21届高三上期开学测试

数学（理科）试题　答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。

1.【解析】D. $\because A=\{x\,|\,1-x>0\}=(-\infty,1)$，$B=(0,\infty)$，$\therefore C_uA=[1,\infty)$，

$\therefore\left(\complement_U A\right)\cap B=\left[1,+\infty\right)$.

2.【解析】C. $\because\dfrac{1+a\mathrm{i}}{1-a\mathrm{i}}=\dfrac{(1+a\mathrm{i})^2}{(1-a\mathrm{i})(1+a\mathrm{i})}=\dfrac{(1-a^2)+2a\mathrm{i}}{1+a^2}$，又$\because$复数为纯虚数，$\therefore 1-a^2=0$，解得$a=\pm1$，故选C.

3.【解析】B. 依题意知，将函数$f(x)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$的图象上各点的横坐标伸长到原来的2倍，纵坐标不变，得到函数$g(x)=\sin\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\pi}{4}\right)$的图象，再向右平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位得

$h(x)=\sin[\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6})]=\sin\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{3}\pi\right)$.故选B.

4.【解析】B. 因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=12\neq0$，则$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$不垂直，A错误；因为$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=0$，所以$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，B正确，D错误；$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$显然不平行，C错误. 故选B.

5.【解析】B. 用a_1，a_2，…，a_8表示8个儿子按照年龄从大到小得到的绵数，由题意得数列a_1，a_2，…，a_8是公差为17的等差数列，且这8项的和为996，

$\therefore 8a_1+\dfrac{8\times7}{2}\times17=996$，解之得$a_1=65$.$\therefore a_8=65+7\times17=184$，

即第8个儿子分到的绵是184斤.

6.【解析】C. 直线$y=kx$与圆$(x-13)^2+y^2=25$相交，$d=\dfrac{|13k|}{\sqrt{1+k^2}}<5\Rightarrow k\in\left(-\dfrac{5}{12},\ \dfrac{5}{12}\right)$.

直线斜率$k\in\left(-\dfrac{5}{12},\ \dfrac{5}{12}\right)$时与圆相交，故所求概率$P=\dfrac{\frac{10}{12}}{2}=\dfrac{5}{12}$.故选C.

7.【解析】C

A选项中，根据$m\perp n$，$m//\alpha$，$n//\beta$，得到$\alpha\perp\beta$或$\alpha//\beta$，所以A错误；

B选项中，$m\perp n$，$\alpha\cap\beta=m$，$n\subset\beta$，不一定得到$\alpha\perp\beta$，所以B错误；

C选项中，因为$m//n$，$n\perp\beta$，所以$m\perp\beta$，又$m\subset\alpha$，从而得到$\alpha\perp\beta$，C正确；

D选项中，根据$m//n$，$m\perp\alpha$，所以$n\perp\alpha$，而$n\perp\beta$，所以得到$\alpha//\beta$，D错误.

8.【解析】B. 函数 $f(x)=(x^2-2x)\mathrm{e}^x$，则 $f'(x)=(x^2-2)\mathrm{e}^x$，令 $f'(x)=0$，解得 $f(x)$ 的两个极值点为 $\pm\sqrt{2}$，故排除 AD，且当 $x<0$ 时，$f(x)$ 恒为正，排除 C，选 B.

9. 【解析】B．由题意，

第一次循环，$\frac{1}{2}S\notin Z$，$S=3\times5+1=16$，$i=0+1=1$，$S\neq1$；

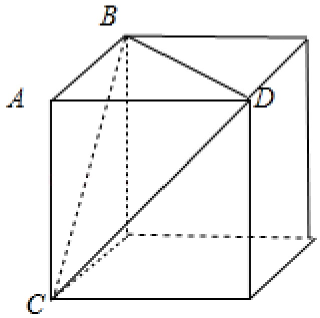
第二次循环，$\frac{1}{2}S\in Z$，$S=\frac{1}{2}\times16=8$，$i=1+1=2$，$S\neq1$；

第三次循环，$\frac{1}{2}S\in Z$，$S=\frac{1}{2}\times8=4$，$i=2+1=3$，$S\neq1$；

第四次循环，$\frac{1}{2}S\in Z$，$S=\frac{1}{2}\times4=2$，$i=3+1=4$，$S\neq1$；

第五次循环，$\frac{1}{2}S\in Z$，$S=\frac{1}{2}\times2=1$，$i=4+1=5$，$S=1$；此时输出 $i=5$.

