbar t \varepsilon \\
 &+ 3600 \hbar^3 t^2 e^{x^2} x \varepsilon + 256 \hbar^2 t^2 e^{x^2} \varepsilon^2 x^8 + 432 \hbar^2 t^2 e^{x^2} e^{2x^2} x^2 + 3984 \hbar^2 t^2 (e^{x^2})^2 x \varepsilon \\
 &+ 3456 \hbar^3 t^2 (e^{x^2})^2 x^5 \varepsilon + 11016 \hbar^3 e^{x^2} t^3 e^{2x^2} \varepsilon + 14416 \hbar^2 t^2 e^{x^2} \varepsilon^2 x^4 + 14928 \hbar^2 t^2 e^{x^2} \varepsilon^2 x^6 \\
 &+ 104 \hbar^2 t e^{x^2} x^2 \varepsilon + 32 t \hbar^2 e^{x^2} x^4 \varepsilon + 9504 \hbar^2 t^2 (e^{x^2})^2 x^3 \varepsilon + 2752 \hbar^2 t^2 e^{x^2} x^5 \varepsilon \\
 &+ 256 \hbar^2 t^2 e^{x^2} x^7 \varepsilon + 7040 \hbar^2 t^2 e^{x^2} x^3 \varepsilon + 3712 \hbar^2 t^2 e^{x^2} \varepsilon^2 x^6 + 216 \hbar^2 t^2 (e^{x^2})^2 + 120 \hbar^2 t^2 e^{x^2} \\
 &+ 1143936 \hbar^3 (e^{x^2})^2 t^3 x^4 \varepsilon + 12 t \hbar e^{2x^2} x + 1584 \hbar^2 t^2 (e^{x^2})^2 x^2 + 72 \hbar^2 t^2 e^{x^2} e^{2x^2} + 1932 \hbar^2 t^2 e^{x^2} \varepsilon^2 \\
 &+ 64 \hbar^2 t^2 e^{x^2} x^6 + 28 t \hbar^2 e^{x^2} t^2 + 40320 \hbar^3 (e^{x^2})^2 t^3 \varepsilon + 20448 \hbar^3 (e^{x^2})^2 t^3 x + 77184 \hbar^3 (e^{x^2})^2 t^3 x \\
 &+ 771984 \hbar^3 (e^{x^2})^2 t^3 x^3 + 8 t \hbar^3 e^{x^2} x^3 + 12 t \hbar^3 e^{x^2} x + 12 t \hbar^3 e^{2x^2} x + 14 t \hbar^3 e^{x^2} \varepsilon + 64 \hbar^3 e^{x^2} t^2 x^6 \\
 &+ 1932 \hbar^3 e^{x^2} t^2 \varepsilon^2 + 480 \hbar^3 e^{x^2} t^2 x^4 + 10752 \hbar^3 (e^{x^2})^2 t^3 x^7 + 58752 \hbar^3 (e^{x^2})^2 t^3 x^5 \\
 &+ 960 \hbar^3 (e^{x^2})^2 t^2 x^4 + 1584 \hbar^3 e^{x^2} t^3 x^7 + 5040 \hbar^3 e^{x^2} t^3 x + 15960 \hbar^3 e^{x^2} t^3 \varepsilon + 126860 \hbar^3 e^{x^2} t^3 \varepsilon^3 \\
 &+ 13440 \hbar^3 e^{x^2} t^3 x^3 + 8064 \hbar^3 e^{x^2} t^3 x^5 + 256 / 3 \hbar^3 e^{x^2} t^3 x^9 + 1539 \hbar^3 e^{x^2} t^3 x^5 \varepsilon^2 + 72 \hbar^3 e^{x^2} t^2 e^{2x^2} \\
 &+ 720 \hbar^3 e^{x^2} t^2 x^2 + 149504 \hbar^3 (e^{x^2})^2 t^3 x^9 \varepsilon^2 + 3984 \hbar^3 (e^{x^2})^2 t^2 x \varepsilon + 79872 \hbar^3 (e^{x^2})^2 t^3 x^8 \varepsilon \\
