

摘 要

微分方程数学模型在描述种群动力学行为中起到了非常重要的作用. 它从数学的角度解释各种种群动力学行为, 使人们科学地认识种群动力学, 从而对某些种群相互作用进行有目的地控制. 特别是用脉冲微分方程来描述种群动力学模型能够更合理、更精确地反映各种变化规律, 因为现实世界中的许多生命现象和人类的开发行为几乎都是脉冲的. 本文针对害虫控制问题提出了单种群和两种群控制的几个问题, 并且利用脉冲微分方程的相关理论和方法研究了相应的动力学模型, 讨论了所提模型的各种动力学行为, 包括平衡点的存在性和稳定性、周期解的存在性和吸引力、系统的持久性与灭绝等. 本文的主要结果概括如下:

1. 第三章讨论了两个具有阶段结构的单种群模型. 第一节研究幼年染病的具有阶段结构和时滞的单种群模型. 所考虑的种群具有两个年龄阶段, 幼年期和成年期, 并且从幼年到成年的平均成熟期为一个常数, 在模型中用时滞来表示. 在幼年种群中存在流行病, 并且这个流行病只在幼年种群中传播. 讨论了几个平衡点的存在性和稳定性, 并且研究了时滞对模型动力学行为的影响. 第二节研究具有阶段结构和脉冲的单种群 SI 流行病模型. 为了控制害虫的数量, 在固定时刻脉冲式投放染病的害虫, 从而让流行病在害虫种群中传播以达到控制害虫数量的目的, 因为染病害虫是不危害农作物的. 得到了易感害虫绝灭周期解的存在性和全局渐进稳定性条件, 也得到了系统持久的充分条件. 为利用流行病控制害虫提供了理论依据.

2. 第四章讨论了两个具有阶段结构的两种群捕食模型. 第一节研究了一个食饵具有阶段结构的 Lotka-Volterra 捕食模型. 假设食饵分为两个年龄阶段, 幼年卵和成虫; 捕食者种群不分年龄, 并且只捕食成年食饵, 因为幼年食饵被它们的卵壳所保护. 定期的投放天敌达到控制害虫的目的, 捕食功能函数是最基本的 Lotka-Volterra 型. 得到了害虫绝灭周期解局部稳定和全局稳定的充分条件; 也得到了系统持久的充分条件, 也就是害虫没有被有效地控制的条件. 得到的释放天敌的阈值为合理的利用天敌控制害虫提供了理论依据. 第二节研究了食饵具有阶段结构的比率依赖捕食模型. 在此模型中, 仍然假设食饵分为两个年龄段, 幼年卵和成虫; 捕食者种群不分年龄, 并且只捕食成年食饵, 捕食功能函数是比率依赖的. 研究结果表明: 在特殊的情况下, 无论投放多少天敌, 都不能有效的控制害虫. 这也揭示了比率依赖对模型动力学行为的影响, 从而也解释了为什么有些害虫很难被控制住.

3. 第五章讨论了具有两次脉冲的食饵染病的捕食模型. 假设食饵(害虫)种群分为两类: 易感食饵(易感害虫)和染病食饵(染病害虫). 染病害虫是不危害农作物的, 所以为了控制食饵种群的数量, 采取释放染病害虫和释放天敌(捕食者)相结合的方法. 在某些固定时刻脉冲式的释放天敌, 在另外一些固定时刻脉冲式的释放染病害虫. 基于这些假设建立了具有两次脉冲的捕食模型. 通过使用脉冲微分方程的 Floquet 定理、小扰动方法以

及比较技巧, 研究了易感害虫绝灭周期解的全局渐近稳定性以及系统持久生存的条件.

关键词: 脉冲微分方程; 阶段结构; 平衡点; 害虫绝灭周期解; 全局渐近稳定; 持续生存

Applications of Stage Structure and Impulsive Differential Equations in Population Models

Abstract

Mathematical models of differential equations play an important role in describing population dynamic behavior. Mathematically, these models explain all kinds of population dynamic behaviors, which allows people to understand population dynamics scientifically so that some interactions of population can be intend to control. Especially, impulsive differential equations describe population dynamic models, which is more reasonable and precise on reflecting all kinds of change orderliness, since many life phenomena and human exploitation are almost impulsive in the natural world. In this dissertation, population dynamic models for pest management are established to consider several problems in population controls by means of the theory and method of impulsive differential equations. Dynamic behaviors, including the existence and stability of equilibriums, the existence of periodic solution and its global attractivity, the permanence and extinction of system, are investigated. The main results of this dissertation may be summarized as follows:

In Chapter 3, two simple species models with stage-structure are formulated and investigated. In section 3.1, a stage-structured simple species model with time-delay and disease in the infant is studied. It is assumed that the simple species has two stages, immature and mature. And the time from immature to mature is a constant which is expressed by a time delay. There is a disease among the immature population, and the disease will only infect the immature population, while the mature population will never be infected. The existence and stability of some potential equilibriums and the effect of time-delay on the dynamics of the model are studied. In section 3.2, a stage-structured *SI* epidemic model is constructed and studied. In order to control the number of pest, some infected pests are impulsively released at fixed time, so as to the pest number can be suppressed below economical injury level. The sufficient condition for the existence and stability of the susceptible pest eradication periodic solution is obtained, and the sufficient condition for the permanence of the system is also obtained. The results provide some theoretical bases for pest management.

In Chapter 4, two stage-structured predator-prey models are studied. In section 4.1, a Lotka-Volterra predator-prey model with stage structure in the prey is investigated. It is assumed that the prey population has two stages, immature egg and mature pest. The

predator population only capture mature pest, since immature prey is protected by the eggshell. In the model, the traditional Lotka-Volterra predation response is considered. The natural enemy (predator) is impulsively released to control the pest. The sufficient condition for the existence and stability of the pest eradication periodic solution is gotten; and the sufficient condition for the permanence of the system is also obtained. A threshold is obtained, which provide theoretical base for pest management. In section 4.2, a ratio-dependent predator-prey model with stage-structure in the prey is studied. In this model, it is also assumed that the prey population has two stages, immature egg and mature pest. The predator only capture mature pest, since the immature is protected by the eggshell. And, the ratio-dependent predation response is considered. The results show that under some special situation, the pest population will never be controlled, no matter how many natural enemy (predator) is released. This result shows the difference between ratio-dependent predation and other predation response, and it also explains why some pests are hard to be eradicated.

In Chapter 5, a predator-prey model with disease in the prey and two impulses for integrated pest management is investigated. The prey (pest) population is divided into two classes: susceptible prey(susceptible pest)and infected prey(infected prey). The infected pest will not do harm to the crops. Thus, infected pest and predator are impulsively released at different fixed time to control the number of the pest. Based on the above assumptions, a predator-prey model with two impulses is constructed. By use of the Floquet theorem, small interruption and comparative skills, the sufficient condition for the global stability of the pest-eradication periodic solution is obtained, and the permanence of the system is also obtained.

Key words: impulsive differential equations; stage-structure; equilibrium; pest-eradication periodic solutions; global asymptotic stability; permanence

大连理工大学学位论文独创性声明

作者郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用内容和致谢的地方外，本论文不包含其他个人或集体已经发表的研究成果，也不包含其他已申请学位或其他用途使用过的成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中做了明确的说明并表示了谢意。

若有不实之处，本人愿意承担相关法律责任。

学位论文题目：阶段结构和脉冲效应在种群模型中的应用

作者签名：石敬勇

日期：2008 年 12 月 21 日

大连理工大学学位论文版权使用授权书

本人完全了解学校有关学位论文知识产权的规定，在校攻读学位期间论文工作的知识产权属于大连理工大学，允许论文被查阅和借阅。学校有权保留论文并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印、或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

学位论文题目: 阶段结构和脉冲效应在种群模型中的应用

作者签名: 石晓青

日期: 2008 年 12 月 21 日

导师签名: 陈. 子. 希

日期 2008 年 12 月 21 日

1 绪论

本章首先将对本论文研究的重要性进行论述,指出本论文的研究意义,并说明本论文的研究在其中的地位和作用,然后介绍与本论文研究相关的国内外研究现状和发展趋势,最后给出本论文研究的主要成果和章节安排.

1.1 研究的背景和意义

生物数学作为一门交叉学科正在快速地发展.数学科学的知识和技巧已经被引进生物科学的领域,它们帮助生物学家解释各种生命现象.反过来,生物科学又为数学提供了丰富的课题,促进数学本身的发展.种群动力学作为生物数学的一个分支,已经引起许多学者的兴趣.数学模型具有解释功能、判据功能和预见功能.微分方程数学模型在描述种群动力学行为中起到了很大的作用.这些数学模型的研究常常涉及到常微分方程、时滞微分方程和脉冲微分方程的相关内容.利用微分方程动力系统的理论对许多种群之间的相互作用进行分析,从数学的角度来解释各种种群动力学行为,使人们科学地认识种群动力学,从而对某些种群的相互作用有目的地进行控制.微分方程动力系统的应用非常广泛,如经济开发、环境保护、种群生态学,传染病和药物动力学以及微生物的培养等.研究的课题包括边界平衡点和正平衡点的存在性和稳定性,极限环的存在性和稳定性,正周期解的存在性和稳定性,种群的持续生存和灭绝,种群的开发和利用等.研究的系统大致有两类:自治系统和非自治系统.

许多实际问题的发展过程往往具有这样的特性,即系统经历一个短时间的作外部作用,但这个短暂的干扰时间同整个发展过程相比可以忽略不计,所以从数学的角度来描述这种发展过程要用到脉冲微分方程.脉冲微分方程是在常微分方程的基础上发展起来的,其突出的特点是能够充分考虑到瞬间变化对状态的影响,能够更合理、更精确地反映事物的变化规律.所以许多学者对脉冲微分方程的理论及其应用作了广泛的研究.如专著^[1-3]详细介绍了脉冲微分方程理论.文^[4,5]研究了时滞脉冲微分方程解的存在性、可微性和延拓性.文^[6-9]研究了脉冲微分方程解的振动性.文^[10-12]研究脉冲微分系统的稳定性.文^[13,14]给出脉冲微分系统周期解和极限环的存在性和稳定性.脉冲微分方程已经被应用到各个科学领域.

我国自古以来就是一个农业大国,虫害和鼠害也一直是影响我国农业发展的重要威胁因素.就现在来讲,全国每年因鼠害造成的受灾面积达3.7亿亩,因鼠害造成的粮食损失在50-100亿公斤之间;草场受灾面积达到5.6亿亩,牧草损失近200亿公斤;鼠传染性疾病发病人数达20余万.在粮食、棉花、蔬菜等的生产过程中都会遇到病虫害的威胁.在水稻方面,害虫主要有稻飞虱、稻纵卷叶螟、二化螟、三化螟等,病害主要有稻瘟病.最近在长江流域水稻条纹叶枯病发病率非常高,大致的面积是2000万亩.水稻条纹叶枯病是一种叫做灰飞虱的昆虫传播的水稻病毒病.小麦上主要是病害,发生最严重的是小麦

条锈病,它是小麦最大的病害.在玉米上面,特别是甜玉米作为一种市民们喜爱的一种副食品,种植面积很大,由于受到玉米螟的危害,品质和价格受到了很大的影响.棉花方面,主要是棉铃虫、棉蚜、棉叶螨等.在转基因抗虫棉大面积种植的时候,棉铃虫可能不是很主要的问题,而盲椿象由原来次要害虫上升为主要的害虫,危害棉花.在蔬菜上主要有甜菜夜蛾、斜纹夜蛾、小菜蛾、烟粉虱、白粉虱、斑潜蝇等.这些农业病虫害都会给农业生产带来很不利的影响.比如,我国是产棉大国,棉花的产量居世界第一.在1992年的时候,我国的主要产棉区,比如山东、河北、河南、江苏、安徽、陕西、湖北、辽宁这些省份一共大概有6000多万亩棉田发生特大棉铃虫灾害,发生严重的省份比如山东、河南、河北等减产达到50%,全国的减产水平达到1/3.还有像蝗虫问题,主要是飞蝗,它的迁飞特性和它所导致的蝗灾在世界范围内都是非常严重的问题.飞蝗发生的面积很大,它的主要危害不仅在于很大面积农作物的减产,而且造成社会的恐慌,影响到社会的安定团结.在以前,蝗灾很严重的时候,跟旱灾、水灾并称为三大自然灾害.蝗虫的危害,主要表现在蝗虫的起飞.因为蝗虫群食量很大,有群居性,到了成熟的时候就要起飞.飞蝗到哪个地方就把当地所有的绿色植物全部吃光,危害是相当巨大的.

根据统计,近两千年来有110余种哺乳类和139种鸟类从地球上消失,其中有大约三分之一是近五十年来绝灭的.这些事实唤起人们对于保护濒危动物和稀有动物的强烈要求.相反,人们迫切希望消灭的有害动物,例如农林害虫、鼠害和医学上有害动物,虽然经过人类长期的,有时甚至是规模巨大的防治活动,但它们却是照样地活着,并且继续对人类产生危害.为什么人类想消灭的物种难以消灭,而不想消灭的物种却不知不觉的被消灭了,这是一件发人深省的事.从生态学观点来看,被消灭的物种多数属于稀有物种,而对人类危害较大的,大多数是适应于人类活动的,数量众多的物种.被人类无意识的消灭的物种,主要是由于人类的活动彻底地破坏了动物的栖息环境.而人类对于自己想消灭的动物所采取的防治措施,通常是直接改变动物物种的数量.动物生活的某种特定的栖息场所,它与栖息环境的紧密联系是在物种进化过程中逐步形成的.它的形态、生理和生态特征都适应这种环境,从栖息场所中获取食物,找到隐蔽场所和一切生命所必需的条件.因此,动物对于栖息场所的改变和破坏是特别敏感的.相反,用猎杀、毒杀等方法正面进攻有害动物,一般只是降低动物的数量,并不破坏它的栖息地.防治措施降低了动物的密度,不但不影响动物所需要的食物和其他资源,反而增加了每个个体的有效实物量和其他资源,结果动物的增长加速,性成熟提早,出生率上升而死亡率减少,于是种群的增长率提高,种群迅速得到恢复.因此,人们防治害虫的过程,往往成为一个持续的过程.

利用生物防治害虫在中国有悠久的历史.公元204年左右晋代嵇含著《南方草木状》和公元877年唐代刘恂著《岭表录异》都记载了利用一种蚊防治柑橘害虫的事例.明代陈经纶在《治蝗笔记》中详细的记载了自己发明的养鸭治虫的过程.陈经纶是个了不起的人物,他曾经从菲律宾的吕宋岛把甘薯引到福建进行试种.以后他和他的子孙们

又致力于在各地推广甘薯的种植,养鸭治蝗就是他在推广甘薯过程中发明的. 有一年,陈经纶教人种甘薯时,看到天边飞来一群蝗虫,把薯苗全部吃光了,一会儿又飞来几十只鹭鸟把蝗虫吃掉了. 他从中受到启发,认为鸭和鹭鸟的食性差不多,于是便养了几只鸭子,放在鹭鸟活动的地方,结果发现鸭子吃起蝗虫来比鹭鸟又多又快,于是号召当地老百姓大量养鸭子. 每到春夏之间,就将鸭子赶到田地里去吃蝗虫,后来这种方法成为江南地区治蝗的重要方法之一.

当然我们在防治害虫的过程中,因该舍弃“见虫就治,治虫务尽”的思想. 以往防治病虫害就是将害虫和病原微生物赶尽杀绝,这个观点在多数人的思想中根深蒂固,要利用可持续发展就必须更新这一观点. 要容忍有害生物的存在,实现“以虫治虫,以菌治虫”,对于有害生物不应只注重于杀死,更要注重于调节,只要把危害控制在不影响植物的生长就可以了. 在人类管理的城市园林生态中,由于人类、植物、有害生物、环境条件和天敌之间存在着复杂的关系,所以,其中任何一因子的变动,都会直接或间接地影响整个生态系统. 在防治上要从生态学出发,在管理上要创造不利于病虫害发生的条件,减少或不使用化学农药,保护天敌,提高自然的控制能力,保持生态的稳定.

本论文接下来将建立数学模型,研究利用病毒和天敌来控制害虫(有害物种). 利用数学的手段分析如何控制害虫,以及控制参数对相应的系统的动力学影响,从而为现实生活中的防治害虫策略提供有力的理论依据.

1.2 非线性动力系统研究现状

随着数学与计算机的发展,无论是在自然科学领域还是在社会科学领域,非线性动力系统受到了越来越多的关注. 目前对于非线性动力系统的研究大致可以分为两个方向,一个是研究动力系统中非线性现象的非线性动力学,另一个针对实际问题建立非线性动力系统模型. 非线性动力学是以非线性科学的基本原理为基础,用定性的、数值的、解析的或者实验的方法研究非线性系统的基本变化规律的新兴学科. 它的应用非常广泛,比如人工神经网络、生物数学、管理科学和生物工程等,而且发挥着越来越重要的作用,因此对非线性动力系统的研究成为当今学术界的一个热点.

俄罗斯科学家Lyapunov^[16]在1892年间完成的博士论文《运动稳定性通论》推动了非线性动力系统的发展. Lyapunov的贡献包括最早给出了稳定性的严格定义,以及判断系统运动稳定性的直接方法和间接方法. 正是由于这个方法的明显的几何直观和简明的分析技巧,所以易于被工程技术人员所掌握,从而在技术的许多领域中得到广泛地应用和发展,并奠定了稳定性理论的基础. 动力系统作为一门系统的学科是Birkhoff在20世纪初期出版的名著《Dynamical systems》^[16]之后. Birkhoff对动力系统作了公理化处理,之后这个学科便迅速发展了起来. 当今的动力系统大致可分为Hamilton动力系统^[17]、无穷维动力系统^[18]、微分动力系统^[19]等方向. Hamilton动力系统源于天体力学,研究一般的Hamilton系统的动力学行为: 无穷维动力系统是偏微分方程理论的发展,主要研究系

统吸引子的问题;微分动力系统作为一个分支出现的标志是Smale在上世纪60年代的文章“Differential Dynamical Systems”^[19],主要研究流形上微分系统或迭代的动力学行为.从20世纪70年代开始,原来独立发展的分叉理论^[20, 21]汇入非线性动力学研究的主流中,Lorenz对混沌现象的发现更为非线性动力学的研究注入了活力^[22],分叉、混沌的研究成为非线性动力学新的研究热点.

由于非线性动力系统在模拟现实世界的动态行为时表现出特有的优越性,所以在许多领域中都得到广泛地应用.这方面,我国学者也做了许多杰出的工作,比如叶彦谦^[23]、张芷芬^[24]、丁同仁^[25]等.陈兰荪等人利用非线性动力系统研究了种群的动态特征^[26],高彩霞等人利用非线性动力系统模拟甘油歧化生产1,3-丙二醇的实验过程^[27].随着对非线性动力系统研究的不断深化,逐渐演化出非线性偏微分动力系统^[28],带时滞的非线性动力系统等等.

1.3 脉冲动力系统发展概况

在许多实际问题中,由于某些干扰,发展过程会出现快速的变化,并且干扰及突变过程同整个发展过程相比是非常短暂的,可认为是瞬间发生的.因此,像这样存在脉冲现象的发展过程其数学模型往往可归结为脉冲微分动力系统.随着科学技术的突飞猛进,人们越来越认识到脉冲微分方程的重要性以及在实际中的应用价值.脉冲微分方程不但深入到自然科学当中,如航天技术、控制系统、生态平衡、流行病等,而且也涉及到社会科学,如利率控制问题、以及工业生产管理等.

1989年Lakshmikantham等人著《Theory of Impulsive Differential Equations》^[1]一书标志脉冲微分方程从常(偏)微分方程中分离出来.由于脉冲微分方程的相关理论远比无脉冲情形内容丰富,自此脉冲微分方程的理论研究吸引了国内外的众多学者,已有很大发展^[1-3, 29].Lakshmikantham、Bainov、Simenov、刘新芝等学者系统地研究 n 维欧氏空间脉冲系统解的存在性、正则性、边值问题、系统稳定性、振荡性、比较原理等理论^[29-31].近几年,出现了许多无限维欧氏空间及Banach空间中的结果:Ahmed^[32, 33]、Kaul^[34]等研究了Banach空间中半线性脉冲系统适度解的存在性、正则性和稳定性;Cooke^[35]给出周期解的存在性结果;郭大均^[36]、申建华^[37, 38]等讨论了非线性脉冲系统边值问题的极大值原理、无限时滞泛函脉冲系统的稳定性和有界性;傅希林等^[39]得出可变时间脉冲系统极限环的存在性;燕居让^[40]给出了一类非线性时滞微分方程广义振动和广义非振动的判定定理.