10. 【解析】B．把三棱锥 $A-BCD$ 补成长方体，如图所示：



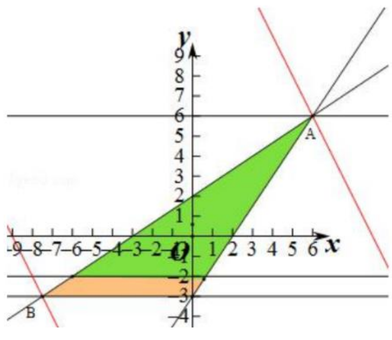
则三棱锥 $A-BCD$ 外接球即是长方体的外接球，设长方体的棱长分别为 a，b，c，

∵三棱锥 $A-BCD$ 外接球的表面积为 8π，

∴三棱锥 $A-BCD$ 外接球的半径为 $\sqrt{2}$，∴$a^2+b^2+c^2=8$，∵ $2ab\le a^2+b^2$，$2ac\le a^2+c^2$，$2bc\le b^2+c^2$，

∴2（$ab+ac+bc$）≤2（$a^2+b^2+c^2$），∴$ab+ac+bc\le8$，∴三棱锥的侧面积之和 $S=\frac{1}{2}(ab+ac+bc)\le4$.

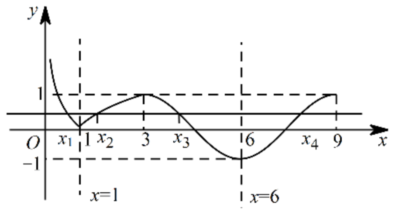
11.【解析】由 $|2x+y|\le18$ 得 $-18\le2x+y\le18$，不等式组对应的区域在直线 $2x+y=18$ 和 $2x+y=-18$ 之间，作图，由 $\begin{cases}2x-3y+6=0\\3x-2y-6=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=6\\y=6\end{cases}$，即 $A(6,6)$，



此时 $A(6,6)$ 满足条件 $2x+y=18$.

由$\begin{cases}2x-3y+6=0\\2x+y=-18\end{cases}$得$\begin{cases}x=-\dfrac{15}{2}\\y=-3\end{cases}$，即$B(-\dfrac{15}{2},-3)$，要使不等式组对应的平面区域都在两条直线之间，则直线$y=m$满足在直线$y=-3$和$y=6$之间．

12．【解析】D 作出函数 $f(x)$ 的图象（如图），可以发现 $|\log_3 x_1|=|\log_3 x_2|$，即 $-\log_3 x_1=\log_3 x_2$，所以 $\log_3 x_1+\log_3 x_2=\log_3(x_1\cdot x_2)=0$，$x_1\cdot x_2=1$．由余弦函数的图象可知，$f(x)$ 在 $[3,9]$ 上的图象关于直线 $x=6$ 对称，所以 $x_3+x_4=12$，且 $x_3\in\left(3,\frac{9}{2}\right)$，因此 $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$ 变形为 $g(x_3)=x_3(12-x_3)=-x_3^2+12x_3=-(x_3-6)^2+36$,所以当 $x_3=3$ 时,$g(x_3)_{\min}=27$;当 $x_3=\frac{9}{2}$ 时，$g(x_3)_{\max}=\frac{135}{4}$．所以 $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$ 的取值范围是 $\left(27,\frac{135}{4}\right)$．



第 II 卷（非选择题，共 90 分）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13． 【解析】60

14． 【解析】$\dfrac{\pi}{4}$． 由$\dfrac{a\sin A+b\sin B-c\sin C}{a\sin B}=2\sin C$ 及正弦定理得$\dfrac{a^2+b^2-c^2}{ab}=2\sin C$，所以$\dfrac{2ab\cos C}{ab}=2\sin C$，即 $\cos C=\sin C$，因为 $0<C<\pi$，所以 $C=\dfrac{\pi}{4}$.

15． 【解析】$(-\infty，-3)\cup(0，+\infty)$ ．因为直线与圆相切，所以$\dfrac{|t+1|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，即 $k^2=t^2+2t$. 将直线方程代入抛物线方程并整理得 $x^2-4kx-4t=0$，于是 $\Delta=16k^2+16t=16(t^2+2t)+16t>0$，解得 $t>0$ 或 $t<-3$.

16． 【解析】$[1,+\infty)$．由反函数图象关于直线 $y=x$ 对称知 $m+n=4$．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17.【解析】(1)把点$(0,\dfrac{1}{2})$代入函数$f(x)=a^x(a>0,a\neq1)$得$a=\dfrac{1}{2}$，所以$f(x)=(\dfrac{1}{2})^x$，

所以数列$\{a_n\}$的前n项和是$S_n=f(n)-2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-2$．当$n=1$时，$a_1=s_1=-\dfrac{3}{2}$；

当 $n \geq 2$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$，所以 $a_n = \begin{cases} -\frac{3}{2}, n=1 \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^n, n \geq 2 \end{cases}$；

(2)由 $a = \frac{1}{2}$，$b_n = \log_a\left(-a_{n+1}\right)$ 得 $b_n = n+1$，所以

$T_n = -\frac{3}{2} \times 2 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \ldots - (n+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$，①

$\frac{1}{2}T_n = -\frac{3}{2} - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \ldots - (n+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.②

由①－②得：$\frac{1}{2}T_n = -\frac{3}{2} - \frac{3}{4} - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + (n+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$，

所以 $T_n = -5 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n+3}{2^n} - 5$.