 &+ 936096 \hbar^3 e^{x^2} t^3 x^5 \varepsilon^2 + 3712 \hbar^3 e^{x^2} t^2 x^6 \varepsilon^2 + 208320 \hbar^3 e^{x^2} t^3 x^4 \varepsilon + 28672 \hbar^3 e^{x^2} t^3 x^9 \varepsilon^2 \\
 &+ 52 t \hbar^3 e^{x^2} x^2 \varepsilon + 582144 \hbar^3 (e^{x^2})^2 t^3 x^6 \varepsilon + 604512 \hbar^3 (e^{x^2})^2 t^3 x^2 \varepsilon + 3357504 \hbar^3 (e^{x^2})^2 t^3 \varepsilon^2 x^3 \\
 &+ 3834496 \hbar^3 (e^{x^2})^2 t^3 e^{2x^2} x^5 \varepsilon^2 + 116352 \hbar^3 e^{x^2} t^3 e^{2x^2} x^6 \varepsilon + 667392 \hbar^3 (e^{x^2})^2 t^3 \varepsilon^2 x \\
 &+ 1398784 \hbar^3 (e^{x^2})^2 t^3 \varepsilon^2 x^7 + 177408 \hbar^3 e^{x^2} t^3 e^{2x^2} x^2 \varepsilon + 319584 \hbar^3 e^{x^2} t^3 e^{2x^2} x^4 \varepsilon
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+9504\hbar^3(e^{x^2})^2 t^2 x^3 \varepsilon + 3456\hbar^3(e^{x^2})^2 t^2 x^5 \varepsilon + 11520\hbar^3 e^{x^2} t^3 e^{2x^2} x + 1728\hbar^3 e^{x^2} t^3 x e^{3x^2} \\
 &+ 41760\hbar^3 e^{x^2} t^3 x^3 \varepsilon^2 + 4608\hbar^3 e^{x^2} x^3 e^{3x^2} + 157920\hbar^3 e^{x^2} t^3 x^2 \varepsilon + 363720\hbar^3 e^{x^2} t^3 x \varepsilon \\
 &+ 2048/3\hbar^3 e^{x^2} t^3 x^{12} \varepsilon^3 + 23040\hbar^3 e^{x^2} t^3 x^{10} \varepsilon^3 + 1191120\hbar^3 e^{x^2} t^3 x^{10} \varepsilon^2 + 256088\hbar^3 e^{x^2} t^3 x^8 \varepsilon^3 \\
 &+ 82432\hbar^3 e^{x^2} t^3 x^6 \varepsilon + 262720\hbar^3 e^{x^2} t^3 x^7 \varepsilon^2 + 2426000\hbar^3 e^{x^2} t^3 x^4 \varepsilon^3 + 1024\hbar^3 e^{x^2} t^3 x^{11} \varepsilon^2 \\
 &+ 512\hbar^3 e^{x^2} t^3 x^{10} \varepsilon + 1488600\hbar^3 e^{x^2} t^3 x^2 \varepsilon^3 + 11648\hbar^3 e^{x^2} t^3 x^8 \varepsilon + 3795488/3\hbar^3 e^{x^2} t^3 x^6 \varepsilon^3 \\
 &+ 3600\hbar^3 e^{x^2} t^2 x \varepsilon + 432\hbar^3 e^{x^2} t^2 e^{2x^2} x^2 + 7040\hbar^3 e^{x^2} t^2 x^3 \varepsilon + 14928\hbar^3 e^{x^2} t^2 x^2 \varepsilon^2 \\
 &+ 14416\hbar^3 e^{x^2} t^2 x^4 \varepsilon^2 + 256\hbar^3 e^{x^2} t^2 x^7 \varepsilon + 16t\hbar^3 e^{x^2} x^4 \varepsilon + 2752\hbar^3 e^{x^2} t^2 x^5 \varepsilon + 256\hbar^3 e^{x^2} x^8 \varepsilon^2
 \end{aligned}$$