在应用方面,脉冲微分方程广泛应用于疾病的脉冲免疫、种群的控制、杀虫剂的脉冲投放、具有脉冲需求的最优物流控制等实际问题.在与其他学科的交叉研究中,陈兰荪^[41]、马知恩^[42]等研究了脉冲微分方程理论在流行病学及种群生态学中的应用;王克^[43]等研究了种群脉冲系统的拟稳态解和周期解;Abdelkader^[44]考虑了医药学中新陈代谢的非线性脉冲模型,得出疾病稳定性条件及系统非平凡解的分歧理论.但具有时滞的

脉冲微分方程和一般脉冲方程在种群动力学和流行病动力学方面的应用研究还刚刚起步, 需要进一步加以研究.

1.4 害虫治理研究现状

在上世纪70年代一些生物学家和数学家开始利用数学的方法研究害虫管理的策略^[45-47]. 1980年, Goh 在其著作^[48]中提出了以下简单的害虫防治模型:

$$\begin{cases} S' = -rSI, \\ I' = rSI - \omega I, \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} S' = -rSI, \\ I' = rSI - \omega I + u, \end{cases}$$

其中 S 是 t 时刻易染病虫害的数量, I 是 t 时刻染病虫害的数量, u 是在实验室培养的具有传染力的害虫的投放率. 随后, 文献^[49-51]继续研究害虫管理策略的数学模型. 近年来陈兰荪及其研究小组开始把脉冲微分方程理论与害虫的管理结合起来, 得到了好的结论^[52-67].

1.5 本文的主要工作

本文以害虫管理为研究背景, 研究了连续的常微分系统和脉冲微分系统所描述的种群模型. 对于常微分系统, 主要研究系统的平衡点的存在性和稳定性以及参数对模型的动力学行为的影响. 对于脉冲微分系统, 主要研究害虫绝灭周期解的存在性、局部稳定性、全局吸引性以及系统的持久性等问题, 并研究参数对于系统的动力学行为的影响, 从而为现实生活中的害虫管理策略提供一些理论保障.

本文取得的主要研究成果安排如下:

第二章作为预备知识, 介绍了本论文所需的脉冲微分方程理论的一些基本知识.

第三章讨论了两个具有阶段结构的单种群模型. 第一节研究幼年染病的具有阶段结构和时滞的单种群模型. 所考虑的种群具有两个年龄阶段, 幼年期和成年期, 并且从幼年到成年的平均成熟期为一个常数, 在模型中用时滞来表示. 在幼年种群中存在流行病, 并且这个流行病只在幼年种群中传播. 讨论了几个平衡点的存在性和稳定性, 并且研究了时滞对模型动力学行为的影响. 第二节研究具有阶段结构和脉冲的单种群 SI 流行病模型. 为了控制害虫的数量, 在固定时刻脉冲式投放染病的害虫, 从而让流行病在害虫种群中传播以达到控制害虫数量的目的, 因为染病虫害是不危害农作物的. 得到了易感害虫绝灭周期解的存在性和全局渐进稳定性条件, 也得到了系统持久的充分条件. 为利用流行病控制害虫提供了理论依据.

第四章讨论了两个具有阶段结构的两种群捕食模型. 第一节研究了一个食饵具有阶段结构的Lotka-Volterra 捕食模型. 假设食饵分为两个年龄阶段, 幼年卵和成虫; 捕食者

种群不分年龄, 并且只捕食成年食饵, 因为幼年食饵被它们的卵壳所保护. 定期的投放天敌达到控制害虫的目的, 捕食功能函数是最基本的Lotka-Volterra型. 得到了害虫绝灭周期解局部稳定和全局稳定的充分条件; 也得到了系统持久的充分条件, 也就是害虫没有被有效地控制的条件. 得到的释放天敌的阈值为合理的利用天敌控制害虫提供了理论依据. 第二节研究了食饵具有阶段结构的比率依赖捕食模型. 在此模型中, 仍然假设食饵分为两个年龄段, 幼年卵和成虫; 捕食者种群不分年龄, 并且只捕食成年食饵, 捕食功能函数是比率依赖的. 研究表明: 在特殊的情况下, 无论投放多少天敌, 都不能有效的控制害虫. 这也揭示了比率依赖对模型动力学行为的影响, 从而也解释了为什么有些害虫很难被控制住.

第五章讨论了具有两次脉冲的食饵染病的捕食模型. 假设食饵(害虫)种群分为两类: 易感食饵(易感害虫)和染病食饵(染病害虫). 染病害虫是不危害农作物的, 所以为了控制食饵种群的数量, 采取释放染病害虫和释放天敌(捕食者)相结合的方法. 在某些固定时刻脉冲式的释放天敌, 在另外一些固定时刻脉冲式的释放染病害虫. 基于这些假设建立了具有两次脉冲的捕食模型. 通过使用脉冲微分方程的Floquet 定理, 小扰动方法以及比较技巧, 研究了易感害虫绝灭周期解的全局渐进稳定性以及系统持久生存的条件. 丰富了脉冲微分理论在种群模型中的应用.

2 预备知识

上一章介绍了本论文的研究背景和理论意义,概述了非线性动力系统、脉冲微分系统的稳定性以及害虫管理策略的研究现状.

本章介绍脉冲微分方程的一些基本概念和基本结论,给出脉冲微分方程的三种常见形式.特别地给出研究脉冲微分方程的重要理论-比较定理,以及线性周期脉冲微分方程的Floquet理论.本章的内容出自文献^[1-3].

2.1 脉冲微分方程

首先对脉冲微分方程进行基本的描述.考虑下列系统所描述的一个发展过程:

(i) 微分系统为

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (2.1)$$

其中 $f: R_+ \times \Omega \rightarrow R^n$, $\Omega \subset R^n$ 是一个开集, R^n 是 n -维欧几里得空间, R_+ 是非负实数域.

(ii) 集合 $M(t), N(t) \subset \Omega, t \in R_+$.

(iii) 算子 $A(t): M(t) \rightarrow N(t), t \in R_+$.

令 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ 是系统(2.1)经过初值 (t_0, x_0) 的任意解.那么这个发展过程变化如下:点 $P_t = (t, x(t))$ 从初始位置 $P_{t_0} = (t_0, x_0)$ 开始沿着曲线 $\{(t, x): t \geq t_0, x = x(t)\}$ 运动,直到时刻 $t_1 > t_0$, 点 P_t 遇到集合 $M(t)$. 在时刻 $t = t_1$, 算子 $A(t)$ 把点 $P_{t_1} = (t_1, x(t_1))$ 映射到点 $P_{t_1^+} = (t_1, x_1^+) \in N(t_1)$, 其中 $x_1^+ = A(t_1)x(t_1)$. 然后点 P_t 从点 $P_{t_1^+} = (t_1, x_1^+)$ 开始沿系统(2.1)的解曲线 $x(t) = x(t, t_1, x_1^+)$ 继续运动,直到在下一个时刻 $t_2 > t_1$, 点 P_t 再次遇到集合 $M(t)$. 然后, 点 P_{t_2} 又被算子 $A(t)$ 映射到点 $P_{t_2^+} = (t_2, x_2^+) \in N(t_2)$, 其中 $x_2^+ = A(t_2)x(t_2)$. 同样, 点 P_t 又从点 $P_{t_2^+} = (t_2, x_2^+)$ 开始沿着系统(2.1)的解 $x(t) = x(t, t_2, x_2^+)$ 继续运动.因此,只要系统(2.1)的解存在,那么这种运动就会继续下去.

这样称刻画上述发展过程的关系(i), (ii), (iii)构成一个脉冲微分系统,点 P_t 所描述的曲线称为积分曲线,定义积分曲线的函数称为脉冲微分系统的解.

脉冲微分系统与连续微分系统的解有很大的差异,其解的形式有以下三种情形:

(a) 连续函数,如果积分曲线与集合 $M(t)$ 不相交或交于算子 $A(t)$ 的不动点.

(b) 具有有限个一类间断点的分段连续函数,如果积分曲线与集合 $M(t)$ 只相交有限次而且这有限个交点不是算子 $A(t)$ 的不动点.

(c) 具有可数个一类间断点的分段连续函数,如果积分曲线与集合 $M(t)$ 相交可数次而且这可数个交点不是算子 $A(t)$ 的不动点.

点 P_i 遇到集合 $M(t)$ 的时刻 $t_k, k = 1, 2, \dots$, 称为脉冲作用时刻, 而且假定脉冲微分系统的解 $x(t)$ 在 t_k 处是左连续的, 也就是, $x(t_k^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_k - h) = x(t_k)$.

集合 $M(t), N(t)$ 和算子 $A(t)$ 的自由选择可以得到各种不同的脉冲微分系统. 在应用中常见的是以下三种典型的脉冲微分系统.

I. 固定时刻脉冲的微分系统

令集合 $M(t)$ 表示一系列平面 $t = t_k$, 其中 $\{t_k\}$ 是一个时间序列而且当 $k \rightarrow \infty$ 时 $t_k \rightarrow \infty$. 只对 $t = t_k$ 定义算子 $A(t)$, 算子序列 $\{A(k)\}$ 满足

$$A(k) : \Omega \rightarrow \Omega, x \rightarrow A(t)x = x + I_k(x),$$

其中 $I_k : \Omega \rightarrow \Omega$. 相应地, 集合 $N(t)$ 也只对 $t = t_k$ 定义, 因此 $N(k) = A(k)M(k)$. 这样, 在固定时刻发生脉冲的脉冲微分系统为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), t \neq t_k, \\ \Delta x = I_k(x), t = t_k, k = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (2.2)$$

其中 $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k)$, $x(t_k^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_k + h)$. 那么脉冲微分系统(2.2)的任意解 $x(t)$ 都满足

- (i) $\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)), t \in (t_k, t_{k+1}]$,
- (ii) $\Delta x(t_k) = I_k(x(t_k)), k = 1, 2, \dots$.

显然, 系统(2.2)的解的性质受脉冲作用的影响.

II. 脉冲时刻变化的脉冲微分系统

集合 $M(t)$ 是由一系列曲面 $\{S_k\}$ 组成, 其中 $S_k : t = \tau_k(x), k = 1, 2, \dots$, 而且 $\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x), \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k(x) = \infty$. 那么脉冲时刻变化的脉冲微分系统为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), t \neq \tau_k(x), \\ \Delta x = I_k(x), t = \tau_k(x), k = 1, 2, \dots. \end{cases} \quad (2.3)$$

象(2.3)这种脉冲时刻变化的脉冲微分系统与脉冲时刻固定的脉冲微分系统(2.2)相比, 它的研究更复杂. 因为对每一个 k 来说, 系统(2.3)的脉冲作用时刻都依赖于方程 $t_k = \tau_k(x(t_k))$ 的解. 所以, 系统(2.3)从不同初始位置出发的解就会有不同的间断点. 而且, 一个解可能多次遇到同一个曲面 $t = \tau_k(x)$, 这种现象称为“脉冲现象”. 此外, 不同的解可以经过一段时间之后重合为一个解, 这种现象称为“合流”.

III. 自治脉冲微分系统

集合 $M(t) \equiv M, N(t) \equiv N$ 和算子 $A(t) \equiv A$ 与时间 t 无关, 而且算子 $A : M \rightarrow N$ 定义为 $Ax = x + I(x)$, 其中 $I : \Omega \rightarrow \Omega$. 那么自治脉冲微分系统为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x), & x \notin M, \\ \Delta x = I(x), & x \in M, \end{cases} \quad (2.4)$$

当系统(2.4)的任意解 $x(t) = x(t, 0, x_0)$ 在时刻 t 碰到集合 M 时, 算子 A 立即把点 $x(t) \in M$ 映到点 $y(t) = x(t) + I(x(t)) \in N$. 由于系统(2.4)是自治的, 所以点 $x(t)$ 的运动在 Ω 中沿着系统(2.4)的轨线考虑.

下面是这三类脉冲微分系统的特征:

这些脉冲微分系统的共同特征是它们的解都是分段连续函数, 间断点就是脉冲作用时刻. 这就是为什么系统(2.2)的所有解都有相同的间断点, 而系统(2.3)和(2.4)的不同解有不同的间断点. 系统(2.3)和(2.4)的这一特点使它们的研究更复杂. 另一特征是系统(2.4)具有自治性, 即对所有的 $t_0 \in R, x_0 \in \Omega$ 和 $t > t_0$, 都有 $x(t; t_0, x_0) = x(t - t_0; 0, x_0)$. 而系统(2.2)和(2.3)不具有这种性质, 即使是对 $t \in R, k \in Z, x \in \Omega$ 有 $f(t, x) = f(x), I_k(x) = I(x)$, 这里 $I(x) = 0$ 不恒成立.

2.2 脉冲微分方程解的存在性、唯一性和延拓性

本节给出脉冲微分方程解的存在性、唯一性和延拓性.

令 $\Omega \subset R^n$ 是一个开集, N 是正整数集, $\alpha < \beta$, $\langle \alpha, \beta \rangle$ 表示任意区间(开、闭、半开半闭), $f: R \times \Omega \rightarrow R^n, I_k: \Omega \rightarrow R^n, (t_0, x_0) \in R \times \Omega$.

假定对每一个 $k \in N$, 函数 $\tau_k: \Omega \rightarrow R$ 在 Ω 中是连续的, 而且 $\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k(x) = \infty, x \in \Omega$.

考虑脉冲微分方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), & t \neq \tau_k(x), \\ \Delta x = I_k(x), & t = \tau_k(x), \end{cases} \quad (2.5)$$

初始条件为

$$x(t_0^+) = x_0. \quad (2.6)$$

定义 2.1 函数 $\varphi: \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow R^n$ 称为系统(2.5)的一个解, 如果:

1. $(t, \varphi(t)) \in R \times \Omega$ 对于 $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$;
2. 对于 $t \in (\alpha, \beta), t \neq \tau_k(\varphi(t)), k \in N$, 函数 $\varphi(t)$ 是可微的而且 $\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t, \varphi(t))$;
3. 函数 $\varphi(t)$ 在 $\langle \alpha, \beta \rangle$ 中是左连续的而且如果 $t \in \langle \alpha, \beta \rangle, t = \tau_k(\varphi(t)), t \neq \beta$, 那么 $\varphi(t^+) = \varphi(t) + I_k(\varphi(t))$ 而且对每一个 $j \in N$ 和某一个 $\delta > 0$ 有 $s \neq \tau_j(\varphi(s)), t < s < t + \delta$.

定义 2.2 系统(2.5)的每一个定义在区间 (t_0, β) 上而且满足条件 $\varphi(t_0^+) = x_0$ 的解称为初值问题(2.5), (2.6)的解(或者说系统(2.5)具有初值 (t_0, x_0) 的解).

注意到, 初始条件 $x(t_0) = x_0$ 被加强为极限条件 $x(t_0^+) = x_0$, 这对系统(2.5)来说是合理的, 因为对某些 k , (t_0, x_0) 可能满足 $t_0 = \tau_k(x_0)$. 但是, 如果对所有的 k 总有 $t_0 \neq \tau_k(x_0)$ 成立, 那么初始条件 $x(t_0^+) = x_0$ 和 $x(t_0) = x_0$ 是等价的.

显然, 如果对所有的 k 都有 $t_0 \neq \tau_k(x_0)$, 那么初值问题(2.5), (2.6)的解的存在性和唯一性只取决于函数 f 的性质. 也就是说, 如果 f 在点 (t_0, x_0) 的邻域内连续, 那么初值问题(2.5), (2.6)的解是存在的; 如果 f 在这个邻域内是Lipschitz连续的, 那么这个解是唯一的.

然而, 如果对某些 k 有 $t_0 = \tau_k(x_0)$, 也就是说, (t_0, x_0) 属于超曲面 $\sigma_k \equiv t = \tau_k(x)$, 那么有可能初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.7)$$

的解完全在 σ_k 中. 因此, 为了保证初值问题(2.7)的解 $x(t)$ 在某个区间 $[t_0, \beta)$ 存在和条件 $t \neq \tau_k(x(t)), t \in (t_0, \beta), k \in N$ 成立, 需要对 f 和 τ_k 附加一些条件.

为此, 有下面的定理.

定理 2.1 假定以下条件成立

1. 函数 $f: R \times \Omega \rightarrow R^n$ 在 $t \neq \tau_k(x), (k \in N)$ 是连续的;
2. 对任意的 $(t, x) \in R \times \Omega$, 存在一个局部可积函数 l 使得在 (t, x) 的小邻域内有 $|f(s, y)| \leq l(s)$;
3. 对每一个 $k \in N$, 条件 $t_1 = \tau_k(x_1)$ 说明存在一个 $\delta > 0$ 使得 $t \neq \tau_k(x)$ 对所有的 $0 < t - t_1 < \delta, |x - x_1| < \delta$ 成立.

那么, 对每一个 $(t_0, x_0) \in R \times \Omega$ 和某个 $\beta > t_0$, 初值问题(2.5), (2.6)有解 $x: (t_0, \beta) \rightarrow R^n$.

注 2.1 定理2.1 的条件2可以用下面的条件代替:

2'. 对任意的 $k \in N$ 和 $(t, x) \in \sigma_k$, 当 $(s, y) \rightarrow (t, x), s > \tau_k(y)$ 时, $f(s, y)$ 存在有限极限.

注 2.2 如果函数 f 使得初值问题(2.7)的解唯一, 那么初值问题(2.5), (2.6)的解也是唯一的. 比方说, 如果函数 f 在 (t_0, x_0) 的邻域内关于 x 是(局部)Lipschitz连续的, 那么这个要求就满足.

如果初值问题(2.5), (2.6)有唯一解, 那么用 $x(t; t_0, x_0)$ 表示这个解. 下面更详细地考虑固定时刻发生脉冲作用的脉冲微分方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), & t \neq \tau_k, \\ \Delta x = I_k(x), & t = \tau_k, \end{cases} \quad (2.8)$$

其中 $\tau_k < \tau_{k+1}, (k \in N), \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \infty$.

下面的定理是成立的.

定理 2.2 令函数 $f: R \times \Omega \rightarrow R^n$ 在集合 $(\tau_k, \tau_{k+1}] \times \Omega, (k \in N)$ 上是连续的, 而且对每一个 $k \in N, x \in \Omega$ 假定当 $(t, y) \rightarrow (\tau_k, x), t > \tau_k$ 时 $f(t, y)$ 存在有限极限.

那么对每一个 $(t_0, x_0) \in R \times \Omega$ 存在一个 $\beta > t_0$ 使得初值问题(2.8), (2.6)有解 $x: (t_0, \beta) \rightarrow R^n$; 而且如果函数 f 在 $R \times \Omega$ 内关于 x 是局部Lipschitz连续的, 那么这个解是唯一的.

定义 2.3 设 $\varphi(t): \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow R^n$ 是系统(2.8)的一个解, 如果(2.8)存在一个解 $\psi(t): \langle \alpha, \gamma \rangle \rightarrow R^n, \gamma > \beta$, 使得当 $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ 时 $\psi(t) = \varphi(t)$, 那么称 $\psi(t)$ 是 $\varphi(t)$ 的一个右延拓. 如果系统(2.8)的解 $\varphi(t): \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow R^n$ 不能向右延拓, 那么区间 $\langle \alpha, \beta \rangle$ 称作是解 $\varphi(t)$ 的最大存在区间.

下面考虑系统(2.8)的解 $\varphi(t)$ 向右延拓的问题.