18.【解析】（1）2×2 列联表如下：

	不少于 60 元	少于 60 元	合计
男	12	40	52
女	18	20	38
合计	30	60	90

$K^2 = \frac{90 \times (12 \times 20 - 40 \times 18)^2}{30 \times 60 \times 52 \times 38} = \frac{1440}{247} > 5 > 3.841$，

因此有95%的把握认为购买金额是否少于 60 元与性别有关.

（2）X 可能取值为 65，70，75，80，且 $p = \frac{10+20}{90} = \frac{1}{3}$.

$P(X=65) = C_3^3\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$，$P(X=70) = C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$，

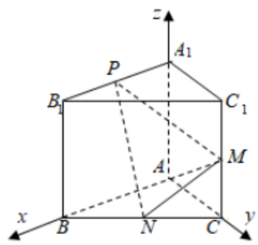
$P\left(X=75\right)=C_3^1\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，$P\left(X=80\right)=C_3^0\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$，

所以 X 的分布列为

X	65	70	75	80
$P\left(X\right)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

$E(X)=65\times\frac{1}{27}+70\times\frac{2}{9}+75\times\frac{4}{9}+80\times\frac{8}{27}=75$.

19. 【解析】以点 A 为坐标原点，以 AB 、 AC 、 AA_1 所在直线分别为 x 、 y 、 z 轴，建立如下图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$ ，则 $A_1\left(0,0,2\right)$ ， $B_1\left(2,0,2\right)$ ， $M\left(0,2,1\right)$ ， $N\left(1,1,0\right)$.



（1）$\because \overrightarrow{A_1P}=\lambda\overrightarrow{PB_1}=\lambda\left(\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{A_1P}\right)$，

$\therefore \overrightarrow{A_1P}=\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{A_1B_1}=\frac{\lambda}{1+\lambda}\left(2,0,0\right)=\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda},0,0\right)$，

$\because \overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1P}=\left(0,0,2\right)+\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda},0,0\right)=\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda},0,2\right)$，

$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AP}=\left(1,1,0\right)-\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda},0,2\right)=\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda},1,-2\right)$.

$\because \overrightarrow{AM}=\left(0,2,1\right)$，$\therefore \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{PN}=0+2-2=0$，因此，无论 λ 取何值，$AM\perp PN$；

（2）当 $\lambda=1$ 时，$P\left(1,0,2\right)$，$\overrightarrow{PN}=\left(0,1,-2\right)$，$\overrightarrow{PM}=\left(-1,2,-1\right)$，

而平面 ABC 的法向量 $\vec{n}=\left(0,0,1\right)$，设平面 PMN 的法向量为 $\vec{m}=\left(x,y,1\right)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PM}=-x+2y-1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PN}=y-2=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}$，则 $\vec{m}=\left(3,2,1\right)$，

设α为平面PMN与平面ABC所成的锐二面角，则$\cos\alpha=\dfrac{\left|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{\left|\overrightarrow{m}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n}\right|}=\dfrac{\sqrt{14}}{14}$.

因此，平面PMN与平面ABC所成锐二面角的余弦值是$\dfrac{\sqrt{14}}{14}$.

20.【解析】(Ⅰ)由题意,椭圆上下顶点与左右顶点其中的一个构成等边三角形,$\therefore a=\sqrt{3}b$，

$b=\sqrt{3}$，$\therefore a=3,b=\sqrt{3}$，椭圆$E:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$。

(Ⅱ)圆$O:x^2+y^2=2$,因为直线$y=kx+m$与圆$O:x^2+y^2=2$相切,$\therefore\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{2}$，

即 $m^2=2(1+k^2)$.联立方程$\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=kx+m\end{cases}$得 $(1+3k^2)x^2+6kmx+3(m^2-3)=0$，设

$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=-\dfrac{6km}{1+3k^2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{3(m^2-3)}{1+3k^2}$，

故$|MN|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{\sqrt{12(9k^2+3-2k^2-2)}}{1+3k^2}$

$$=\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{(2+2k^2)(7k^2+1)}}{1+3k^2}\le\sqrt{6}\cdot\frac{\frac{1}{2}[(2+2k^2)+(7k^2+1)]}{1+3k^2}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$$

当且仅当$2+2k^2=7k^2+1$即$k^2=\dfrac{1}{5}$时等号成立。所以弦长$|MN|$的最大值是$\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$.