在上面的计算过程中，有一个重要的参数 \hbar ，一般通过调节 \hbar 的值以保证级数收敛，图 1 显示了 $x=3$ ， $t=0.01$ ， $\varepsilon=0.001$ ， $q=1$ 时的 $u \sim \hbar$ ， $u_{xx} \sim \hbar$ ， $u_{xxx} \sim \hbar$ 曲线图。从图 1 可以看出，大约在 $-0.5 < \hbar < 0.5$ 范围内级数 (4.2.2.7) 收敛。由图可知，在该区间的中间位置级数的收敛性较强，可取 $\hbar=0.00001$ 来考察方程 (4.2.1.1) 的近似解。

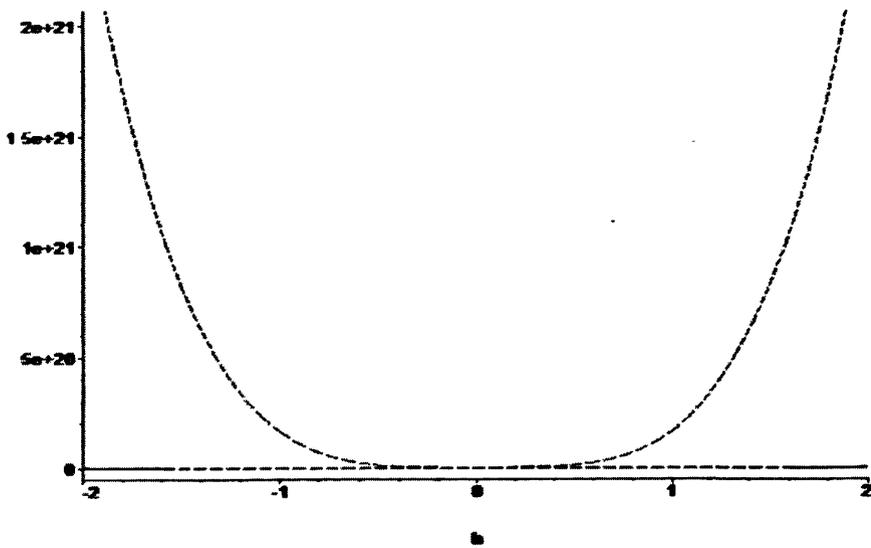


图 1

下面我们就取 $\hbar=0.00001$ ， $\varepsilon=0.001$ ， $q=1$ 时用同伦分析法得到的奇异扰动 MKdV-KS 方程的三阶近似解析解，由于三阶近似解析解的表达式比较繁琐，下面我们就用图表示所求得解，使其更形象、直观。