定理 2.3 假定下列条件成立

1. 函数 $f: R \times \Omega \rightarrow R^n$ 在集合 $(\tau_k, \tau_{k+1}] \times \Omega, (k \in N)$ 上是连续的, 而且对每一个 $k \in N, x \in \Omega$ 假定当 $(t, y) \rightarrow (\tau_k, x), t > \tau_k$ 时 $f(t, y)$ 存在有限极限;
2. 函数 $\varphi(t): (\alpha, \beta) \rightarrow R^n$ 是(2.8)的一个解.

那么, 解 $\varphi(t)$ 可以向 β 的右端延拓的充要条件是极限

$$\lim_{t \rightarrow \beta^-} \varphi(t) = \eta$$

存在而且下列条件之一成立:

- (a) 对每一个 $k \in N, \beta \neq \tau_k$ 而且 $\eta \in \Omega$;
- (b) 对某个 $k \in N, \beta = \tau_k$ 而且 $\eta + I_k(\eta) \in \Omega$.

定理 2.4 假定下列条件成立

1. 定理2.3 的条件1 成立;
2. 函数 f 在 $R \times \Omega$ 内关于 x 是局部Lipschitz连续的;
3. 对所有的 $k \in N, \eta \in \Omega$, 有 $\eta + I_k(\eta) \in \Omega$.

那么对任意的 $(t_0, x_0) \in R \times \Omega$, 初值问题(2.8), (2.6)存在唯一的解定义在 (t_0, ω) 上而不能向 ω 的右边延拓.

假设定理2.4 的条件成立而且 $(t_0, x_0) \in R \times \Omega$, 那么解 $x(t; t_0, x_0)$ 的最大存在区间 (t_0, ω) 用 $J^+ = J^+(t_0, x_0)$ 表示. 在种群动力学中, 解的最大存在区间通常是 $[t_0, \infty)$.

定理 2.5 假定下列条件成立

1. 定理2.4 的条件成立;
2. $\varphi(t)$ 是初值问题(2.8), (2.6)的一个解;
3. 存在一个紧集 $Q \subset \Omega$ 使得 $\varphi(t) \in Q, t \in J^+(t_0, x_0)$.

那么 $J^+(t_0, x_0) = (t_0, \infty)$.

如果定理2.4 的条件成立, 那么对每一个 $(t_0, x_0) \in R \times \Omega$, 初值问题(2.8), (2.6) 都存在唯一的解 $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ 定义在 J^+ 上, 直接计算可得

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds + \sum_{t_0 < \tau_k < t} I_k(x(\tau_k)), \quad t \in J^+.$$

2.3 脉冲不等式和紧性准则

众所周知, 微分和积分不等式理论在定性、定量研究微分方程的解中起着非常重要的作用. 相应地, 脉冲微分、积分不等式理论在研究脉冲微分方程中也是很重要的. 这一节, 我们介绍脉冲微分、积分不等式和紧性准则.

令 $PC(R_+, R^n) = \{\psi : R_+ \rightarrow R^n | \psi \text{ 是连续的对 } t \in R_+, t \neq \tau_k, \text{ 而且 } \psi(\tau_k^+) = \lim_{t \rightarrow \tau_k^+} \psi(t), \psi(\tau_k^-) = \lim_{t \rightarrow \tau_k^-} \psi(t), \psi(\tau_k) = \psi(\tau_k^-), k \in N\}$;

$$PC^1(R_+, R^n) = \{\psi : R_+ \rightarrow R^n | \frac{d\psi}{dt} \in PC(R_+, R^n)\}.$$

定理 2.6 假定函数 $u \in PC^1(R_+, R)$ 满足不等式

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} \leq p(t)u(t) + f(t), t \neq \tau_k, t > 0, \\ u(\tau_k^+) \leq d_k u(\tau_k) + h_k, \quad \tau_k > 0, \\ u(0^+) \leq u_0, \end{cases} \quad (2.9)$$

其中 $p, f \in PC(R_+, R), d_k \geq 0$, 而且 h_k, u_0 是常数.

那么, 对于 $t > 0$ 有

$$\begin{aligned} u(t) &\leq u_0 \prod_{0 < \tau_k < t} d_k \exp(\int_0^t p(s)ds) \\ &\quad + \int_0^t \prod_{s \leq \tau_k < t} d_k \exp(\int_s^t p(\tau)d\tau) f(s)ds \\ &\quad + \sum_{0 < \tau_k < t} \prod_{\tau_k < \tau_j < t} d_j \exp(\int_{\tau_k}^t p(\tau)d\tau) h_k. \end{aligned}$$

定理 2.7 对 $t > 0$ 假定函数 $u \in PC(R_+, R_+)$ 满足不等式

$$u(t) \leq u_0 + \int_0^t p(s)u(s)ds + \sum_{0 < \tau_k < t} \beta_k u(\tau_k),$$

其中 $p \in PC(R_+, R_+)$, $\beta_k \geq 0$, 而且 u_0 是常数.

那么, 对 $t > 0$ 有

$$u(t) \leq u_0 \prod_{0 < \tau_k < t} (1 + \beta_k) \exp\left(\int_0^t p(s) ds\right).$$

假定序列 $\{\tau_k\}$, $k \in N$ 有有限个点位于区间 $[0, T]$. 令 $x(t) \in PC([0, T], R^n)$, 且在集合 $PC([0, T], R^n)$ 中引入范数 $\|x\| = \sup\{|x(t)| : t \in [0, T]\}$. 那么 $PC([0, T], R^n)$ 是一个一致拓扑收敛的 Banach 空间.

对于集合 $\mathcal{F} \subset PC([0, T], R^n)$, 应用 Schauder-Tychonoff 不动点定理需要紧性准则.

定义 2.4 集合 $\mathcal{F}$ 称为在 $[0, T]$ 中拟等度连续当且仅当对任意的 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得如果 $x \in \mathcal{F}$, $k \in N$, $t_1, t_2 \in (\tau_{k-1}, \tau_k] \cap [0, T]$, 而且 $|t_1 - t_2| < \delta$, 那么 $|x(t_1) - x(t_2)| < \epsilon$.

定理 2.8 (紧性准则) 集合 $\mathcal{F} \subset PC([0, T], R^n)$ 是相对紧的当且仅当:

1. $\mathcal{F}$ 是有界的, 也就是, 对每一个 $x \in \mathcal{F}$ 存在 $c > 0$ 使得 $\|x\| \leq c$;
2. $\mathcal{F}$ 在 $[0, T]$ 中是拟等度连续的.

2.4 脉冲微分方程的比较定理及稳定性结论

本节主要介绍脉冲微分方程的基本比较定理和稳定性的一些结论, 为此先引入一些基本概念.

考虑纯量脉冲微分方程

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = g(t, u(t)), & t \neq \tau_k, \\ u(\tau_k^+) = \psi_k(u(\tau_k)), & \tau_k > 0, \\ u(\tau_0^+) = u_0 \geq 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

其中 $g : R_+ \times R_+ \rightarrow R$, $\psi_k : R_+ \rightarrow R_+$.

定义 2.5 设 $r(t) = r(t; t_0, u_0)$ 是 (2.10) 在区间 $[t_0, t_0 + a)$ 上的一个解, 如果对于 (2.10) 在区间 $[t_0, t_0 + a)$ 上的任意解 $u(t) = u(t; t_0, u_0)$ 都有

$$u(t) \leq r(t), t \in [t_0, t_0 + a),$$

则称 $r(t)$ 是 (2.10) 的最大解.

类似地, 如果不等号反向可以定义最小解.

考虑脉冲微分系统

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), & t \neq \tau_k, \\ \Delta x = I_k(x), & t = \tau_k, \\ x(\tau_0^+) = x_0, & \tau_0 \geq 0, k = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (2.11)$$

满足下列假设(A_0):

- (i) $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k < \dots$, 而且当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\tau_k \rightarrow \infty$;
- (ii) $f : R_+ \times R^n$ 在 $(\tau_{k-1}, \tau_k] \times R^n$ 上是连续的, 而且对每一个 $x \in R^n, k = 1, 2, \dots$, $\lim_{(t,y) \rightarrow (\tau_k^+, x)} f(t, y) = f(\tau_k^+, x)$ 是存在的;
- (iii) $I_k : R^n \rightarrow R^n$.

定义 2.6 设 $V : R_+ \times R^n \rightarrow R_+$, 如果:

- (i) V 在 $(\tau_{k-1}, \tau_k] \times R^n$ 上是连续的, 而且对每一个 $x \in R^n, k = 1, 2, \dots$, 有 $\lim_{(t,y) \rightarrow (\tau_k^+, x)} V(t, y) = V(\tau_k^+, x)$;
- (ii) V 关于 x 是局部 Lipschitzian.

那么称 V 是属于 V_0 类的.

定义 2.7 对 $(t, x) \in (\tau_{k-1}, \tau_k] \times R^n, V \in V_0$, 定义 V 的上右导数为

$$D^+V(t, x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \frac{1}{h} [V(t+h, x+hf(t, x)) - V(t, x)].$$

则脉冲微分系统(2.11)的比较定理如下:

定理 2.9 设 $V : R_+ \times R^n \rightarrow R_+$, 而且 $V \in V_0$. 假定

$$\begin{cases} D^+V(t, x) \leq g(t, V(t, x)), & t \neq \tau_k, \\ V(t, x + I_k(x)) \leq \psi_k(V(t, x)), & t = \tau_k, \end{cases} \quad (2.12)$$

其中 $g : R_+ \times R_+ \rightarrow R$ 满足(A_0 ii), $\psi_k : R_+ \rightarrow R_+$ 是单调不减的. 设 $r(t)$ 是方程(2.10)在 $[t_0, \infty)$ 上的最大解.

那么, 由 $V(t_0^+, x_0) \leq u_0$ 就可得

$$V(t, x(t)) \leq r(t), t \geq t_0$$

其中 $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ 是系统(2.11) 在 $[t_0, \infty)$ 上的任意解.

推论 2.1 如果在定理2.9 中, 假定

(a) $g(t, u) \equiv 0, \psi_k(u) = u$ 对所有的 k , 那么 $V(t, x(t))$ 关于 t 是单调不增的而且 $V(t, x(t)) \leq V(t_0^+, x_0), t \geq t_0$;

(b) $g(t, u) \equiv 0, \psi_k(u) = d_k u, d_k \geq 0$ 对所有的 k , 那么

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0^+, x_0) \prod_{t_0 < \tau_k < t} d_k, t \geq t_0;$$

(c) $g(t, u) = -\alpha u, \alpha > 0, \psi_k(u) = d_k u, d_k \geq 0$ 对所有的 k , 那么

$$V(t, x(t)) \leq [V(t_0^+, x_0) \prod_{t_0 < \tau_k < t} d_k] \exp(-\alpha(t - t_0)), t \geq t_0;$$

(d) $g(t, u) = \lambda'(t)u, \psi_k(u) = d_k u, d_k \geq 0$ 对所有的 k , 其中 $\lambda \in C^1[R_+, R_+]$, 那么

$$V(t, x(t)) \leq [V(t_0^+, x_0) \prod_{t_0 < \tau_k < t} d_k] \exp(\lambda(t) - \lambda(t_0)), t \geq t_0;$$

如果(2.12)的不等号方向反过来, ψ_k 是单调不增的, (2.10)存在最小解 $\rho(t)$, 那么 $V(t_0^+, x_0) \geq u_0$ 蕴含 $V(t, x(t)) \geq \rho(t), t \geq t_0$. 如果定理2.9 中的 V, g, ψ_k 是向量函数而且 $g(t, u)$ 关于 u 拟单调不减时, 也有类似的结论^[1].

下面给出脉冲微分方程解的稳定性概念和准则.

考虑脉冲微分系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), t \neq \tau_k(x), \\ \Delta x = I_k(x), t = \tau_k(x), \\ x(t_0^+) = x_0. \end{cases} \quad (2.13)$$

假设 $x_0(t)$ 是(2.13)的一个解. 一般来说, 这个解不能通过变量变换转变成平凡解的稳定性概念. 这是因为解 $x_0(t)$ 和邻近解 $x(t)$ 的脉冲作用时刻不一定相同, 而且后面要求 $|x(t) - x_0(t)|$ 对所有的 $t \geq t_0$ 很小也是不成立的. 为此, 要把脉冲微分方程的稳定性概念作适当的修改.

定义 2.8 设 $x_0(t) = x(t; t_0, y_0), t \geq t_0$ 是系统(2.13) 的一个解, 假定 $x_0(t)$ 在 t_k 碰到曲面 $S_k: t = \tau_k(x)$ 而且 $t_k < t_{k+1}, t_k \rightarrow \infty$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时. 那么, (2.13) 的解 $x_0(t)$ 被称为

(S_{1 η}) 稳定的, 如果对任意的 $\epsilon > 0, \eta > 0$ 和 $t_0 \in R_+$, 存在一个 $\delta = \delta(t_0, \epsilon, \eta) > 0$, 使得 $|x_0 - y_0| < \delta$ 蕴含

$$|x(t) - x_0(t)| < \epsilon, t \geq t_0 \text{ 和 } |t - t_k| > \eta.$$

其中 $x(t) = x(t, t_0, x_0), t \geq t_0$ 是(2.13)的任意解;

(S_{2 η}) 一致稳定, 如果(S_{1 η})中的 δ 与 t_0 无关;

(S_{3η}) 吸引, 如果对任意的 $\epsilon > 0, \eta > 0$ 和 $t_0 \in R_+$, 存在 $\delta_0 = \delta_0(t_0) > 0$ 和 $T = T(t_0, \epsilon, \eta) > 0$, 使得 $|x_0 - y_0| < \delta_0$ 蕴含

$$|x(t) - x_0(t)| < \epsilon, t \geq t_0 + T \text{ 和 } |t - t_k| > \eta;$$

(S_{4η}) 一致吸引, 如果(S_{3η})中的 δ_0 和 T 与 t_0 无关;

(S_{5η}) 渐近稳定, 如果(S_{1η})和(S_{3η})成立;

(S_{6η}) 一致渐近稳定, 如果(S_{2η})和(S_{4η})成立.

注意到, 如果对所有的 $k \in N$ 有 $f(t, 0) \equiv 0, I_k(0) = 0$, 那么系统(2.13)有平凡解. 如果 $\tau_k(x) = t_k$, 也就是 $\tau_k(x)$ 与 x 无关, 那么对每一个解, 脉冲作用发生的时刻是一样的. 因此, 在这种情况下, 脉冲微分方程解的稳定性概念和常微分方程解的稳定性概念是一致的.

脉冲微分方程的稳定性准则是对方程(2.11)及其假设(A₀)而言. 假定对所有的 $k \in N$ 有 $f(t, 0) \equiv 0, I_k(0) = 0$, 那么(2.11)有平凡解. 下面给出稳定性准则. 令 $S(\rho) = \{x \in R^n : |x| < \rho\}$. 先引入类函数的定义.

定义 2.9 (i) 如果一个函数 $a \in C[R_+, R_+]$, $a(0) = 0$ 而且 $a(u)$ 关于 u 是严格单调增加的, 那么称 a 属于 K 类的.

(ii) 如果一个函数 $\sigma \in C[R_+, R_+]$, $\sigma(u)$ 关于 u 是严格单调减少的而且当 $u \rightarrow \infty$ 时 $\sigma(u) \rightarrow 0$, 那么称 σ 属于 L 类的.

定理 2.10 假设

(i) $V : R_+ \times S(\rho) \rightarrow R_+, V \in V_0$,

$$D^+V(t, x) \leq g(t, V(t, x)), t \neq \tau_k,$$

其中 $g : R_+ \times R_+ \rightarrow R, g(t, 0) \equiv 0$, 而且 g 满足(A₀ ii);

(ii) 存在 $\rho_0 > 0$, 使得 $x \in S(\rho_0)$ 蕴含 $x + I_k(x) \in S(\rho), k \in N$ 和 $V(t, x + I_k(x)) \leq \psi_k(V(t, x)), t = \tau_k, x \in S(\rho_0)$, 其中 $\psi_k : R_+ \rightarrow R_+$ 是单调不减的;

(iii) 在 $R_+ \times S(\rho)$ 上有 $b(|x|) \leq V(t, x) \leq a(|x|)$, 其中 $a, b \in K$.

那么, (2.10)的平凡解的稳定性就蕴含了(2.11)的平凡解的稳定性.

关于种群动力学的一些基本概念如下.

设 $x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_+^n, R_+^n = \{x \in R^n | x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}, R_+ = [0, \infty)$. 考虑脉冲微分系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), & t \neq \tau_k, \\ \Delta x = I_k(x), & t = \tau_k, \end{cases} \quad (2.14)$$

其中 $f: R_+ \times R_+^n \rightarrow R_+^n, I_k: R_+^n \rightarrow R_+^n, k \in N, 0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \infty$.

假设系统(2.14) 在 $R_+ \times \Omega$ 上满足2.2 节中解的存在唯一性条件而且解的最大存在区间是 $[0, \infty)$, 这样系统(2.14) 可以描述种群动力系统. 系统(2.14) 也是本文要研究的主要系统. 设 $x(t) = x(t; \tau_0, x_0)$ 和 $x^*(t) = x(t; \tau_0, x_0^*)$ 分别是系统(2.14) 的任意解和给定解, 满足 $x(\tau_0^+) = x_0, x^*(\tau_0^+) = x_0^*$.

定义 2.10 若对任意初值 x_0 和某个 $1 \leq i \leq n$ 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0,$$

则称种群 x_i 是灭绝的.

定义 2.11 若对任意初值 x_0 存在正常数 $0 < m < M$ (均于 x_0 无关), 使得当 t 充分大时有

$$m \leq x_i(t) \leq M, i = 1, 2, \dots, n,$$

则称系统(2.14) 是一致持续生存的, 同时也称该系统中的每一个种群持续生存.

2.5 线性周期脉冲微分方程的Floquet理论

首先对于(2.14)给出其为周期脉冲微分方程的定义.

定义 2.12 如果存在 $T > 0, q \in N$, 使得对任意 $t \in R_+, k \in N, x \in R_+^n$ 有

$$f(t+T, x) = f(t, x), I_{k+q}(x) = I_k(x), \tau_{k+q} = \tau_k + T,$$

则称系统(2.14) 是 T -周期脉冲微分方程.

周期脉冲微分方程有如下两个性质^[3].

定理 2.11 设系统(2.14) 是 T -周期的, $x(t) = x(t; 0, x_0), t \in [0, T]$ 是(2.14) 的一个解满足 $x(0) = x_0$ 而且 $x(T; 0, x_0) = x_0$, 那么 $x(t)$ 的 T -周期扩张

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [0, T], \\ x(t - jT), & t \in (jT, (j+1)T] \end{cases}$$

是(2.14) 的 T -周期解.

定理 2.12 设系统(2.14) 是 T -周期的. 那么(2.14) 存在 T -周期解的充要条件是存在一个 $x_0 \in R_+^n$ 使得 $x(T; 0, x_0) = x_0$.

下面给出线性 T -周期脉冲微分方程的Floquet理论, 详细请参阅文^[3].

线性 T -周期脉冲微分方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)x(t), & t \neq \tau_k, t \in R, \\ \Delta x = B_k x, & t = \tau_k, k \in N. \end{cases} \quad (2.15)$$

满足下列条件(H3).

H3.1 $A(\cdot) \in PC(R, C^{n \times n})$ 而且 $A(t+T) = A(t)$ ($t \in R$);

H3.2 $B_k \in C^{n \times n}$, $\det(E + B_k) \neq 0$, $\tau_k < \tau_{k+1}$ ($k \in N$);

H3.3 存在一个 $q \in N$ 使得

$$B_{k+q} = B_k, \tau_{k+q} = \tau_k + T \quad (k \in N).$$

不失一般性, 假定 $\tau_0 \leq 0 < \tau_1$. 下面是Floquet定理的推广.

定理 2.13 设条件(H3)成立, 那么(2.15)的每一个基解矩阵都能表示成

$$X(t) = \phi(t)e^{\Lambda t}, \quad (t \in R).$$

其中矩阵 $\Lambda \in C^{n \times n}$ 是常数阵, 矩阵 $\phi(\cdot) \in PC^1(R, C^{n \times n})$ 是非奇异的、 T -周期的.