21.【解析】(1)由已知,

$f'(x)=(1+\cos x+\sin x)\mathrm{e}^x+(x+\sin x-\cos x)\mathrm{e}^x=(1+x+2\sin x)\mathrm{e}^x$,

所以$g(x)=f'(x)-f(x)=(1+\sin x+\cos x)\mathrm{e}^x$，$g'(x)=(1+2\cos x)\mathrm{e}^x$，

令$g'(x)>0$，得$\cos x>-\dfrac{1}{2}$，解得$-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi<x<\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

令$g'(x)<0$，得$\cos x<-\dfrac{1}{2}$，解得$\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi<x<\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

故 $g(x)$ 的单调递增区间是 $(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{2\pi}{3}+2k\pi),k\in\mathbf{Z}$；单调递减区间是 $(\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{4\pi}{3}+2k\pi),k\in\mathbf{Z}$.

（2）要证 $f(x)\geq x-1$，只需证：$f(x)+1-x\geq 0$.

设 $h(x)=f(x)+1-x$，$x\geq 0$，则 $h'(x)=f'(x)-1=(1+x+2\sin x)e^x-1$.

记 $t(x)=h'(x)=(1+x+2\sin x)e^x-1$，则 $t'(x)=(2+x+2\sin x+2\cos x)e^x$.

当 $x\in[0,\pi]$ 时，$\sin x\geq 0$，又 $2+2\cos x\geq 0$，$e^x>0$，所以 $t'(x)\geqslant 0$；

当 $x\in(\pi,+\infty)$ 时，$x>\pi$，$2\sin x\geq -2$，所以 $x+2\sin x>\pi-2>0$，

又 $2+2\cos x\geq 0$，$e^x>0$，所以 $t'(x)\geqslant 0$.

综上，当 $x\geq 0$ 时，$t'(x)\geqslant 0$ 恒成立，

所以 $t(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增．所以，$t(x)\geq t(0)=0$，即 $h'(x)\geq 0$，

所以，$h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增，则 $h(x)\geq h(0)=0$，证毕.

22. 【解析】（Ⅰ）设点 P（1+tcos$a$，﹣1+tsin$a$），

则 $\frac{x-y-2}{x+y}=\frac{tcos\alpha-tsin\alpha}{tcos\alpha+tsin\alpha}=\frac{cos\alpha-sin\alpha}{cos\alpha+sin\alpha}=3$，

整理可得 2sinα＝﹣cosα，即 $tan\alpha=-\frac{1}{2}$，∴直线 l 的斜率为 $-\frac{1}{2}$.

（Ⅱ）曲线 C 的方程可化为 $\rho^2=2\rho\sin\theta$，

化成普通方程可得 $x^2+y^2=2y$，即 $x^2+(y-1)^2=1$，

曲线 C 表示圆心为 C（0，1），半径为 1 的圆，

直线 l 的参数方程化成普通方程可得 $x-y-2=0$，

圆心 C 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|0-1-2|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

则曲线 C 上的点到直线 l 的距离的最大值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}+1$.

23. 【解析】（Ⅰ）f（x）$=|x-1|-|ax-2a|$，

若 $a=1$，不等式 f（x）<1 可化为：$|x-1|-|x-2|<1$，

当 $x\leq 1$ 时，$1-x-$（$2-x$）<1，即 $0<2$，成立；

当 $1<x\leq 2$ 时，$x-1-$（$2-x$）<1，即 $x<2$，成立；

当 $x>2$ 时，$x-1-$（$x-2$）<1，即 $0<0$，不成立；

综上所述，若 $a=1$，不等式 f（x）<1 的解集为（$-\infty$，2）；

（Ⅱ）因为 $x\in[2，8)$，所以 f（x）$=|x-1|-|ax-2a|=x-1-|a|$（$x-2$），

故不等式 f（x）$\geq x-4$ 对 $\forall x\in[2，8)$ 恒成立 $\Leftrightarrow x-1-|a|$（$x-2$）$\geq x-4$ 恒成立，

则 $|a|\leq\left(\frac{3}{x-2}\right)_{\min}$，因为 $y=\frac{3}{x-2}$ 在区间[2，8）上单调递减，所以 $|a|\leq\frac{3}{8-2}=\frac{1}{2}$，

解得：$-\frac{1}{2}\leq a\leq\frac{1}{2}$，即 a 的取值范围为$[-\frac{1}{2}，\frac{1}{2}]$.