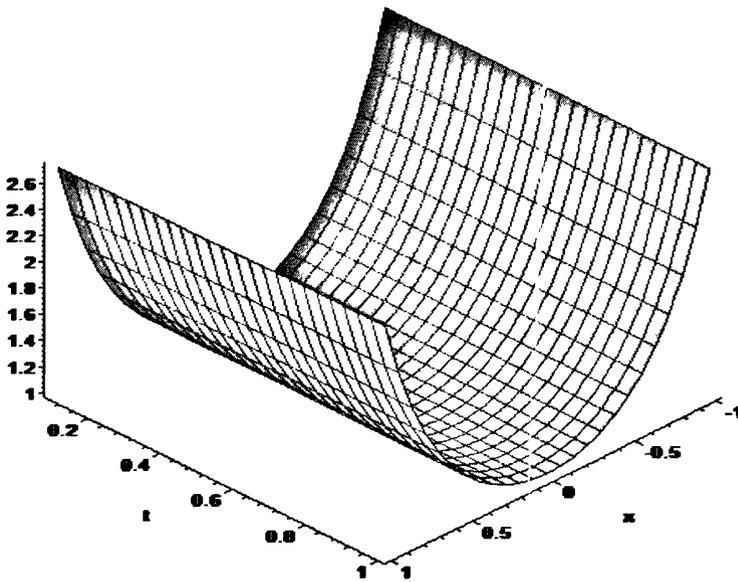


图 2: $\hbar=0.00001$, $\varepsilon=0.001$, $q=1$ 时所求的三阶近似解

4.2.3 结论

本文利用同伦分析法求解奇异扰动 MKdV-KS 方程, 得到了它的近似解析解。研究发现, 用同伦分析法求解了一大批非线性偏微分方程, 且所求的近似解与精确解吻合的非常好, 说明同伦分析法是求解非线性方程近似解的一种行之有效的方法。

第5章 总结与展望

近年来,对非线性科学问题的研究已成为人们关注的热点,非线性科学也被深入并广泛应用到科学技术的各个领域。许多非线性物理现象都可以用非线性偏微分方程来描述,所以得到非线性偏微分方程的解有主要的意义。

在本文中,我们使用近似对称约化方法,得到了带有小参数的 Burgers 方程的近似对称约化和无穷级数解。我们可以逐一求约化后的近似方程组,进而得到无穷级数解。在实际计算时,我们可以根据要求出有限项。

在本文中,我们利用同伦分析法得到了奇异扰动 MKdV-KS 方程和耦合的近似长波方程组的近似解析解,并把得到的解析解与其它方法得到的精确解比较,发现其与精确解十分吻合,说明同伦分析法是求解非线性偏微分方程解析解的一种行之有效的方法。该方法为我们在选择辅助线性算子和辅助参数时提供了足够大的自由,从而使我们得到收敛的级数解。

对于扰动方程的研究,我们还有许多东西进行讨论,我们可以尝试结合同伦分析法和近似对称扰动方法,来求解非线性偏微分方程(组)。近似对称方法只有在非线性偏微分方程含有小参数时才是很有效的而方法,通过引入对称模型,近似对称同伦方法则可以不用考虑非线性偏微分方程是否含有小参数,因此近似对称同伦方法可以用于求解不含小参数的非线性偏微分方程,这些方面的工作,我们将不断的探索,以求得到更多丰富有趣的结果。

对于同伦分析法的研究,我们现在也有更多需要改进的问题,如对于同伦分析法中辅助参数 \hbar 的选取,是通过观察所谓的 \hbar 曲线来完成,在数学上尚缺乏严格的理论证明以保证这样选取的 \hbar 是合适的,另外对所得近似解的误差也缺乏严格的理论分析。这方面的工作,我们也将不断的研究探索。

致 谢

在本论文顺利完成之际，我要向那些在论文完成过程中支持、帮助和鼓励我的人表示我最诚挚的谢意！

首先，我要感谢我的导师钱素平教授。钱老师严谨的学术态度，务实的作风，创新求是的科研精神，孜孜不倦的敬业精神，这一切使我受益匪浅！导师严以律己、宽以待人的崇高风范，乐观向上、积极主动的生活态度，也使我明白了许多待人接物与为人处世的道理。在选题及研究过程中得到钱老师的悉心指导，为我指点迷津，帮助我开拓研究思路，精心点拨、热忱鼓励。在三年的学习和科研中，钱老师不仅授我以文，而且教我做人，给我终生受益无穷之道，对钱老师的感激之情是无法用言语表达的。