因为 $X(t)$ 是系统(2.15)的基解矩阵, 所以矩阵 $Y(t) = X(t+T)$ 也是(2.15)的基解矩阵, 从而有唯一的非奇异矩阵 $M \in C^{n \times n}$ 使得

$$X(t+T) = X(t)M \quad (t \in R), \quad (2.16)$$

那么, 方程(2.16)中的常数矩阵 M 称为系统(2.15)对应于基解矩阵 $X(t)$ 的单值矩阵. 显然, 系统(2.15)的所有单值矩阵都是相似的而且有相同的特征值.

单值矩阵的特征值 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ 称为系统(2.15)的Floquet乘子; 定理2.13 中的矩阵 Λ 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 称为系统(2.15)的Floquet指数. 显然有

$$\lambda_j = \frac{1}{T} \ln \mu_j \quad (j = 1, \dots, n).$$

注 2.3 为了计算系统(2.15)的Floquet乘子 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, 必须任意选择(2.15)的一个基解矩阵 $X(t)$ 来计算矩阵 $M = X(t_0+T)X^{-1}(t_0)$ 的特征值, 其中 $t_0 \in R$ 是固定的.

如果 $X(0) = E$ (或 $X(0^+) = E$), 那么可以选择 $M = X(T)$ (或 $M = X(T^+)$) 作为(2.15)的单值矩阵.

下面的定理说明了系统(2.15)的Floquet乘子完全描述了系统的稳定性.

定理 2.14 假设条件(H3)成立. 那么线性 T -周期脉冲微分系统(2.15)是

1. 稳定的, 当且仅当, 系统(2.15)的所有Floquet乘子 μ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) 满足不等式 $|\mu_j| \leq 1$, 而且, 那些 $|\mu_j| = 1$ 的 μ_j 对应单初等因子;
2. 渐近稳定的, 当且仅当, 系统(2.15)的所有Floquet乘子 μ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) 满足不等式 $|\mu_j| < 1$;
3. 不稳定, 如果对于某些 $j = 1, 2, \dots, n$ 有 $|\mu_j| > 1$.

3 具有阶段结构的单种群模型研究

阶段结构是生态学和人口学上的一个重要概念. 在自然界中, 有许多生物个体在他们的生命过程中经历了两个阶段, 幼年与成年. 特别的, 哺乳动物和一些两栖动物就是经历了这两个阶段. 从数学的观点看来, 用阶段结构来描述种群的生命过程也是非常有趣的. 在阶段结构的种群动力系统中, 种群的持续生存和绝灭是两个重要的概念. 近年来, 阶段结构模型被广泛研究^[68, 69, 71, 72, 75, 76]. 这不仅是因为它们比偏微分方程所描述的模型更简单, 而且因为它们所呈现的现象与偏微分模型类似, 文献^[68, 69]研究了单种群阶段结构模型. 本章, 我们将研究两个具有阶段结构的单种群模型. 第一节讨论了一个幼年染病的常微分模型, 得到了系统的几个平衡点存在性和稳定性的充分条件. 在第二节讨论了幼年染病的脉冲微分方程模型, 得到了易感害虫绝灭周期解的存在性和稳定性的条件.

3.1 幼年染病的具有阶段结构和时滞的单种群模型研究

3.1.1 引言

文^[68, 69]研究了具有阶段结构的单种群模型, 作者假设种群从幼年到成年的平均成熟期为一个常数, 在模型中用一个时滞来表示. 文^[68]的模型为:

$$\begin{cases} x_1'(t) = \alpha x_2(t) - \gamma x_1(t) - \alpha e^{-\gamma\tau} x_2(t - \tau), \\ x_2'(t) = \alpha e^{-\gamma\tau} x_2(t - \tau) - \beta x_2^2(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

这里 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 分别表示幼年和成年种群的密度, $\alpha > 0$ 代表出生率, $\gamma > 0$ 是幼年的死亡率, $\beta > 0$ 代表了成年种群的死亡率和密度制约, $\tau > 0$ 表示成熟期. $\alpha e^{-\gamma\tau} x_2(t - \tau)$ 表示在 $t - \tau$ 时刻出生的幼年(也就是 $\alpha x_2(t - \tau)$)并且存活到时刻 t 的密度(由于幼年具有死亡率), 因此, $\alpha e^{-\gamma\tau} x_2(t - \tau)$ 表示从幼年到成年的转化率.

种群疾病的传播主要依赖于疾病本身的特性. 例如, 麻疹, 腮腺炎, 水痘, 猩红热, 白喉等疾病主要在幼年种群中传播, 而淋病、梅毒等传染病只在成年种群中传播. 文^[71, 72]考虑了具有阶段结构的单种群流行病模型. 文^[71]考虑的模型为:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_1 x_2(t) - r x_1(t) - c_1 x_2(t - \tau) - a_2 x_1(t) y(t) + b_1 y(t), \\ y'(t) = a_2 x_1(t) y(t) - b_1 y(t) - (r + \alpha) y(t), \\ x_2'(t) = c_1 x_2(t - \tau) - c_2 x_2^2(t). \end{cases} \quad (3.2)$$

此外, 文^[75, 76]考虑了具有阶段结构的单种群的收获策略. 受文^[68, 71]的启发, 本节将考虑幼年染病的具有阶段结构和时滞的单种群模型. 在3.1.2, 建立模型; 在3.1.3, 利用分析的方法研究模型的几个平衡点的存在性和稳定性; 在3.1.4, 给出例子, 并且作了简短的讨论.

3.1.2 模型的建立

本节建立如下模型:

$$\begin{cases} x_1'(t) = rx_2(t) - d_1x_1(t) - \alpha x_1(t)I(t) - rx_2(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^t [d_1+\alpha I(s)]ds}, \\ x_2'(t) = rx_2(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^t [d_1+\alpha I(s)]ds} - d_2x_2(t) - \beta x_2^2(t), \\ I'(t) = \alpha x_1(t)I(t) - (d_1 + \delta)I(t), \end{cases} \quad (3.3)$$

这里 $x_1(t)$ $I(t)$ 表示易感幼年和染病幼年种群的密度, $x_2(t)$ 表示成年种群的密度, 流行病只在幼年种群中传染, 而成年种群不会染病. $\alpha x_1(t)I(t)$ 表示双线性传染率, $\alpha > 0$ 是接触数, $\beta > 0$ 表示成年种群的密度制约, $\delta > 0$ 表示染病幼年种群的因病死亡率. 其它参数的具体生物意义可以参看文^[68, 69, 71, 72]. 下面研究系统(3.3)的平衡点的存在性及稳定性.

3.1.3 平衡点存在性和稳定性分析

通过计算, 我们得到系统(3.3)有以下平衡点:

(1) 种群绝灭平衡点(平凡平衡点) $P_0(0, 0, 0)$ 总是存在的.

(2) 当 $R_1 = \frac{re^{-d_1\tau}}{d_2} > 1$ 时, 存在无病平衡点(边界平衡点): $P_1(x_1^0, x_2^0, 0)$, 这里 $x_1^0 = \frac{r(1-e^{-d_1\tau})x_2^0}{d_1}$, $x_2^0 = \frac{re^{-d_1\tau}-d_2}{\beta} > 1$.

(3) 当 $R_1 = \frac{re^{-d_1\tau}}{d_2} > 1$, 且 $R_2 = \frac{\alpha r(1-e^{-d_1\tau})(re^{-d_1\tau}-d_2)}{\beta d_1(d_1+\delta)} > 1$, $R_3 = \frac{2re^{-d_1\tau}}{d_2+r} < 1$ 时, 存在唯一的地方病平衡点(正平衡点) $P_2(x_1^*, x_2^*, I^*)$, 这里 $x_1^* = \frac{d_1+\delta}{\alpha}$, $x_2^* = \frac{re^{-(d_1+\alpha I^*)\tau}-d_2}{\beta}$, I^* 是方程

$$\frac{r}{\beta}(re^{-(d_1+\alpha I)\tau} - d_2)(1 - e^{-(d_1+\alpha I)\tau}) = \frac{d_1(d_1+\delta)}{\alpha} + (d_1+\delta)I$$

的唯一正根.

平衡点 P_0 和 P_1 的存在性是显然的, 下面来说明地方病平衡点的存在性和唯一性. 我们知道正平衡点 $P_2(x_1^*, x_2^*, I^*)$ 满足代数方程组:

$$\begin{cases} rx_2 - d_1x_1 - \alpha x_1I - rx_2e^{-(d_1+\alpha I)\tau} = 0, \\ rx_2e^{-(d_1+\alpha I)\tau} - d_2x_2 - \beta x_2^2 = 0, \\ \alpha x_1I - (d_1 + \delta)I = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

由方程组(3.4)的第三个方程, 容易得到: $x_1 = \frac{d_1+\delta}{\alpha}$, 由第二个方程得到: $x_2 = \frac{re^{-(d_1+\alpha I)\tau}-d_2}{\beta}$, 代入第一个方程得到:

$$\frac{r}{\beta}(re^{-(d_1+\alpha I)\tau} - d_2)(1 - e^{-(d_1+\alpha I)\tau}) = \frac{d_1(d_1+\delta)}{\alpha} + (d_1+\delta)I.$$

令 $f(I) = \frac{r}{\beta}(re^{-(d_1+\alpha I)\tau} - d_2)(1 - e^{-(d_1+\alpha I)\tau})$, $g(I) = \frac{d_1(d_1+\delta)}{\alpha} + (d_1+\delta)I$. 对函数 $f(I)$ 求导得到 $f'(I) = \frac{r\alpha I}{\beta}e^{-(d_1+\alpha I)\tau}[2re^{-(d_1+\alpha I)\tau} - (d_2+r)]$, 由于 $R_3 = \frac{2re^{-d_1\tau}}{d_2+r} < 1$, 所以在区间 $(0, +\infty)$ 上 $f'(I) < 0$, 即说明了 $f(I)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是单调递减的.

当 $R_2 = \frac{\alpha r(1-e^{-d_1\tau})(re^{-d_1\tau}-d_2)}{\beta d_1(d_1+\delta)} > 1$ 时, 我们有 $f(0) > g(0) > 0$, 容易看出 $g(I)$ 是斜率大于零的直线, 所以存在唯一正根, 记作 I^* , 对应地可以求出 $x_2^* = \frac{re^{-(d_1+\alpha I^*)\tau}-d_2}{\beta}$.

下面讨论平衡点的稳定性, 有以下定理.

定理 3.1 (1) 当 $R_1 = \frac{re^{-d_1\tau}}{d_2} < 1$ 时, 平衡点 P_0 是局部渐近稳定的; 当 $R_1 = \frac{re^{-d_1\tau}}{d_2} > 1$ 时, 平衡点 P_0 是不稳定的.

(2) 当 $R_1 = \frac{re^{-d_1\tau}}{d_2} > 1$, 且 $R_2 = \frac{\alpha r(1-e^{-d_1\tau})(re^{-d_1\tau}-d_2)}{\beta d_1(d_1+\delta)} < 1$ 时, 平衡点 P_1 是局部渐近稳定的; 当 $R_1 = \frac{re^{-d_1\tau}}{d_2} > 1$, 且 $R_2 = \frac{\alpha r(1-e^{-d_1\tau})(re^{-d_1\tau}-d_2)}{\beta d_1(d_1+\delta)} > 1$ 时, 平衡点 P_1 是不稳定的.

(3) 当 $R_1 = \frac{re^{-d_1\tau}}{d_2} > 1$, 且 $R_2 = \frac{\alpha r(1-e^{-d_1\tau})(re^{-d_1\tau}-d_2)}{\beta d_1(d_1+\delta)} > 1$, $R_3 = \frac{2re^{-d_1\tau}}{d_2+r} < 1$ 时, 平衡点 P_2 存在、唯一并且它是局部渐近稳定的.

证明: (1) 在 P_0 处, 特征方程为:

$$(\lambda + d_1)(\lambda + d_1 + \delta)(\lambda - re^{-(\lambda+d_1)\tau} + d_2) = 0.$$

显然此特征方程的两个根为: $\lambda_1 = -d_1 < 0$, $\lambda_2 = -(d_1 + \delta) < 0$, 第三个特征根 λ_3 由等式 $\lambda = re^{-(\lambda+d_1)\tau} - d_2$ 决定. 为了判断 λ_3 的符号, 我们令 $f_2(\lambda) = \lambda$, $g_2(\lambda) = re^{-(\lambda+d_1)\tau} - d_2$, 容易看出, $f_2(\lambda)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $g_2(\lambda)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

(A1) 当 $R_1 = \frac{re^{-d_1\tau}}{d_2} < 1$ 时, $f_2(0) = 0$, $g_2(0) = re^{-d_1\tau} - d_2 < 0$, 所以, λ_3 为负数(示意图见图3.2), 对应的得到此时平衡点 P_0 是局部渐近稳定的.

(A2) 当 $R_1 = \frac{re^{-d_1\tau}}{d_2} > 1$ 时, $f_2(0) = 0$, $g_2(0) = re^{-d_1\tau} - d_2 > 0$. 所以, λ_3 为正数(类似于图3.1), 对应的得到此时平衡点 P_0 是不稳定的.

(2) 在 P_1 处, 特征方程为:

$$(\lambda + d_1)(\lambda - \alpha x_1^0 + d_1 + \delta)(\lambda - re^{-(\lambda+d_1)\tau} + d_2 + 2\beta x_2^0) = 0.$$

显然此特征方程的一个根为: $\lambda_1 = -d_1 < 0$, 第二个特征根 λ_2 由等式 $\lambda = re^{-(\lambda+d_1)\tau} - d_2 - 2\beta x_2^0$ 决定, 第三个特征根为: $\lambda_3 = \alpha x_1^0 - (d_1 + \delta)$. 为了判断 λ_2 的符号, 我们令 $f_3(\lambda) = \lambda$, $g_3(\lambda) = re^{-(\lambda+d_1)\tau} + d_2 + 2\beta x_2^0$, 容易看出, $f_3(\lambda)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $g_3(\lambda)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 且 $f_3(0) = 0$, $g_3(0) = re^{-d_1\tau} - d_2 - 2\beta x_2^0 = -\beta x_2^0 < 0$, 所以, 特征根 λ_2 的符号为负(类似于图3.2). 另外, 还有

(B1) 当 $R_1 = \frac{re^{-d_1\tau}}{d_2} > 1$, 且 $R_2 = \frac{\alpha r(1-e^{-d_1\tau})(re^{-d_1\tau}-d_2)}{\beta d_1(d_1+\delta)} < 1$ 时, $\lambda_3 = \alpha x_1^0 + d_1 + \delta < 0$, 对应的得到此时平衡点 P_1 是局部渐近稳定的.

(B2) 当 $R_1 = \frac{re^{-d_1\tau}}{d_2} > 1$, 且 $R_2 = \frac{\alpha r(1-e^{-d_1\tau})(re^{-d_1\tau}-d_2)}{\beta d_1(d_1+\delta)} > 1$ 时, $\lambda_3 = \alpha x_1^0 + d_1 + \delta > 0$, 对应的得到此时平衡点 P_1 是不稳定的.

(3) 在 P_2 处, 特征方程为:

$$(\lambda - re^{-(\lambda+\alpha I^*+d_1)\tau} + d_2 + 2\beta x_2^*)(\lambda^2 + (d_1 + \alpha I^*)\lambda + \alpha^2 x_1^* I^*) = 0.$$

容易看出, 特征根 λ_2 和 λ_3 满足: $\lambda_2 + \lambda_3 = -(d_1 + \alpha I^*) < 0$, $\lambda_2 \lambda_3 = \alpha^2 x_1^* I^* > 0$, 所以特征根 λ_2 和 λ_3 都具有负实部. 第一个特征根 λ_1 由等式 $\lambda = re^{-(\lambda + \alpha I^* + d_1)\tau} - d_2 - 2\beta x_2^*$ 决定. 为了判断 λ_1 的符号, 我们令 $f_4(\lambda) = \lambda$, $g_4(\lambda) = re^{-(\lambda + \alpha I^* + d_1)\tau} - d_2 - 2\beta x_2^*$. 容易看出, $f_4(\lambda)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $g_4(\lambda)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 并且 $f_4(0) = 0$, $g_4(0) = re^{-(\alpha I^* + d_1)\tau} - d_2 - 2\beta x_2^* = -\beta x_2^* < 0$. 所以, 特征根 λ_1 的符号为负(类似于图3.2). 因此, 平衡点 P_2 存在、唯一并且它是局部渐近稳定的. $\square$

引理 3.1^[77] 考虑下列方程

$$x'(t) = ax(t - \tau) - bx(t) - cx^2(t) \quad (3.5)$$

这里 a, b, c, τ 都是正常数, 并且对于 $-\tau \leq t \leq 0$ 都有 $x(t) > 0$, 则得到

(i) 如果 $a > b$, 那么 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{a-b}{c}$.

(ii) 如果 $a \leq b$, 那么 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

定理 3.2 (1) 当 $R_1 = \frac{re^{-d_1\tau}}{d_2} \leq 1$ 时, 则平衡点 P_0 是全局渐近稳定的.

(2) 当 $R_1 = \frac{re^{-d_1\tau}}{d_2} > 1$ 且 $R_2 = \frac{\alpha r(1-e^{-d_1\tau})(re^{-d_1\tau}-d_2)}{\beta d_1(d_1+\delta)} < 1$ 时, 则平衡点 P_1 是全局渐近稳定的.

(3) 当 $R_1 = \frac{re^{-d_1\tau}}{d_2} > 1$ 且 $R_2 = \frac{\alpha r(1-e^{-d_1\tau})(re^{-d_1\tau}-d_2)}{\beta d_1(d_1+\delta)} > 1$, $R_3 = \frac{2re^{-d_1\tau}}{d_2 + r} < 1$ 时, 平衡点 P_2 存在、唯一并且它是局部渐近稳定的; 但是它并不能保证全局稳定.

证明: 从系统(3.3)的第二个方程我们得到

$$x_2'(t) = rx_2(t - \tau)e^{-\int_{t-\tau}^t [d_1 + \alpha I(s)] ds} - d_2 x_2(t) - \beta x_2^2(t) \leq re^{-d_1\tau} x_2(t - \tau) - d_2 x_2(t) - \beta x_2^2(t).$$

如果 $R_1 = \frac{re^{-d_1\tau}}{d_2} \leq 1$, 由引理3.1和比较原理, 容易得到: 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $x_2(t) \rightarrow 0$. 从系统(3.3)的第一个方程得知: 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $x_1(t) \rightarrow 0$. 由系统(3.3)的第三个方程得到: 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $I(t) \rightarrow 0$. 因此, P_0 是全局吸引的. 由定理3.1得到局部稳定性, 所以得到全局稳定性.