其次，我还要特别感谢李昕老师对我学习上的指导、鼓励和帮助。

同时还要感谢李秀明、郭跃进、耿发展、顾建军等各位老师在我学习中的指导和帮助，以及我的同窗们杜一君、黄艳丽等各位同学对我的各种支持和帮助。

最后我要衷心感谢我的家人在我攻读硕士研究生期间给予我的无微不至的关怀和支持。

参考文献

- [1] M. J. Ablowitz, P. Clarkson. Solutions, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering (Lecture Notes Series 149). Cambridge University Press. 1991
- [2] R. K. Bullough, P. J. Caudrey. (Eds.). Solutions Berlin: Springer Verlag. 1980
- [3] C. Rogers. W. K. Schief. Backlund and Darboux transformations, Geometry and Modern Applications in Soliton Theory, Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press. 2002
- [4] 谷超豪, 胡和生, 周子翔, 孤立子理论中达布变换及其几何应用, 上海科学技术出版社, 2001
- [5] J. S. Russel. Report on waves, 14th Meeting of the British Association for Advancement of Science. London: John Murray (1844) 311
- [6] D. J. Korteweg, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves. Philosophical Magazine 1985(39): 422
- [7] M. D. Kruskal, C. S. Gardner, J. M. Greene and R. M. Miura. Method for solving the Korteweg-de Vries equation. Phys. Rev. Lett. 1967(19): 1095
- [8] P. D. Lax. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. Pure Appl. Math. 1968(21): 467
- [9] M. Wadati. The modified korteweg-de vries equation. J. Phys. Soc. Jp. 1972(34): 62
- [10] A.C. Newell, M. J. Ablowitz, D. J. Kaup and H. Segur. The inverse scattering transform-fourier analysis for nonlinear problems. Studies in Applied Mathematics. 1974(53): 249.
- [11] 李翊神. 一类发展方程和谐的变形. 中国科学 A. 1982(5): 385
- [12] 屠规彰. 应用数学与计算数学. 1979(1): 21
- [13] R. Hirota. J. Satsuma. Nonlinear evolution equations generated from the Backlund transformation for the Boussinesq equation. Prog. Theor. Phys. 1977(57): 797-807
- [14] R. Hirota. Exact solutions of the Kortweg-de Vires equation for multiple collisions of solitons. Phy. Rev. Lett. 1971(27): 1192-1197
- [15] H. D. Wahlquist. F. B. Estbrook. Prolongation structure and nonlinear evolution equations. J. Math. Phys. 1975(16): 1-7.

- [16] P. A. Clarkson and M. D. Kruskal. New similarity reductions of the Boussinesq equation. *J. Math. Phys.* 1989(30): 2201-2212.
- [17] M. L. Gandarias and M. S. Bruzon. Classical and Nonclassical Symmetries of a Generalized Boussinesq Equation. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics.* 1998(51): 8-12.
- [18] Y. F. Zhang, H. Q. Zhang. An extension of the direct method mid similarity reductions of a generalized Burgers equation with an arbitrary derivative function. *Chinese Physics*, 2002(11): 4.
- [19] P. H. Woo. On Backlund transformation for a generalized Burgers equation and solitonic solutions. *Phy. Lett. A* 2000(268): 81-84.
- [20] D. J. Arrigo and F. Hickling. On the determining equations for the nonclassical reductions of the heat and Burgers equation. *J. Math. Anal. Appl.* 2002(270) : 82-589.
- [21] X. Y. Tang, S. Y. Lou. Conditional similarity solutions of (2+1)-dimensional general nonintegrable KdV equation. *Commun. Theor. Phys.* 2002 (37): 139-144.
- [22] S. Y. Lou, X. Y. Tang and J. Lin, Similarity and conditional similarity reduction of a (2+1)-dimensional KdV equation via a direct method. *J. Math. Phys.* 2000(41): 8286-8303.
- [23] S. P. Qian., L. X. Tian. Lie symmetry analysis and reduction of a new integrable coupled KdV equation. *Chi. Phy.* 2007(16): 0303-0307.
- [24] S. P. Qian., L. X. Tian. Similarity Reduction Analysis for a Coupled KdV System. *Commun. Theor. Phya.* 2007(48): 399-404.
- [25] S. P. Qian., L. X. Tian. Group invariant solutions of a integrable coupled system. *Nonlinear Anal. R. World Appl.* 2008(9): 1756-1767.
- [26] G. W. Bluman and J. D. Cole. The general similarity solution of the heat equation. *J Math. Mech.* 1969 (18): 1025-1042.
- [27] L. Gandarias and M. S. Bruzdn. Symmetry analysis and solutions for a family of Cahn-Hilliard equations. report of *Math. Phys.* 2000 (46): 89-97.
- [28] P. A. Clarkson and M. D. Kruskal. New similarity reductions of the boussinesq equation. *J. Math. Phys.* 1989 (30): 2201-2212.
- [29] S. Y. Lou and L. L. Chen. *J. Math. Phys.* 1999(40): 6491.
- [30] S. L. zhang and S. Y. Lou. *Commun. Theor. Phys.* 2003(40): 401