(2) 由于 $R_1 = \frac{re^{-d_1\tau}}{d_2} > 1$ 且 $R_2 = \frac{\alpha r(1-e^{-d_1\tau})(re^{-d_1\tau}-d_2)}{\beta d_1(d_1+\delta)} < 1$, 一定存在充分小的正常数 ϵ 使得 $\frac{\alpha r(1-e^{-d_1\tau})}{d_1} (\frac{re^{-d_1\tau}-d_2}{\beta} + \epsilon) < d_1 + \delta$. 从系统(3.3)的第二个方程有

$$x_2'(t) = rx_2(t - \tau)e^{-\int_{t-\tau}^t [d_1 + \alpha I(s)] ds} - d_2 x_2(t) - \beta x_2^2(t) \leq re^{-d_1\tau} x_2(t - \tau) - d_2 x_2(t) - \beta x_2^2(t).$$

如果 $R_1 = \frac{re^{-d_1\tau}}{d_2} \geq 1$, 由引理3.1和比较原理得到

$$x_2(t) \leq \frac{re^{-d_1\tau}}{\beta}, t \rightarrow +\infty. \quad (3.6)$$

所以, 存在充分大的时刻 T_1 使得对所有的 $t \geq T_1$ 都有

$$x_2(t) \leq \frac{re^{-d_1\tau}}{\beta} + \epsilon.$$

从系统(3.3)的第一个方程知道: 当 $t \geq T_1$ 时, 以下不等式成立

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= rx_2(t) - d_1x_1(t) - \alpha x_1(t)I(t) - rx_2(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^t [d_1+\alpha I(s)]ds} \\ &\leq r(1-e^{-d_1\tau})\left[\frac{re^{-d_1\tau}-d_2}{\beta} + \epsilon\right] - d_1x_1(t) \end{aligned}$$

考虑到比较原理, 得到: 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $x_1(t) \leq \frac{r(1-e^{-d_1\tau})[\frac{re^{-d_1\tau}-d_2}{\beta} + \epsilon]}{d_1}$. 从系统(3.3)的第三个方程得到: 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $I(t) \rightarrow 0$. 因此对于任意小的 $\epsilon_1 > 0$, 存在一个时刻 $T_2(T_2 > T_1)$ 使得对所有的 $t \geq T_2$ 都有 $I(t) < \epsilon_1$. 从而得到

$$x_2'(t) = rx_2(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^t [d_1+\alpha I(s)]ds} - d_2x_2(t) - \beta x_2^2(t) \geq re^{-(d_1+\alpha\epsilon_1)\tau}x_2(t-\tau) - d_2x_2(t) - \beta x_2^2(t).$$

由引理3.1和比较原理, 得到

$$x_2(t) \geq \frac{re^{-(d_1+\alpha\epsilon_1)\tau} - d_2}{\beta}, t \rightarrow +\infty. \quad (3.7)$$

从(3.6)和(3.7) 以及 ϵ_1 是充分小的这个事实, 得到: 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $x_2(t) \rightarrow \frac{re^{-(d_1+\alpha\epsilon_1)\tau}-d_2}{\beta} = x_2^0$. 类似的, 可以得到: 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $x_1(t) \rightarrow \frac{r(1-e^{-d_1\tau})(re^{-d_1\tau}-d_2)}{\beta d_1} = x_1^0$. 因此, $P_1(x_1^0, x_2^0, 0)$ 是全局渐进稳定的.

(3)令 $x(t) = x_1(t) - x_1^*$, $y(t) = x_2(t) - x_2^*$, $z(t) = I(t) - I^*$, 则系统(3.3)的平衡点 P_2 的稳定性等价于系统(3.8)在 $(0, 0, 0)$ 处的稳定性.

$$\begin{aligned} x'(t) &= -(d_1 + \alpha I^*)x(t) + ry(t) - \alpha x_1^*z(t) - \alpha x(t)z(t) + rx_2^*e^{-(d_1+\alpha I^*)\tau}[1 - e^{-\int_{t-\tau}^t \alpha z(s)ds}] \\ &\quad - ry(t)(t-\tau)e^{-(d_1+\alpha I^*)\tau}e^{-\int_{t-\tau}^t \alpha z(s)ds} \\ y'(t) &= -(d_2 + 2\beta x_2^*)y(t) - \beta y^2(t) - rx_2^*e^{-(d_1+\alpha I^*)\tau}[1 - e^{-\int_{t-\tau}^t \alpha z(s)ds}] \\ &\quad + ry(t)(t-\tau)e^{-(d_1+\alpha I^*)\tau}e^{-\int_{t-\tau}^t \alpha z(s)ds} \\ z'(t) &= \alpha I^*x(t) + \alpha x(t)z(t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

选取如下的泛函

$$V(t) = \frac{1}{2}(x(t) + y(t))^2 + \frac{x_1^*}{4I^*}z^2(t) + \frac{r}{2(d_2 + 2\beta x_2^*)}y^2(t)$$

则, 对 $V(t)$ 沿系统(3.8)求导数得到

$$\begin{aligned} V'(t) |_{(3.8)} &= -(d_1 + \alpha I^*)x^2(t) + [r - (d_1 + \alpha I^*)]x(t)y(t) - \alpha x_1^*y(t)z(t) \\ &\quad - \alpha x^2(t)z(t) - \alpha x(t)y(t)z(t) + \frac{\alpha x_1^*}{I^*}x(t)z^2(t) \\ &\quad - \frac{\beta r}{d_2 + 2\beta x_2^*}y^3(t) - \frac{rx_2^*(d_2 + \beta x_2^*)}{d_2 + 2\beta x_2^*}y(t)[1 - e^{-\int_{t-\tau}^t \alpha z(s)ds}] \\ &\quad - \frac{r(d_2 + \beta x_2^*)}{d_2 + 2\beta x_2^*}y(t)y(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^t \alpha z(s)ds} \end{aligned}$$

特别的, 如果选取 $z(t) = 0$, 则上面等式成为

$$V'(t)|_{(3.8)} = -(d_1 + \alpha I^*)x^2(t) + [r - (d_1 + \alpha I^*)]x(t)y(t) - \alpha x_1^*y(t)z(t) - \frac{\beta r}{d_2 + 2\beta x_2^*}y^3(t) + \frac{r(d_2 + \beta x_2^*)}{d_2 + 2\beta x_2^*}y(t)y(t - \tau). \quad (3.9)$$

令 $x(t) = y(t)$ 并且充分小, 则等式(3.9)右端的符号由 $r - 2(d_1 + \alpha I^*)$ 决定. 因此, 当 $r > 2(d_1 + \alpha I^*)$ 时, 我们得到 $V'(t)|_{(3.8)} > 0$. 所以, 由Liapunov 稳定性原理, $(0, 0, 0)$ 不是全局稳定的. 从而, P_2 对系统(3.3)也不是全局渐进稳定的. $\square$

推论 3.1 (1) 令 $\tau_0 = \frac{\ln \frac{d_2}{r}}{-d_1}$, 则当 $\tau > \tau_0$ 时, P_0 局部渐近稳定; 当 $\tau < \tau_0$ 时, P_0 不稳定.

(2) 令 $\Delta = (r - d_2)^2 - \frac{4}{\alpha}\beta d_1(d_1 + \delta)$, 则有

(2.1) 当 $\tau < \tau_0$ 且 $\Delta < 0$ 时, P_1 局部渐进稳定;

(2.2) 当 $\tau < \tau_0$ 且 $\Delta > 0$ 时, 令 $\tau_1 = \frac{\ln y_1^*}{-d_1}$, $\tau_2 = \frac{\ln y_2^*}{-d_1}$, $\tau_3 = \frac{\ln \frac{r+d_2}{2r}}{-d_1}$, 其中 $y_1^* = \frac{r+d_2-\sqrt{\Delta}}{2r}$, $y_2^* = \frac{r+d_2+\sqrt{\Delta}}{2r}$ 是方程 $ry^2 - (r+d_2)y + d_2 + \frac{\beta d_1(d_1+\delta)}{r\alpha} = 0$ 的两个正根. 若 $\tau \in (0, \tau_2) \cup (\tau_1, \tau_0)$, 则 P_1 局部渐进稳定; 若 $\tau \in (\tau_2, \tau_1)$, 则 P_1 不稳定.

(3) 当 $\tau \in (\tau_3, \tau_1)$ 时, P_2 是局部渐进稳定的.

证明: 首先我们指出, τ_0 和 τ_3 总是存在的(在生物意义下, 我们总是假设 $r > \max\{d_1, d_2\}$); τ_1 和 τ_2 存在的条件是 $\Delta > 0$. 当 $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ 都存在时, 满足 $\tau_0 > \tau_1 > \tau_3 > \tau_2$.

(1) 容易看出 $R_1 < 1$ 和 $\tau > \tau_0$ 是等价的; 而且 $R_1 > 1$ 和 $\tau < \tau_0$ 是等价的.

(2) 当 $\Delta < 0$ 时, 方程 $ry^2 - (r + d_2)y + d_2 + \frac{\beta d_1(d_1+\delta)}{r\alpha} = 0$ 没有根, 所以, 此时对任意的 $\tau \in (0, +\infty)$, 都有 $R_2 = \frac{\alpha r(1-e^{-d_1\tau})(re^{-d_1\tau}-d_2)}{\beta d_1(d_1+\delta)} < 1$ 成立. 考虑到 P_1 存在的条件是 $\tau < \tau_0$ (即 $R_1 > 1$), 因此(2.1)成立.

当 $\Delta > 0$ 时, 方程 $ry^2 - (r + d_2)y + d_2 + \frac{\beta d_1(d_1+\delta)}{r\alpha} = 0$ 有两个正根 $y_1^* = \frac{r+d_2-\sqrt{\Delta}}{2r}$, $y_2^* = \frac{r+d_2+\sqrt{\Delta}}{2r}$.

若 $\tau \in (0, \tau_2) \cup (\tau_1, \tau_0)$, 对应的有 $R_2 = \frac{\alpha r(1-e^{-d_1\tau})(re^{-d_1\tau}-d_2)}{\beta d_1(d_1+\delta)} < 1$, 从而 P_1 局部渐进稳定.

若 $\tau \in (\tau_2, \tau_1)$, 对应的有 $R_2 = \frac{\alpha r(1-e^{-d_1\tau})(re^{-d_1\tau}-d_2)}{\beta d_1(d_1+\delta)} > 1$, 从而 P_1 不稳定. 因此(2.2)成立.

(3) 当 $\tau < \tau_0$, $\Delta > 0$, 且 $\tau \in (\tau_2, \tau_1)$ 时, $R_2 = \frac{\alpha r(1-e^{-d_1\tau})(re^{-d_1\tau}-d_2)}{\beta d_1(d_1+\delta)} > 1$; 另外, 容易看出 $\tau > \tau_3$ 等价于 $R_3 = \frac{2re^{-d_1\tau}}{d_2+r} < 1$, 而且 $\tau_3 \in (\tau_2, \tau_1)$. 所以, 当 $\tau \in (\tau_3, \tau_1)$ 时, 定理3.1的条件(3)满足, 故 P_2 是局部渐进稳定的. $\square$

推论 3.2 由定理3.1和推论3.1, 我们知道

(1) 当 $\Delta < 0$ 时, τ_0 是一个阈值. 若 $\tau > \tau_0$, 则 P_1 不存在, P_0 局部渐近稳定; 若 $\tau < \tau_0$, P_0 不稳定, P_1 存在而且局部渐进稳定.

(2) 当 $\Delta > 0$ 时, 平衡点的稳定性有 τ 的不同取值区间决定. 若 $\tau \in (0, \tau_2) \cup (\tau_1, \tau_0)$, P_1 是局部渐近稳定的; 若 $\tau \in (\tau_2, \tau_1)$, 则 P_1 不稳定; 进一步地, 若 $\tau \in (\tau_3, \tau_1)$, P_2 存在而且是局部渐进稳定的.

3.1.4 讨论

首先给出一个例子用来验证定理3.1.

例 3.1 取 $\alpha = \beta = r = 1$, $d_1 = 0.3$, $d_2 = 0.2$, $\tau = 2$, 若取 $\delta = 0.2$, 则有 $R_1 = 2.744 > 1$, $R_2 = 1.35 > 1$, $R_3 = 0.9147 < 1$, 根据定理3.1, 地方病平衡点 $P_2(x_1^*, x_2^*, I^*)$ 存在且是局部渐进稳定的; 若取 $\delta = 0.4$, 则有 $R_1 = 2.744 > 1$, $R_2 = 0.9643 > 1$, 根据定理3.1, 地方病平衡点 $P_2(x_1^*, x_2^*, I^*)$ 是不存在的. 这说明如果因病死亡率 δ 取值不是太大时(例如 $\delta = 0.2$), 可以形成地方病. 但是, 如果因病死亡率 δ 取值太大时(例如 $\delta = 0.4$), 则不容易形成地方病. 这是由于单位染病者在死亡之前所感染的新得病者不足一个, 从而该传染病绝灭.

从推论3.2, 我们可以给出生物意义下的解释. 若时滞充分大($\tau > \tau_0$), 即如果种群的成熟期充分长的话, 种群走向绝灭(平衡点 P_0 是全局稳定的). 若时滞不是太大($\tau < \tau_0$), 成年种群的密度制约系数很大(β 充分大), 或者成年种群的出生率和死亡率相差不多($|r - d_2| \ll 1$), 则种群持续生存, 疾病消除(平衡点 P_1 是全局稳定的), 因为此时 $\Delta < 0$. 只有当时滞取特定值(即 $\tau \in (\tau_3, \tau_1)$)时, 可以形成地方病.

注意到在推论3.2的(2)中, 还有一种情况我们没有讨论: 即 $\tau \in (\tau_2, \tau_3)$. 由定理3.1和推论3.1知道, 当 $\tau \in (\tau_2, \tau_3)$ 时, P_0 和 P_1 是不稳定的, 此时 P_2 是否存在, 以及 P_2 的稳定性如何? 对于这些问题的研究留作以后的工作.

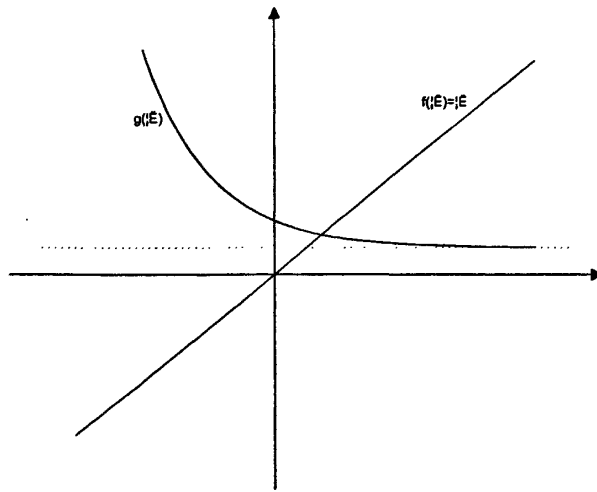


图 3.1 示意图

Fig.3.1 sketch map

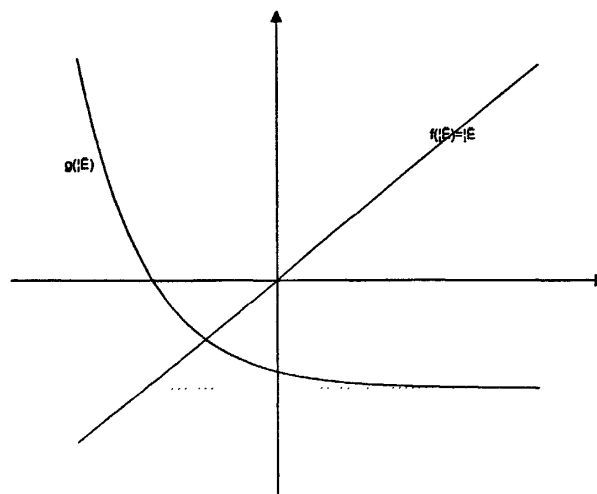


图 3.2 示意图

Fig.3.2 sketch map

3.2 具有阶段结构和脉冲的单种群SI流行病模型

根据世界粮农组织的报告,人类和害虫(例如蝗虫,蚜虫,棉铃虫,等等)之间的战争持续了数千年.随着社会和科学技术的进步,人类已经采用了很多先进的武器来对付害虫,例如化学杀虫剂,生物杀虫剂,遥感技术,原子能,等等.最终,人类取得了一些辉煌的成就^[45, 46, 78, 79].然而,人与害虫这间的斗争并没有结束,必将继续下去.人类用了大量的各种各样的杀虫剂来控制害虫,这是因为杀虫剂能够在短时间内迅速杀死相当比例的害虫,有时候为了避免经济损失只有使用杀虫剂.然而,杀虫剂已经被证明是人类和其他有益生物的污染物的主要来源之一.生物控制是,人们通过适当的使用活的有机物,把它作为生物控制的代理,来控制另外一种生物.这样的生物代理可以是被控制的生物体的捕食者,病原体或寄生虫,达到杀死有害生物或者干扰它的生物进程.有一些文献是关于利用微生物疾病来控制害虫的^[46, 78],然而利用微生物疾病来控制害虫的数学模型的研究还不多见^[64, 79, 80].使用细菌、真菌是害虫控制的一种重要的方法.例如,亚洲虎蚊可以传播能引起登革热的病菌.为了防治疾病的传播以及控制蚊虫,可以喷洒杀虫剂.我们使用昆虫病毒的一个好处是它们对人和别的有益昆虫是无害的,而本文的目的正是控制害虫.

阶段结构是生态学和人口学上的一个重要概念.文献^[68]讨论了具有阶段结构的单种群模型;文献^[71, 81, 82]讨论了具阶段结构的竞争和捕食系统.另外关于阶段结构的文献还有^[69, 70, 75-77, 83].在本节将考虑疾病在成年害虫中传播而幼年害虫不染病,由于幼年害虫受到了卵壳的保护.为了控制害虫,我们采取生物控制的策略,也就是,在田地里脉冲式的释放染病的害虫,则害虫将因为染病而死亡.染病的害虫可以在实验室里培养.

本节建立并分析了脉冲生物控制的模型.

3.2.1 模型的建立

基本的具有阶段结构的SI模型是

$$\begin{cases} S_1'(t) = rS_2(t) - \mu S_1(t) - \delta S_1(t), \\ S_2'(t) = \delta S_1(t) - \mu S_2(t) - S_2^2(t) - \beta S_2(t)I(t), \\ I'(t) = \beta S_2(t)I(t) - (\mu + \alpha)I(t). \end{cases} \quad (3.10)$$

这里 $S_2(t)$ 和 $I(t)$ 分别表示易感成年害虫和染病成年害虫的密度, $S_1(t)$ 表示幼年害虫的密度且它是不染病的.所有系数是正常数.模型的建立基于以下假设.

(H_1) 在时刻 $t > 0$ 出生的幼年种群的密度与当时存活的易感成年种群密度成正比,比例常数为 r ,染病的成年种群因病不会产生后代.

(H_2) 幼年种群的自然死亡率是 μ .成年易感种群的死亡率与现存成年易感种群的密度以及密度的平方成比例,比例常数为 μ 和1.染病的成年种群的自然死亡率为 μ 且有因病死亡率 α .

(H_3) 幼年种群按比例转化为易感成年种群, 比例常数为 δ .

(H_4) 易感成年种群转化为染病成年种群的转化率, 也就是, 疾病的传染率为双线性的 $\beta S_2(t)I(t)$.

在本节, 基于以下的假设(H_5), 我们建立以下模型, 参数的意义与模型(3.10)相同.

(H_5) 我们按周期 $\tau > 0$ 每次释放染病的成年种群数量为 $p > 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1'(t) = rS_2(t) - \mu S_1(t) - \delta S_1(t) \\ S_2'(t) = \delta S_1(t) - \mu S_2(t) - S_2^2(t) - \beta S_2(t)I(t) \\ I'(t) = \beta S_2(t)I(t) - (\mu + \alpha)I(t) \end{array} \right\} t \neq n\tau, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta S_1(t) = 0, \\ \Delta S_2(t) = 0, \\ \Delta I(t) = p, \end{array} \right\} t = n\tau, n = 1, 2, 3, \dots.$$

3.2.2 脉冲系统的分析

在这一节, 我们将研究脉冲释放染病虫害对原来模型(3.10)的影响. 为了证明本节的主要结论首先引入以下定义和引理.

定义 3.1 系统(3.11) 是持续生存的, 如果存在常数 $m, M > 0$ (不依赖于初始条件)和有限时刻 T_0 , 使得所有具有初始条件 $S_1(0^+) > 0, S_2(0^+) > 0, I(0^+) > 0$ 的解 $(S_1(t), S_2(t), I(t))$ 对所有的 $t \geq T_0$ 都满足: $m \leq S_1(t) + S_2(t) \leq M, m \leq I(t) \leq M$. 这里 T_0 可能依赖于初始条件 $(S_1(0^+), S_2(0^+), I(0^+))$.

引理 3.2 假设 $(S_1(t), S_2(t), I(t))$ 是系统(3.11)的一个具有初始条件 $S_1(0^+) \geq 0, S_2(0^+) \geq 0, I(0^+) \geq 0$ 的解, 则对所有的 $t \geq 0$ 满足 $S_1(t) \geq 0, S_2(t) \geq 0, I(t) \geq 0$. 进一步, 如果 $S_1(0^+) > 0, S_2(0^+) > 0, I(0^+) > 0$, 则有 $S_1(t) > 0, S_2(t) > 0, I(t) > 0$.