- [31] S. L. Zhang and S. Y. Lou. *Physica A*. 2004(335): 430.
- [32] M. L. Wang. Exact solutions for a compound KdV-Burgers equation. *Phys. Lett. A*, 1996(213): 279-287.
- [33] Simon Hooda. New exact solutions of Burgers's equation: an extension to the direct method of Clarkson and Kruskal. *J. Math. Phys.* 1995(36): 4.
- [34] J. Grasman. *Asymptotic methods for relaxation oscillations and applications*. New York: Applied Mathematical Sciences. 1987(63).
- [35] A. M. Lyapunov. *General problem on stability of motion*(English translation). Taylor & Francis. London. 1992.
- [36] A. V. Karmishin, A. T. Zhukov, V. G. Kolosov. *Methods of dynamics calculation and testing for thin-walled structures* (in Russian). Mashinostroyenie, Moscow, 1990.
- [37] S. J. Liao. *The proposed homotopy analysis techniques for the solution of nonlinear problems*. Ph. D. dissertation (in English). Shanghai Jiao Tong University. Shanghai. 1992.
- [38] S. J. Liao. A kind of approximate solution technique which does not depend upon small parameters (II): a application in fluid mechanics. *Int. J. Non-linear Mech.* 1997(32): 815-822.
- [39] S. J. Liao. On the analytic solution of magnetohydrodynamic flows of non-Newtonian fluids over a stretching sheet. *J. Fluid. Mech.* 2003(488): 189-212.
- [40] S. J. Liao. An analytic solution of unsteady boundary-layer flows caused by an impulsively stretching plate. *Commun. Nonlinear Sci. Num. Simulat.* 2006 (11): 326-339.
- [41] S. Abbasbandy. The application of Homotopy analysis method to solve a generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation. *Phy. Lett. A*. 2007(361): 478-483.
- [42] S. J. Liao. On the homotopy analysis method for nonlinear problems. *Appl. Math. Com.* 2004(147): 499-513.
- [43] M. Ganjani, H. Ganjani. Solution of coupled system of nonlinear differential equations of using homotopy analysis method. *Nonlinear Dyn.* 2009(56): 159-167
- [44] S. J. Liao. A new branch of solutions of boundary-layer flows over an impermeable stretched plate. *Int. J. Heat Mass Transf.* 2005(48): 2529-2539.
- [45] I. Mustafa. On numerical solution of Burgers' equation by homotopy analysis method. *Phy. Lett. A*. 2008(372): 356-360.

- [46] D. V. Choodnovsky, G. V. Choodnovsky. Nuov. Cim. 1977(40B).
- [47] M. L. Wang, Y. B. Zhou, Z.B. Li. Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics. Phy. Lett. A. 1996(216): 67-75.
- [48] X. Y. Jiao, S. Y. Lou. Approximate direct reduction method: infinite series reductions to the perturbed mKdV equation. Chin. Phys. Soc. 2009(09): 3611-3615.

读研期间发表的论文

- [1] 第二作者, Approximate solutions for the coupled nonlinear equations using the homotopy analysis method. [J]. *Applied Mathematical Sciences*. 5 (37):1809 – 1816(2011) (已录用)
- [2] 第二作者, Approximate symmetry reduction approach: infinite series reduction to the perturbed Burgers equation. [J]. *International Journal of Nonlinear Science*. (已录用)
- [3] 第一作者, 同伦分析法在求解非线性耦合偏微分方程组的应用 [J]. 常熟理工学院学报. (已录用)