如果对所有 $t \geq t_0$ 有 $S_1(t) = S_2(t) = 0$, 则得到系统(3.11) 的子系统

$$\left\{ \begin{array}{l} I'(t) = -(\mu + \alpha)I(t), t \neq n\tau, n = 1, 2, \dots \\ I(n\tau^+) = I(n\tau) + p, t = n\tau, n = 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (3.12)$$

显然 $\tilde{I}(t) = \frac{pe^{-(\mu+\alpha)(t-n\tau)}}{1-e^{-\alpha\tau}}, t \in (n\tau, (n+1)\tau], n \in Z_+ = \{1, 2, 3, \dots\}, \tilde{I}(0^+) = \frac{p}{1-e^{-(\mu+\alpha)\tau}}$ 是系统(3.12)的一个周期解. 因此, 系统(3.11)的害虫绝灭周期解的完整表达式为 $(0, 0, \tilde{I}(t)) = (0, 0, \frac{pe^{-(\mu+\alpha)(t-n\tau)}}{1-e^{-(\mu+\alpha)\tau}}), t \in (n\tau, (n+1)\tau], n \in Z_+$. 由于系统(3.12) 的解为 $I(t) = (I(0^+) - \frac{p}{1-e^{-(\mu+\alpha)\tau}})e^{-(\mu+\alpha)t} + \tilde{I}(t), t \in (n\tau, (n+1)\tau], n \in Z_+$, 因此得到以下引理

引理 3.3 对系统(3.12) 的每个具有初始条件 $I(0^+) > 0$ 的解满足: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $I(t) \rightarrow \tilde{I}(t)$.

引理 3.4 存在一常数 $M > 0$ 使得对系统(3.11)的每个解 $(S_1(t), S_2(t), I(t))$, 满足: 当 t 充分大时(这里 t 依赖于初始条件), $S_1(t) \leq M, S_2(t) \leq M, I(t) \leq M$.

证明: 由于 $S_1(t), S_2(t), I(t)$ 的非负性, 可以选取 $U(t) = S_1(t) + S_2(t) + I(t)$ 作为 Liapunov 函数.

当 $t \neq n\tau$ 时, 有

$$\begin{aligned} D^+U(t) + \mu U(t) &= rS_2(t) - S_2^2(t) - \alpha I(t) \\ &\leq rS_2(t) - S_2^2(t) \leq \frac{r^2}{4}. \end{aligned}$$

当 $t = n\tau$ 时, 得到 $U(n\tau^+) = U(n\tau) + p$.

由定理 2.6, 对 $t \in (n\tau, (n+1)\tau]$ 我们有

$$U(t) \leq (U(0^+) - \frac{r^2}{4\mu})e^{-\mu t} + \frac{p(1 - e^{-n\mu\tau})}{1 - e^{-\mu\tau}}e^{-\mu(t-n\tau)} + \frac{r^2}{4\mu}.$$

因此 $U(t)$ 是一致最终有界的, 并且存在常数 $M > 0$ 使得当 t 充分大时对系统(3.11)的每个解 $(S_1(t), S_2(t), I(t))$ 都满足 $S_1(t) \leq M, S_2(t) \leq M, I(t) \leq M$. $\square$

接下来, 研究系统(3.11) 的害虫绝灭周期解的稳定性.

定理 3.3 设 $(S_1(t), S_2(t), I(t))$ 是系统(3.11) 的具有初始条件 $S_1(0^+) > 0, S_2(0^+) > 0, I(0^+) > 0$ 的任意解, 只要 $p > \frac{r\alpha b}{\beta}$, 则 $(0, 0, \tilde{I}(t))$ 是局部渐进稳定的, 这里 $a = \mu + \alpha > 0, b = \frac{\delta r - \mu(\mu + \delta)}{\mu + \delta} > 0$.

证明: 害虫绝灭周期解的局部稳定性可以由微小扰动后线性系统的稳定性决定. 定义 $x(t) = S_1(t), y(t) = S_2(t), z(t) = I(t) - \tilde{I}(t)$, 则系统(3.11) 的线性化系统为

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = ry(t) - (\mu + \delta)x(t), \\ y'(t) = \delta x(t) - \mu y(t) - \beta \tilde{I}(t)y(t), \\ z'(t) = \beta \tilde{I}(t)y(t) - (\mu + \alpha)z(t) \end{array} \right\} t \neq n\tau, n = 1, 2, \dots, \quad (3.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(n\tau^+) = x(n\tau), \\ y(n\tau^+) = y(n\tau), \\ z(n\tau^+) = z(n\tau), \end{array} \right\} t = n\tau, n = 1, 2, \dots.$$

令 $\Phi(t)$ 为系统(3.13) 的基础解矩阵, 则 $\Phi(t)$ 满足

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -(\mu + \delta) & r & 0 \\ \delta & -\mu - \beta \tilde{I}(t) & 0 \\ 0 & \beta \tilde{I}(t) & -(\mu + \alpha) \end{pmatrix} \Phi(t) \doteq A\Phi(t)$$

并且 $\Phi(0) = I$, 单位矩阵. 我们容易看出矩阵 A 的一个特征根为 $-(\mu + \alpha)$, 另外两个特征根由 2×2 矩阵 B 决定, 这里

$$B = \begin{pmatrix} -(\mu + \delta) & r \\ \delta & -\mu - \beta \tilde{I}(t) \end{pmatrix}$$

记矩阵 B 的特征根为 λ_1, λ_2 , 则有 $\lambda_1 + \lambda_2 = -(\mu + \delta) - \mu - \beta \tilde{I}(t) < 0$, $\lambda_1 \lambda_2 = (\mu + \delta)(\mu + \beta \tilde{I}(t)) - r\delta = (\mu + \delta)[\mu - \frac{r\delta}{\mu + \delta} + \beta \tilde{I}(t)]$. 因此, 由 Floquet 定理知道: 当 $\int_0^\tau (\mu + \beta \tilde{I}(t) - \frac{r\delta}{\mu + \delta}) dt > 0$ 时, 也就是, 当

$$[r\delta - \mu(\mu + \delta)]\tau < \frac{\beta p(\mu + \delta)}{\mu + \alpha}$$

时, $(0, 0, \tilde{I}(t))$ 是局部渐进稳定的.

当 $R_0 = \frac{r\delta}{\mu(\mu + \delta)} \leq 1$ 时, 上面的不等式对所有的 $p > 0$ 都成立; 当 $R_0 = \frac{r\delta}{\mu(\mu + \delta)} > 1$ 时, 上面的不等式等价于 $p > \frac{r\alpha b}{\beta}$. $\square$

定理 3.4 如果 $R_0 \leq 1$, 或者 $R_0 > 1$ 且 $p > (e^{a\tau} - 1)\frac{b}{\beta}$, 则系统(3.11)的周期解 $(0, 0, \tilde{I}(t))$ 是全局渐进稳定的.

证明: 令 $f(x) = e^x - 1 - x$. 因为

$$f'(x) = e^x - 1 > 0, \quad x > 0,$$

因此, 得到

$$\begin{aligned} e^{a\tau} - 1 &> a\tau, \\ p &> (e^{a\tau} - 1)\frac{b}{\beta} > a\tau\frac{b}{\beta}. \end{aligned}$$

由定理3.3 得到 $(0, 0, \tilde{I}(t))$ 是局部渐进稳定的. 接下来证明 $(0, 0, \tilde{I}(t))$ 的吸引性.

令 $V(t) = \delta S_1(t) + (\mu + \delta)S_2(t)$. 则

$$V'(t)|_{(??)} = [r\delta - \mu(\mu + \delta) - (\mu + \delta)S_2(t) - \beta(\mu + \delta)I(t)]S_2(t).$$

当 $R_0 \leq 1$ 时, 显然有

$$V'(t)|_{(3.11)} \leq -\beta(\mu + \delta)I(t)S_2(t) < 0, \quad t \geq 0,$$

所以, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 有 $V(t) \rightarrow 0, S_1(t) \rightarrow 0, S_2(t) \rightarrow 0$, 从而得到 $(0, 0, \tilde{I}(t))$ 全局吸引的.

当 $R_0 > 1$ 且 $p > (e^{a\tau} - 1)\frac{b}{\beta}$ 时, 我们可以选取充分小的 $\epsilon > 0$ 使得 $p > (e^{a\tau} - 1)\frac{b+2\epsilon}{\beta}$.

从系统(3.11), 我们得到

$$\begin{cases} I'(t) = \beta S_2(t)I(t) - aI(t) \geq -aI(t), & t \neq n\tau, n = 1, 2, \dots, \\ I(n\tau^+) = I(n\tau) + p, & t = n\tau, n = 1, 2, \dots. \end{cases}$$

由定理2.6 和引理3.3, 得到: 存在一个时刻 $t_1 > 0$, 使得对所有的 $t \geq t_1$, 都有

$$I(t) \geq \frac{pe^{-a\tau}}{1 - e^{-a\tau}} - \frac{\epsilon}{\beta}.$$

因此, 当 $t \geq t_1$ 时, 得到

$$\begin{aligned} V'(t)|_{(3.11)} &= (\mu + \delta)[b - S_2(t) - \beta I(t)]S_2(t) \\ &\leq -(\mu + \delta)(S_2(t) + \epsilon)S_2(t) < 0. \end{aligned}$$

所以 $V(t) \rightarrow 0, S_1(t) \rightarrow 0, S_2(t) \rightarrow 0$, 从而 $(0, 0, \tilde{I}(t))$ 是全局吸引的. $\square$

定理 3.5 当 $R_0 > 1$ 且 $0 < p < \frac{b(1-e^{-a\tau})}{\beta}$ 时, 系统(3.11) 是持续生存的.

证明: 设 $(S_1(t), S_2(t), I(t))$ 是系统(3.11) 具有初始条件 $S_1(0^+) > 0, S_2(0^+) > 0, I(0^+) > 0$ 的任意解. 由引理3.2 和引理3.4, 可以假设对所有的 $t \geq 0$, 都有 $S_1(t) \leq M, S_2(t) \leq M, I(t) \leq M$, 并且 $M > \frac{b}{1+\beta}$. 令 $m = \frac{pe^{-(\mu+a)\tau}}{1-e^{-(\mu+a)\tau}} - \epsilon_3 > 0, \epsilon_3 > 0$. 从引理3.3, 容易得到: 对充分大的 t 有 $I(t) \geq m$. 接下来将寻找一个 $m_1 > 0$, 使得当 t 充分大时满足 $S_1(t) + S_2(t) \geq m_1$. 分两个步骤来完成.

步骤1

由于 $R_0 > 1$ 且 $0 < p < \frac{b(1-e^{-a\tau})}{\beta}$, 可以选取充分小的 $m_2 > 0, \epsilon_1 > 0$ 使得

$$0 < p < \frac{(b - m_2 - \epsilon_1)(1 - e^{-(a-\beta m_2)\tau})}{\beta}.$$

记

$$\begin{aligned} \rho &= b - m_2 - \epsilon_1 - \frac{p\beta}{1 - e^{-(a-\beta m_2)\tau}} > 0, \\ \sigma &= b - M(1 + \beta) < 0. \end{aligned}$$

考虑Liapunov 泛函

$$V(t) = \delta S_1(t) + (\mu + \delta)S_2(t).$$

我们推断 $V(t) < (\mu + \delta)m_2 = m_3$ 不能对所有的 $t \geq 0$ 都成立. 否则, 对所有的 $t \geq 0$ 都有 $S_2(t) < m_2$. 那么, 从系统(3.11)的第3个和第6个方程, 得到

$$\begin{cases} I'(t) \leq (\beta m_2 - a)I(t), & t \neq n\tau, n = 1, 2, \dots, \\ I(n\tau^+) = I(n\tau) + p, & t = n\tau, n = 1, 2, \dots. \end{cases}$$

由引理3.3, 我们知道存在一个 $t_1 > 0$, 使得对所有的 $t \geq t_1$ 都有 $I(t) \leq \bar{u}(t) + \frac{\epsilon_1}{\beta}$, 这里 $\bar{u}(t) = \frac{pe^{-(a-\beta m_2)(t-n\tau)}}{1-e^{-(a-\beta m_2)\tau}}, t \in (n\tau, (n+1)\tau], n \in \mathbb{Z}_+$. 因此对所有的 $t \geq t_1$, 都有 $I(t) \leq \frac{p}{1-e^{-(a-\beta m_2)\tau}} + \frac{\epsilon_1}{\beta}$, 并且

$$\begin{aligned} V'(t)|_{(3.11)} &= (\mu + \delta)[b - S_2(t) - \beta I(t)]S_2(t) \\ &\geq (\mu + \delta)[b - m_2 - \epsilon_1 - \frac{p\beta}{1-e^{-(a-\beta m_2)\tau}}]S_2(t) \\ &= \rho(\mu + \delta)S_2(t) > 0 \end{aligned}$$

对所有的 $t > t_1$. 因此,

$$V'(t)|_{(3.11)} \geq \rho(\mu + \delta)S_2(t_1) = \epsilon_2 > 0,$$

并且

$$V(t) \rightarrow +\infty, \quad S_2(t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty.$$

得到一个矛盾, 因为由引理3.4 知道 $V(t)$ 是最终有界的. 所以, 存在一个 $t_1 > 0$, 使得 $V(t_1) \geq m_3$.

步骤2

如果 $V(t) \geq m_3$ 对所有的 $t \geq t_1$ 成立, 则可以选取 $m_1 = m_2$, 这样就达到了目的. 现在考虑系统的离开并且再次进入区域 $D = \{(S_1, S_2, I) \in R_+^3 : V(t) = \delta S_1(t) + (\mu + \delta)S_2(t) < m_3\}$ 的解. 令 $t^* = \inf_{t \geq t_1} \{V(t) < m_3\}$. 则对 $t \in [t_1, t^*)$, 满足 $V(t) \geq m_3$ 并且 $V(t^*) = m_3$. 假设 $t^* \in [n_1\tau, (n_1+1)\tau]$, $n_1 \in \mathbb{N}$. 选取 n_2, n_3 使得

$$n_2\tau > T_2 = -\frac{1}{a - \beta m_2} \ln \frac{\epsilon_1}{M + p},$$

$$n_3\tau > T_3 = \frac{m_3}{\rho_1},$$

$$\rho_1 = \rho(\mu + \delta)S_2((n_1 + 1 + n_2)\tau^+),$$

令 $T = (n_2 + n_3)\tau$. 可以推断一定存在 $t_2 \in [(n_1 + 1)\tau, (n_1 + 1)\tau + T]$, 使得 $V(t_2) \geq m_3$. 否则, 对所有的 $t \in [(n_1 + 1)\tau, (n_1 + 1)\tau + T]$ 都有 $V(t) < m_3$ 和 $S_2(t) < m_2$.

考虑

$$\begin{cases} u'(t) = (\beta m_2 - a)u(t), & t \neq n\tau, n = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, \\ u(n\tau^+) = u(n\tau) + p, & t = n\tau, n = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, \\ u((n_1 + 1)\tau^+) = I((n_1 + 1)\tau^+). \end{cases}$$

由引理3.3 得到

$$u(t) = (u((n_1 + 1)\tau^+) - \frac{p}{1 - e^{-(a-\beta m_2)\tau}})e^{-(a-\beta m_2)(t-(n_1+1)\tau)} + \bar{u}(t),$$

$t \in (n\tau, (n+1)\tau], n_1 + 1 \leq n \leq n_1 + 1 + n_2 + n_3$. 从而

$$|u(t) - \bar{u}(t)| \leq (M + p)e^{-(a-\beta m_2)n_2\tau} < \epsilon_1$$

由比较原理, 得到

$$I(t) \leq u(t) \leq \bar{u}(t) + \frac{\epsilon_1}{\beta} \leq \frac{p}{1 - e^{-(a-\beta m_2)\tau}} + \frac{\epsilon_1}{\beta},$$

$(n_1 + 1 + n_2)\tau \leq t \leq (n_1 + 1)\tau + T$, 这就意味着

$$V'(t)|_{(3.11)} \geq \rho(\mu + \delta)S_2((n_1 + 1 + n_2)\tau^+) = \rho_1 > 0,$$

$$V((n_1 + 1)\tau + T) \geq V((n_1 + 1 + n_2)\tau^+) + \rho_1 n_3 \tau.$$

当 $t \in [t^*, (n_1 + 1 + n_2)\tau]$, 得到

$$\begin{aligned} V'(t)|_{(3.11)} &= [r\delta - \mu(\mu + \delta) - (\mu + \delta)S_2(t) - \beta(\mu + \delta)I(t)]S_2(t) \\ &\geq (\mu + \delta)[b - M - \beta M]S_2(t) \\ &= (\mu + \delta)\sigma S_2(t) \\ &\geq \sigma V(t). \end{aligned}$$

因此,

$$V((n_1 + 1 + n_2)\tau) \geq V(t^*)e^{\sigma(n_2+1)\tau} > 0,$$

$$V((n_1 + 1)\tau + T) \geq V((n_1 + 1 + n_2)\tau) + \rho_1 n_3 \tau > m_3,$$

这是一个矛盾. 令 $\bar{t} = \inf_{t \geq t^*} \{V(t) \geq m_3\}$. 则 $V(\bar{t}) \geq m_3$. 对于 $t \in [t^*, \bar{t}]$, 有

$$V(t) \geq V(t^*)e^{\sigma(t-t^*)} \geq m_3 e^{\sigma(1+n_1+n_2+n_3)} \doteq m_4.$$

对于 $t > \bar{t}$, 由于 $V(\bar{t}) \geq m_3$, 类似的讨论可以继续. 选取 $m_1 = \frac{m_4}{\mu+\delta}$, 则对所有的 $t \geq t_1$ 都有 $S_1(t) + S_2(t) \geq m_1$. $\square$

注 3.1 从定理3.4 容易看出: 当系统(3.11)的系数满足条件 $R_0 > 1$ 时, 如果没有释放染病虫害来控制害虫, 或者释放染病虫害的数量小于 $(1 - e^{-a\tau})\frac{b}{\beta}$, 则系统(3.11)是持续生存的, 从而害虫不能绝灭. 在此情况下, 可以增加染病虫害的释放量使得 $p > (e^{a\tau} - 1)\frac{b}{\beta}$, 则由定理3.5, 我们知道害虫可以绝灭.

3.2.3 讨论

在本节, 建立并研究了一个具有阶段结构的 SI 生态流行病模型. 在此模型中, 采取了脉冲式生物控制. 分析了系统的害虫绝灭周期解的存在性和稳定性. 我们也得到了系

统持续生存的充分条件. 在现实世界中, 可以采取脉冲式的生物控制策略来控制害虫密度. 还有问题有待解决: 如果 $R_0 > 1$ 和 $0 < p < \frac{b(1-e^{-a\tau})}{\beta}$, 则系统(3.11)是持续生存的; 如果 $R_0 > 1$ 且 $p > (e^{a\tau} - 1)\frac{b}{\beta}$, 则系统(3.11)的周期解 $(0, 0, \tilde{I}(t))$ 是全局渐进稳定的. 但是没有考虑当 $R_0 > 1$ 和 $\frac{b(1-e^{-a\tau})}{\beta} < p < (e^{a\tau} - 1)\frac{b}{\beta}$ 时的情况, 此时系统的动力学行为如何? 本节目的是控制害虫, 因此没有讨论这些问题. 但是从数学的角度来看这是有价值的问题, 留待以后讨论.

4 食饵具有阶段结构的捕食系统研究

正如在前一章所指出, 阶段结构是生态学上的一个重要概念. 在自然界中, 有许多生物个体在生命过程中经历了两个阶段, 幼年与成年. 在第三章, 讨论了两个具有阶段结构的单种群模型. 事实上, 种群不是独立存在的, 多个种群总是在相互作用. 所以, 在本章将继续研究具有阶段结构的两种群模型.

4.1 食饵具有阶段结构的Lotka-Volterra捕食模型研究

最近, 相互作用的具有阶段结构的种群模型研究受到了很多重视. 在文^[80, 81]中研究了具有阶段结构的捕食模型. 在文^[77, 82]中, 研究了具阶段结构的竞争模型. 在文^[71-74]中研究了具有阶段结构的流行病模型. 本节将建立并研究食饵具有阶段结构的Lotka-Volterra捕食模型.

4.1.1 模型的建立

最基本的具有阶段结构的Lotka-Volterra 捕食模型为

$$\begin{cases} x_1'(t) = rx_2(t) - \mu x_1(t) - \delta x_1(t), \\ x_2'(t) = \delta x_1(t) - \beta x_2^2(t) - ax_2(t)y(t), \\ y'(t) = kax_2(t)y(t) - dy(t), \end{cases} \quad (4.1)$$

这里 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 分别表示成年食饵(成年害虫)和幼年食饵(幼年害虫)的种群密度, $y(t)$ 表示捕食者(天敌)的种群密度. 所有的系数都是正常数. 该模型的建立是基于以下生物意义假设

(H_1) 在任意时刻 $t \geq 0$, 新出生的幼年食饵密度与当时存活的成年食饵的密度成比例, 比例常数为 r .

(H_2) 幼年食饵的自然死亡率为 μ , 捕食者的自然死亡率为 d . 成年食饵的死亡率具有Logistic 特征, 也就是, 与种群密度的平方成比例, 比例常数为 β .

(H_3) 幼年食饵按比例转化为成年食饵, 比例常数为 δ .

(H_4) 只有成年食饵被捕食者捕获, 因为幼年食饵被它们的卵壳所保护. 这里 a 是捕食者的单位捕食率, $0 < k < 1$ 是捕食的转化率.

本节建立以下两个模型, 参数的意义与上面的模型(4.1)的参数意义相同, 同时假设

(H_5) 在模型(4.2)中, 按常数比例 $p > 0$ 投放捕食者(天敌); 在模型(4.3)中, 按周期 τ 常数数量 $p > 0$ 投放捕食者(天敌).

$$\begin{cases} x_1'(t) = rx_2(t) - \mu x_1(t) - \delta x_1(t), \\ x_2'(t) = \delta x_1(t) - \beta x_2^2(t) - ax_2(t)y(t), \\ y'(t) = kax_2(t)y(t) - dy(t) + p. \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x_1'(t) = rx_2(t) - \mu x_1(t) - \delta x_1(t), \\ x_2'(t) = \delta x_1(t) - \beta x_2^2(t) - ax_2(t)y(t), \\ y'(t) = kax_2(t)y(t) - dy(t), \end{cases} & t \neq n\tau, n = 1, 2, 3, \dots, \\ \begin{cases} \Delta x_1(t) = 0, \\ \Delta x_2(t) = 0, \\ \Delta y(t) = p, \end{cases} & t = n\tau, n = 1, 2, 3, \dots. \end{cases} \quad (4.3)$$

4.1.2 常微分系统(4.2)的分析

记

$$p_0 = \frac{\delta r d}{a(\mu + \delta)}.$$

经简单计算得,

引理 4.1 (1) 系统(4.2) 总是存在平凡平衡点(害虫绝灭平衡点) $E_0 = (x_1^0, x_2^0, y^0) = (0, 0, \frac{p}{d})$.

(2) 如果 $p < p_0$, 那么系统(4.2) 有唯一的正平衡点(天敌-害虫共存平衡点) $E_1 = (x_1^*, x_2^*, y^*)$, 这里 $x_1^* = \frac{r}{\mu + \delta} x_2^*$, $x_2^* = \frac{\frac{\delta r}{\mu + \delta} - ay^*}{\beta}$, $y^* = \frac{(\frac{k a \delta r}{\mu + \delta} - d\beta) + \sqrt{(\frac{k a \delta r}{\mu + \delta} - d\beta)^2 + 4ka^2 p\beta}}{2ka^2}$.

定理 4.1 如果 $p > p_0$, 则系统(4.2)的平凡平衡点 E_0 是局部渐进稳定的. 如果 $p < p_0$, 则 E_0 不稳定, 并且正平衡点 E_1 是局部渐进稳定的.

证明: 在平衡点 E_0 处的特征方程为

$$(\lambda + d)[\lambda^2 + (\mu + \delta + ay^0)\lambda + a(\mu + \delta)y^0 - \delta r] = 0. \quad (4.4)$$

如果 $p > p_0$ 成立, 则特征方程(4.4)的所有特征根都具有负实部. 因此, E_0 是局部渐进稳定的.

如果 $p < p_0$ 成立, 则特征方程(4.4)有一个特征根具有正实部. 因此, E_0 不稳定.

由引理4.1, 知道当 $p < p_0$ 时, 正平衡点存在 E_1 . 并且在平衡点 E_1 处的特征方程为

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \quad (4.5)$$

这里

$$a_1 = (\mu + \delta) + \left(\frac{\delta r}{\mu + \delta} + \beta x_2^*\right) + \frac{p}{y^*} > 0,$$

$$a_2 = (\mu + \delta)(\beta x_2^* + \frac{p}{y^*}) + (\frac{\delta r}{\mu + \delta} + \beta x_2^*)\frac{p}{y^*} + ka^2 x_2^* y^* > 0,$$

$$a_3 = (\mu + \delta)[\beta x_2^* \frac{p}{y^*} + ka^2 x_2^* y^*] > 0,$$

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - a_3 &= (\frac{\delta r}{\mu + \delta} + \beta x_2^* + \frac{p}{y^*})[(\mu + \delta)(\beta x_2^* + \frac{p}{y^*}) + \frac{\delta r}{\mu + \delta} \frac{p}{y^*}] \\ &\quad + (\frac{\delta r}{\mu + \delta} + \beta x_2^* + \frac{p}{y^*})[\beta x_2^* \frac{p}{y^*} + ka^2 x_2^* y^*] \\ &\quad + (\mu + \delta)[(\mu + \delta)(\beta x_2^* + \frac{p}{y^*}) + \frac{\delta r}{\mu + \delta} \frac{p}{y^*}] \\ &> 0. \end{aligned}$$

由Hurwitz 判据, 知道特征方程(4.5)的三个特征根都具有负实部. 因此, E_1 只要存在就是局部渐进稳定的. $\square$

定理 4.2 如果 $p \geq p_0$, 则系统(4.2)的平凡平衡点 E_0 是全局渐进稳定的.

证明: 取以下Liapunov 泛函

$$V(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3(y(t) - y^0 - y^0 \ln \frac{y(t)}{y^0}),$$

其中 c_i 是待定常数($i = 1, 2, 3$), 那么

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt}|_{(4.2)} &= c_1[r x_2(t) - (\mu + \delta)x_1(t)] \\ &\quad + c_2[\delta x_1(t) - \beta x_2^2(t) - a x_2(t)y(t)] \\ &\quad + c_3(1 - \frac{y^0}{y(t)})[ka x_2(t)y(t) - dy(t) + p] \\ &= -\frac{c_3 d}{y(t)}(y(t) - y^0)^2 + c_1 r x_2(t) - [c_1(\mu + \delta) - c_2 \delta]x_1(t) \\ &\quad - a x_2(t)y(t)(c_2 - c_3 k(1 - \frac{y^0}{y(t)})) - c_2 \beta x_2^2(t). \end{aligned}$$

如果我们取 $c_2 = k c_3 = \mu + \delta$, $c_1(\mu + \delta) = c_2 \delta$, 那么

$$\frac{dV(t)}{dt}|_{(4.2)} = -\frac{c_3 d}{y(t)}(y(t) - y^0)^2 - c_2 \beta x_2^2(t) + (\delta r - \frac{ap(\mu + \delta)}{d})x_2(t).$$

如果 $p \geq p_0$, 则容易得到 $\frac{dV(t)}{dt}|_{(4.2)} < 0$. 因此 E_0 全局渐进稳定. $\square$

注 4.1 从定理4.1, 得到当系数满足条件 $p < p_0$ 时, 则食饵(害虫) 持续生存并且危害农作物. 为此, 按常数速率 $p \geq p_0$ 释放捕食者(天敌). 由定理4.2 的结论, 知道食饵(害虫)可以得到控制.

4.1.3 脉冲系统(4.3)的分析

引理 4.2 假设 $(x_1(t), x_2(t), y(t))$ 是系统(4.3) 具有初值 $x_1(0^+) \geq 0$, $x_2(0^+) \geq 0$, $y(0^+) \geq 0$ 的一个解, 则对于任意的 $t \geq 0$, 满足 $x_1(t) \geq 0$, $x_2(t) \geq 0$, $y(t) \geq 0$. 进一步, 如果 $x_1(0^+) > 0$, $x_2(0^+) > 0$, $y(0^+) > 0$, 则 $x_1(t) > 0$, $x_2(t) > 0$, $y(t) > 0$.

若是对于所有的 $t \geq 0$ 有 $x_1(t) = x_2(t) = 0$, 那么可以得到系统(4.3) 的子系统如下

$$\begin{cases} y'(t) = -dy(t), & t \neq n\tau, n = 1, 2, \dots, \\ y(n\tau^+) = y(n\tau) + p, & t = n\tau, n = 1, 2, \dots. \end{cases} \quad (4.6)$$

显然, $\tilde{y}(t) = \frac{pe^{-d(t-n\tau)}}{1-e^{-d\tau}}$, $t \in (n\tau, (n+1)\tau]$, $n \in Z_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\tilde{y}(0^+) = \frac{p}{1-e^{-d\tau}}$ 是系统(4.6) 的一个周期解. 系统(4.6) 的解为 $y(t) = (y(0^+) - \frac{p}{1-e^{-d\tau}})e^{-dt} + \tilde{y}(t)$, $t \in (n\tau, (n+1)\tau]$, $n \in Z_+$. 因此, 系统(4.3)的害虫绝灭周期解的表达式为 $(0, 0, \tilde{y}(t)) = (0, 0, \frac{pe^{-d(t-n\tau)}}{1-e^{-d\tau}})$, $t \in (n\tau, (n+1)\tau]$, $n \in Z_+$. 并且得到以下引理

引理 4.3 对于系统(4.6)具有初值 $y(0^+) > 0$ 的任意解, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 都有 $y(t) \rightarrow \tilde{y}(t)$.

引理 4.4 存在一个常数 $M > 0$, 使得对于系统(4.3)的每一个正解 $(x_1(t), x_2(t), y(t))$, 当 t 充分大时都满足 $x_1(t) \leq M, x_2(t) \leq M, y(t) \leq M$.

证明: 由于 $x_1(t), x_2(t), y(t)$ 是正的, 定义

$$U(t) = x_1(t) + x_2(t) + y(t).$$

当 $t \neq n\tau$ 时, 有

$$\begin{aligned} D^+U(t) + \lambda U(t) &= (r + \lambda)x_2(t) - (\mu - \lambda)x_1(t) \\ &\quad - (d - \lambda)y(t) - \beta x_2^2(t) - a(1 - k)x_2(t)y(t) \\ &\leq M_0, \end{aligned}$$

其中 $\lambda = \min\{\mu, d\}$, $M_0 = \frac{(r+\lambda)^2}{4\beta}$.

当 $t = n\tau$ 时, 有 $U(n\tau^+) = U(n\tau) + p$.

由定理2.6, 当 $t \in (n\tau, (n+1)\tau]$ 时, 有

$$U(t) \leq (U(0^+) - \frac{M_0}{\lambda})e^{-\lambda t} + \frac{p(1 - e^{-n\lambda\tau})}{1 - e^{-\lambda\tau}}e^{-\lambda(t-n\tau)} + \frac{M_0}{\lambda}.$$

因此, $U(t)$ 是一致最终有下界的并且存在常数 $M > 0$ 使得对于系统(4.3) 的任意解 $(x_1(t), x_2(t), y(t))$ 当 t 充分大时满足: $x_1(t) \leq M, x_2(t) \leq M, y(t) \leq M$. $\square$

接下来研究系统(4.3)的害虫绝灭周期解的稳定性. 记

$$p_1 = \frac{\delta r d \tau}{a(\mu + \delta)}.$$

定理 4.3 如果 $p > p_1$, 那么系统(4.3) 的害虫绝灭周期解 $(0, 0, \tilde{y}(t))$ 是局部渐进稳定的.

证明: 害虫绝灭周期解的局部渐进稳定性可以由对解进行微小扰动后的动力学行为决定. 令 $u(t) = x_1(t)$, $v(t) = x_2(t)$, $w(t) = y(t) - \tilde{y}(t)$, 则线性化系统(4.3)得到

$$\left\{ \begin{array}{l} u'(t) = rv(t) - (\mu + \delta)u(t), \\ v'(t) = \delta u(t) - a\tilde{y}(t)v(t), \\ w'(t) = ka\tilde{y}(t)v(t) - dw(t) \end{array} \right\} \quad t \neq n\tau, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(n\tau^+) = u(n\tau), \\ v(n\tau^+) = v(n\tau), \\ w(n\tau^+) = w(n\tau), \end{array} \right\} \quad t = n\tau, n = 1, 2, 3, \dots.$$

令 $\Phi(t)$ 为系统(4.7)的基础解矩阵, 那么 $\Phi(t)$ 一定满足

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -(\mu + \delta) & r & 0 \\ \delta & -a\tilde{y}(t) & 0 \\ 0 & -ka\tilde{y}(t) & -d \end{pmatrix} \Phi(t) = A\Phi(t)$$

并且 $\Phi(0) = I$, 单位矩阵. 不难看出矩阵 A 的一个特征根是 $-d$, 而另外两个特征根由 2×2 矩阵 B 决定, 这里

$$B = \begin{pmatrix} -(\mu + \delta) & r \\ \delta & -a\tilde{y}(t) \end{pmatrix}$$

记矩阵 B 的特征根为 λ_1, λ_2 , 那么 $\lambda_1 + \lambda_2 = -(\mu + \delta) - a\tilde{y}(t) < 0$, $\lambda_1\lambda_2 = a(\mu + \delta)\tilde{y}(t) - r\delta$.

当 $p > p_1$ 时, 有 $\lambda_1\lambda_2 > 0$. 从而, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. 因此, 根据 Floquet 定理, $(0, 0, \tilde{y}(t))$ 是局部渐进稳定的. $\square$

接下来将要证明害虫绝灭周期解的全局渐进稳定性. 记

$$p_2 = \frac{\delta r(e^{d\tau} - 1)}{a(\mu + \delta)}.$$

定理 4.4 如果 $p > p_2$, 那么系统(4.3) 的害虫绝灭周期解 $(0, 0, \tilde{y}(t))$ 是全局渐进稳定的.

证明: 令

$$f(x) = e^x - 1 - x.$$

由于

$$f'(x) = e^x - 1 > 0, \quad x > 0,$$

于是

$$e^{d\tau} - 1 > d\tau.$$

$$\frac{\delta r(e^{d\tau} - 1)}{a(\mu + \delta)} > \frac{\delta r d\tau}{a(\mu + \delta)}, \quad \text{也就是, } p_2 > p_1.$$

由定理4.3, 知道如果 $p > p_2$, 那么害虫绝灭周期解 $(0, 0, \tilde{y}(t))$ 是局部渐进稳定的. 接下来将证明它的全局吸性.

令

$$V(t) = \delta x_1(t) + (\mu + \delta)x_2(t).$$

则得到

$$V'(t)|_{(4.3)} = [r\delta - \beta(\mu + \delta)x_2(t) - a(\mu + \delta)y(t)]x_2(t).$$

当 $p > p_2$ 时, 可以选取充分小的 $\epsilon > 0$, 使得 $\sigma_1 = \delta r + \epsilon - \frac{ap(\mu + \delta)}{e^{d\tau} - 1} < 0$.

从系统(4.3) 的第3个和第6个方程, 得到

$$\begin{cases} y'(t) = kax_2(t)y(t) - dy(t) \geq -dy(t), & t \neq n\tau, n = 1, 2, 3, \dots, \\ y(n\tau^+) = y(n\tau) + p, & t = n\tau, n = 1, 2, 3, \dots. \end{cases} \quad (4.8)$$

由定理2.9 和引理4.3, 我们知道对于所有的 $t \geq t_1$, 存在 $t_1 > 0$, 使得

$$y(t) \geq \tilde{y}(t) - \frac{\epsilon}{a(\mu + \delta)} \geq \frac{pe^{-d\tau}}{1 - e^{-d\tau}} - \frac{\epsilon}{a(\mu + \delta)} > 0.$$

因此, 当 $t \geq t_1$ 时, 得到

$$\begin{aligned} V'(t)|_{(4.3)} &\leq [(\delta r + \epsilon) - \frac{ap(\mu + \delta)}{e^{d\tau} - 1}]x_2(t) \\ &= \sigma_1 x_2(t) < 0. \end{aligned}$$

所以, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $V(t) \rightarrow 0$, $x_1(t) \rightarrow 0$, $x_2(t) \rightarrow 0$. 注意到系统(4.3) 的极限系统恰好就是系统(4.8), 结合引理4.3, 知道害虫绝灭周期解 $(0, 0, \tilde{y}(t))$ 是全局吸引的. $\square$

在以上的两个定理中讨论了害虫绝灭的条件. 而系统的持久性意味着害虫可以持续生存. 因此, 接下来有必要探讨系统(4.3)的持久性. 记

$$p_3 = \frac{\delta r(1 - e^{-d\tau})}{a(\mu + \delta)}.$$

定理 4.5 如果 $p < p_3$, 则系统(4.3) 是持久的.

证明: 假设 $(x_1(t), x_2(t), y(t))$ 是系统(4.3) 具有初值 $x_1(0^+) > 0$, $x_2(0^+) > 0$, $y(0^+) > 0$ 的任意解. 根据引理4.2 和引理4.4, 可以假设: 对所有的 $t \geq 0$, 都有 $0 < x_1(t) \leq M$, $0 < x_2(t) \leq M$, $0 < y(t) \leq M$, 并且 $M > \frac{\delta r}{(a + \beta)(\mu + \delta)}$. 令 $m_4 = \frac{pe^{-d\tau}}{1 - e^{-d\tau}} - \epsilon_2 > 0$, $\epsilon_2 > 0$. 根据定理2.9 和引理4.3, 当 t 充分大时, 显然有 $y(t) \geq m_4$. 接下来要寻找 $m > 0$, 使得当 t 充分大时, $x_1(t) + x_2(t) \geq m$. 分两部分来完成.

步骤1

由于 $p < p_3$, 可以选取 $m_2 > 0, \epsilon_1 > 0$ 充分小, 使得

$$p < \frac{(\delta r - \epsilon_1 - \beta(\mu + \delta)m_2)(1 - e^{-(d - kam_2)\tau})}{a(\mu + \delta)}.$$

记

$$\rho = \delta r - \epsilon_1 - \beta(\mu + \delta)m_2 - \frac{a(\delta + \mu)p}{1 - e^{-(d - kam_2)\tau}} > 0,$$

$$\sigma_2 = \frac{\delta r}{\mu + \delta} - (a + \beta)M < 0.$$

现在考虑如下Liapunov 泛函

$$V(t) = \delta x_1(t) + (\mu + \delta)x_2(t).$$

可以推断 $V(t) < (\mu + \delta)m_2 = m_3$ 不能对所有的 $t \geq 0$ 都成立. 否则, 得到对所有的 $t \geq 0$, 都有 $x_2(t) < m_2$. 那么, 由系统(4.3)的第3个和第6个方程, 得到

$$\begin{cases} y'(t) \leq (kam_2 - d)y(t), & t \neq n\tau, n = 1, 2, 3, \dots, \\ y(n\tau^+) = y(n\tau) + p, & t = n\tau, n = 1, 2, 3, \dots. \end{cases} \quad (4.9)$$

由定理2.9 和引理4.3, 知道存在一个时刻 $t_1 > 0$, 使得对所有的 $t \geq t_1$, 都有 $y(t) \leq \tilde{u}(t) + \frac{\epsilon_1}{a(\mu + \delta)}$. 这里 $\tilde{u}(t) = \frac{pe^{-(d - kam_2)(t - n\tau)}}{1 - e^{-(d - kam_2)\tau}}, t \in (n\tau, (n + 1)\tau], n \in Z_+$ 是以下系统的唯一周期解

$$\begin{cases} u'(t) = (kam_2 - d)u(t), & t \neq n\tau, n = 1, 2, 3, \dots, \\ u(n\tau^+) = u(n\tau) + p, & t = n\tau, n = 1, 2, 3, \dots. \end{cases} \quad (4.10)$$

因此, 对所有的 $t \geq t_1$ 都有

$$y(t) \leq \frac{p}{1 - e^{-(d - kam_2)\tau}} + \frac{\epsilon_1}{a(\mu + \delta)},$$

$$\begin{aligned} V'(t)|_{(4.3)} &= [\delta r - \beta(\mu + \delta)x_2(t) - a(\delta + \mu)y(t)]x_2(t) \\ &\geq [\delta r - \epsilon_1 - \beta(\mu + \delta)m_2 - \frac{a(\delta + \mu)p}{1 - e^{-(d - kam_2)\tau}}]x_2(t) \\ &= \rho x_2(t) > 0. \end{aligned}$$

故有,

$$V'(t)|_{(4.3)} \geq \rho x_2(t_1) = \epsilon_3 > 0,$$

$$V(t) \rightarrow +\infty, \quad x_2(t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty.$$

得到一个矛盾, 因为 $V(t)$ 最终有界的. 所以, 存在 $t_1 > 0$, 使得 $V(t_1) \geq m_3$.

步骤2

如果 $V(t) \geq m_3$ 对所有的 $t \geq t_1$ 都成立, 那么可以选择 $m = m_2$, 这样目标就达到了. 否则, 考虑那些离开区域 $D = \{(x_1, x_2, y) \in R_+^3 : V(t) = \delta x_1(t) + (\mu + \delta)x_2(t) < m_3\}$, 并且再次进入该区域的解. 令 $t^* = \inf_{t \geq t_1} \{V(t) < m_3\}$. 则对于 $t \in [t_1, t^*]$, 有 $V(t) \geq m_3$, $V(t^*) = m_3$. 假设 $t^* \in [n_1\tau, (n_1+1)\tau]$, $n_1 \in N$. 选取 n_2, n_3 使得

$$n_2\tau > -\frac{1}{d - kam_2} \ln \frac{\epsilon_1}{M + p},$$

$$\rho_1 n_3\tau + \sigma_2(n_2 + 1)\tau > 0,$$

$$\rho_1 = \rho x_2((n_1 + 1 + n_2)\tau^+).$$

取 $T = (n_2 + n_3)\tau$. 可以推断: 一定存在 $t_2 \in [(n_1 + 1)\tau, (n_1 + 1)\tau + T]$, 使得 $V(t_2) \geq m_3$. 否则, 对所有的 $t \in [(n_1 + 1)\tau, (n_1 + 1)\tau + T]$, 都有 $V(t) < m_3$, $x_2(t) < m_2$.

考虑系统

$$\begin{cases} u'(t) = (kam_2 - d)u(t), & t \neq n\tau, n = 1, 2, 3, \dots, \\ u(n\tau^+) = u(n\tau) + p, & t = n\tau, n = 1, 2, 3, \dots, \\ u((n_1 + 1)\tau^+) = y((n_1 + 1)\tau^+). \end{cases} \quad (4.11)$$

得到

$$u(t) = (u((n_1 + 1)\tau^+) - \frac{p}{1 - e^{-(d - kam_2)\tau}})e^{-(d - kam_2)(t - (n_1 + 1)\tau)} + \tilde{u}(t)$$

对于所有的 $t \in (n\tau, (n+1)\tau]$, $n_1 + 1 \leq n \leq n_1 + 1 + n_2 + n_3$. 那么对于所有的 $(n_1 + 1 + n_2)\tau \leq t \leq (n_1 + 1)\tau + T$, 满足

$$|u(t) - \tilde{u}(t)| \leq (M + p)e^{-(d - kam_2)n_2\tau} < \epsilon_1,$$

$$y(t) \leq u(t) \leq \tilde{u}(t) + \frac{\epsilon_1}{a(\mu + \delta)} \leq \frac{p}{1 - e^{-(d - kam_2)\tau}} + \frac{\epsilon_1}{a(\mu + \delta)}.$$

这就意味着

$$V'(t)|_{(4.3)} \geq \rho x_2((n_1 + 1 + n_2)\tau^+) = \rho_1 > 0,$$

$$V((n_1 + 1)\tau + T) \geq V((n_1 + 1 + n_2)\tau)e^{\rho_1 n_3\tau}. \quad (4.12)$$

当 $t \in [t^*, (n_1 + 1 + n_2)\tau]$ 时, 有

$$\begin{aligned} V'(t)|_{(4.3)} &= [\delta r - \beta(\mu + \delta)x_2(t) - a(\mu + \delta)y(t)]x_2(t) \\ &\geq [\delta r - (a + \beta)(\mu + \delta)M]x_2(t) \\ &= [\frac{\delta r}{\mu + \delta} - (a + \beta)M](\mu + \delta)x_2(t) \\ &\geq \sigma_2 V(t). \end{aligned}$$

因此,

$$V((n_1 + 1 + n_2)\tau) \geq V(t^*)e^{\sigma_2(n_2+1)\tau} > 0. \quad (4.13)$$

由(4.12) 和(4.13), 得到

$$V((n_1 + 1)\tau + T) \geq V(t^*)e^{\sigma_2(n_2+1)\tau + \rho_1 n_3 \tau} > m_3.$$

这是一个矛盾. 因此, 存在 $t_2 \in [(n_1 + 1)\tau, (n_1 + 1)\tau + T]$, 使得 $V(t_2) \geq m_3$. 对于 $t \in [t^*, t_2]$, 有

$$V(t) \geq V(t^*)e^{\sigma_2(t-t^*)} \geq m_3 e^{\sigma_2(1+n_1+n_2+n_3)\tau} \doteq m_1.$$

对于 $t > t_2$, 由于 $V(t_2) \geq m_3$, 类似的讨论可以继续. 如果选择 $m = \frac{m_1}{\mu + \delta}$, 则对于 $t \geq t_1$, 有 $x_1(t) + x_2(t) \geq m$. 按定义4.1, 系统(4.3)是持久的. $\square$

注 4.2 从定理4.5, 可以看出如果释放天敌的数量少于 p_3 , 那么系统(4.3) 是持久的. 也就是说害虫(食饵) 将持续生存并对农作物构成危害. 鉴于此, 可以增大天敌释放的数量直到 $p > p_2$, 由定理4.4 的结论, 知道害虫(食饵)将会绝灭.

4.1.4 讨论

在本节, 建立并研究了两个具有阶段结构的Lotka-Volterra 捕食模型. 在第一个模型中, 采取了连续的生物控制策略, 得到了两个平衡点(平凡平衡点和正平衡点)的存在性和局部稳定的条件. 利用构造Liapunov 函数, 证明了平凡平衡点(害虫绝灭平衡点)的全局渐进稳定性. 在第二个模型中, 研究了系统(4.3)的害虫绝灭周期解的存在性和稳定性. 也得到了系统(4.3)持久生存的条件. 在两个模型中, 都得到了食饵(害虫)绝灭的充分条件. 在现实世界中, 人们可以采取连续的生物控制策略或者脉冲的生物控制策略来控制害虫. 然而还有一些问题有待解决: (1) 在连续生物控制系统(4.2)中, 当 $p < p_0$ 时, 非平凡周期解的存在性和稳定性如何? (2) 如果 $p < p_3$, 则系统(4.3) 是持续生存的; 如果 $p > p_2$, 则害虫绝灭周期解 $(0, 0, \tilde{y}(t))$ 是全局渐进稳定的; 但是没有考虑 $p_2 > p > p_3$ 的情形. 此时是否存在非平凡周期解, 以及系统(4.3)的动力学行为如何. 本章的目标是控制食饵(害虫) 种群, 所以不讨论以上问题. 但是从数学的角度来看, 它们是很有意义的, 把这些问题留作以后进一步讨论.

4.2 食饵具有阶段结构的比率依赖捕食模型

4.2.1 背景

数学生态学的一个有趣问题是关于生态系统种群的生存问题. 传统的数学生态模型主要是由微分方程描述的连续系统. 最近, 由生物物理证明显示在很多情况下^[84-86], 特

别是捕食者不得不寻找食物(因此不得不分享或者竞争食物),一个更加合适的捕食理论应该为被称为比例依赖的理论,可以粗略地表述为单位捕食增长率应改为食饵和捕食者的比率的函数,应该是捕食功能反应. 这被数值和试验、观察所证明^[87, 88]. 特别的,标准的Lotka-Volterra 型模型(现存的理论都基于此),假设单位捕食率仅仅依赖于食饵的密度. 另外一个假设是,当捕食者的数量缓慢变化时(相对于食饵的变化),往往在捕食者种群内部存在竞争,从而单位捕食率依赖于食饵和捕食者的密度,最常用也是最简单的情况是依赖于密度的比率. 一般情况下比率依赖的捕食模型形如

$$\begin{cases} x' = xf(x) - yP(\frac{x}{y}), \\ y' = cyQ(\frac{x}{y}) - dy. \end{cases}$$

这里 $P(x)$ 是捕食功能反应函数, $P(x)$, $Q(x)$ 满足通常的特性例如非负性、增函数,在零的时候为零. 文^[89] 讨论了一个带时滞的Gause-型比率依赖捕食模型. 然而, Michaelis-Menten 型比例依赖的功能反应模型受到了生物数学学家的重视^[90-95]. 也就是他们研究的模型中所采取的捕食功能函数为 $P(\frac{x}{y}) = \frac{cxy}{my+x}$.

阶段结构是流行病学和人口学上的一个重要的概念. 在自然界中,许多种群的生命过程可以分为两个阶段:幼年和成年. 在^[68, 69, 75]中,建立并研究了包含幼年和成年的单种群阶段结构模型. 最近,阶段结构模型受到了很多重视. 在^[81, 96]中研究了具有阶段结构的捕食模型. 在^[77, 82, 97]中,研究了具阶段结构的竞争模型. ^[71-74]研究了具有阶段结构的流行病模型. 在文^[90, 94, 95]中,建立并研究了具有阶段结构的比例依赖捕食模型. 文^[94]考虑了食饵具有两个阶段结构的情况,而文^[90, 95]考虑了捕食者具有两个阶段结构的情况. 然而,在这些文中没有考虑脉冲干扰. 受文^[64, 68, 90, 94]的启发,本节将考虑食饵具有阶段结构的比率依赖捕食模型以及脉冲释放捕食者(天敌)对原来模型的影响. 被释放的捕食者(天敌)可以从别的地方迁入.

本节的主要目的是建立并研究一个食饵具有阶段结构的比率依赖的捕食模型,以及脉冲干扰对原来模型的影响. 在4.2.2,作了一些主要的生物假设并且建立模型. 在4.2.3,通过定量分析,得到了三个平衡点存在性和稳定性的条件. 在4.2.4,考虑了脉冲效应对模型的影响. 我们得到了食饵绝灭周期解全局吸引的充分条件以及脉冲系统持续生存的条件. 最后作了简短的讨论.

4.2.2 模型的建立

食饵具有阶段结构的基本的比率依赖捕食模型为

$$\begin{cases} x_1'(t) = rx_2(t) - d_1x_1(t) - re^{-d_1\tau}x_2(t-\tau) \\ x_2'(t) = re^{-d_1\tau}x_2(t-\tau) - d_2x_2(t) - \beta x_2^2(t) - P(\frac{x_2(t)}{y(t)})y(t) \\ y'(t) = kP(\frac{x_2(t)}{y(t)})y(t) - d_3y(t) \end{cases} \quad (4.14)$$

这里 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 分别表示幼年食饵和成年食饵的种群密度. $y(t)$ 表示捕食者种群的密度. 所有的参数为正常数. 模型的建立基于以下假设.

(H_1) 在 $t > 0$ 时刻, 出生的幼年食饵种群与现存的成年食饵种群的密度成比例, 比例常数为 r . 幼年食饵经历了成熟期 τ 后就可以转为成年食饵. $re^{-d_1\tau}x_2(t-\tau)$ 表示在 $t-\tau$ 时刻出生的食饵(也就是 $rx_2(t-\tau)$), 并且存活到 t 时刻(考虑到幼年食饵的自然死亡率 d_1) 的数量. 因此, 这一项表示从幼年食饵到成年食饵的转化率.

(H_2) 幼年食饵的自然死亡率为 d_1 . 成年食饵的死亡率与现存的成年食饵的种群密度以及密度的平方成比例比例常数为 d_2 和 β . 捕食者的自然死亡率为 d_3 .

(H_3) 捕食者只捕获成年食饵, 这是由于幼年食饵在避难所内躲藏. $P(\frac{x_2(t)}{y(t)})$ 代表比率依赖的功能反应函数.

(H_4) 从生态学有意义的角度来说, 总是假设系统(4.14)的初始条件 $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ 满足

$$\phi_i \in C([- \tau, 0], R_+^3), \quad \phi_i(0) > 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.15)$$

这里 $R_+^3 = \{(x_1, x_2, y) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y \geq 0\}$. 为了满足初始条件的连续性, 要求

$$\phi_1(0) = \int_{-\tau}^0 r\phi_2(s)e^{d_1s}ds, \quad (4.16)$$

这里 $\phi_1(0)$ 表示从时刻 $-\tau$ 到 0 出生的全体幼年食饵.

为了简单起见, 接下来研究Machaelis-Menten型比率依赖的捕食模型(也就是, 取 $P(\frac{x_2(t)}{y(t)}) = \frac{cx_2(t)}{my(t) + x_2(t)}$),

$$\begin{cases} x_1'(t) = rx_2(t) - d_1x_1(t) - re^{-d_1\tau}x_2(t-\tau), \\ x_2'(t) = re^{-d_1\tau}x_2(t-\tau) - d_2x_2(t) - \beta x_2^2(t) - \frac{cx_2(t)y(t)}{my(t) + x_2(t)}, \\ y'(t) = \frac{fx_2(t)y(t)}{my(t) + x_2(t)} - d_3y(t), \end{cases} \quad (4.17)$$

这里 $f = kc$, 而 $0 < k < 1$ 是消化率. 由于系统(4.17)的第2个和第3个方程与变量 $x_1(t)$ 无关, 我们只需要研究下面的系统(4.18)

$$\begin{cases} x_2'(t) = re^{-d_1\tau}x_2(t-\tau) - d_2x_2(t) - \beta x_2^2(t) - \frac{cx_2(t)y(t)}{my(t) + x_2(t)}, \\ y'(t) = \frac{fx_2(t)y(t)}{my(t) + x_2(t)} - d_3y(t). \end{cases} \quad (4.18)$$

接下来将研究具有初始条件

$$\phi_i \in C([- \tau, 0], R_+^2), \quad \phi_i(0) > 0, \quad i = 2, 3 \quad (4.19)$$

的系统(4.18).

4.2.3 系统(4.18)的定性分析

为了证明我们的结果引入以下引理.

引理 4.5^[68] 如果方程 $P(\lambda) = Q(\lambda)e^{-\lambda\tau}$ 至少有一个解具有负实部, 并且没有纯虚数解, 则该方程的所有解都具有负实部, 其中 $P(\lambda)$ 和 $Q(\lambda)$ 是连续函数.

经简单计算, 得到系统(4.18)的平凡平衡点 $P_1(0, 0)$ 总是存在的; 如果 $re^{-d_1\tau} - d_2 > 0$, 边界平衡点 $P_2(\bar{x}_2, 0) = (\frac{re^{-d_1\tau} - d_2}{\beta}, 0)$ 存在. 此外, 如果 $f > d_3$ 且 $re^{-d_1\tau} - d_2 > \frac{c(f-d_3)}{mf}$, 则存在唯一的一个正平衡点 $P_3(x_2^*, y^*)$, 这里 $x_2^* = \frac{(re^{-d_1\tau} - d_2) - \frac{c(f-d_3)}{mf}}{\beta}$, $y^* = \frac{(f-d_3)x_2^*}{md_3}$.

对于这三个平衡点, 得到以下结论.

定理 4.6 如果 $re^{-d_1\tau} - d_2 < 0$, 则系统(4.18)的平凡平衡点 $P_1(0, 0)$ 是局部渐进稳定的; 如果 $re^{-d_1\tau} - d_2 > 0$, 则它是不稳定的.

证明: 系统(4.18)在平衡点 $P_1(0, 0)$ 处的特征方程为

$$(\lambda + d_3)(\lambda - re^{-(d_1+\lambda)\tau} + d_2) = 0. \quad (4.20)$$

如果 $re^{-d_1\tau} - d_2 < 0$, 则方程(4.20)的所有的特征根都具有负实部. 因此, 系统(4.18)的平衡点 $P_1(0, 0)$ 是局部渐进稳定的.

如果 $re^{-d_1\tau} - d_2 > 0$, 则方程(4.20)至少有一个特征根具有正实部. 因此, 系统(4.18)的平衡点 $P_1(0, 0)$ 是不稳定的. $\square$

注 4.3 当 $re^{-d_1\tau} - d_2 < 0$ 时, 系统(4.18)的平凡平衡点 $P_1(0, 0)$ 是全局渐进稳定的.

事实上, 从系统(4.18)的第1个方程, 得到

$$\begin{aligned} x_2'(t) &= re^{-d_1\tau}x_2(t-\tau) - d_2x_2(t) - \beta x_2^2(t) - \frac{cx_2(t)y(t)}{my(t)+x_2(t)}, \\ &\leq re^{-d_1\tau}x_2(t-\tau) - d_2x_2(t) - \beta x_2^2(t). \end{aligned}$$

当 $re^{-d_1\tau} - d_2 < 0$ 时, 由引理3.1, 得到当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x_2(t) \rightarrow 0$. 于是由系统(4.18)的第2个方程, 容易得到: 当 $t \rightarrow \infty$ 时 $y(t) \rightarrow 0$. 所以, 系统(4.18)的平凡平衡点 $P_1(0, 0)$ 是全局渐进稳定的.

定理 4.7 如果 $re^{-d_1\tau} - d_2 > 0$ 并且 $f - d_3 < 0$, 则系统(4.18)的边界平衡点 $P_2(\bar{x}_2, 0)$ 存在并且是局部渐进稳定的. 如果 $re^{-d_1\tau} - d_2 > 0$ 且 $f - d_3 > 0$, 则边界平衡点 $P_2(\bar{x}_2, 0)$ 存在但不稳定.

证明: 系统(4.18) 在平衡点 $P_2(\bar{x}_2, 0)$ 处的特征根为

$$[\lambda - (f - d_3)][\lambda + re^{-d_1\tau}(1 - e^{-\lambda\tau}) + (re^{-d_1\tau} - d_2)] = 0. \quad (4.21)$$

显然, 其中一个特征根为 $\lambda_1 = f - d_3$. 如果 $f - d_3 < 0$, 则 $\lambda_1 < 0$; 如果 $f - d_3 > 0$, 则 $\lambda_1 > 0$. 其它的特征根都有以下方程决定

$$\lambda = -re^{-d_1\tau}(1 - e^{-\lambda\tau}) - (re^{-d_1\tau} - d_2). \quad (4.22)$$

如果 $re^{-d_1\tau} - d_2 > 0$, 则方程(4.22) 的所有特征根都具有负实部. 事实上, 如果令 $G(\lambda) = -re^{-d_1\tau}(1 - e^{-\lambda\tau}) - (re^{-d_1\tau} - d_2)$, 那么

$$G(0) = -(re^{-d_1\tau} - d_2) < 0,$$

$$G'(\lambda) = -r\tau e^{-(d_1+\lambda)\tau}.$$

容易看出: 对所有的 $\lambda > 0$ 都满足 $G'(\lambda) < 0$. 因此不可能有特征根具有非负实部.

如果 $re^{-d_1\tau} - d_2 > 0$ 且 $f - d_3 < 0$, 则方程(4.21) 的所有特征根都具有负实部. 因此, 系统(4.18) 的边界平衡点 $P_2(\bar{x}_2, 0)$ 是局部渐进稳定的.

如果 $re^{-d_1\tau} - d_2 > 0$ 且 $f - d_3 > 0$, 则方程(4.21) 的一个特征根具有正实部. 因此, 系统(4.18) 的边界平衡点 $P_2(\bar{x}_2, 0)$ 是不稳定的. $\square$

注 4.4 如果 $re^{-d_1\tau} - d_2 > 0$ 且 $f - d_3 < 0$, 则系统(4.18) 的边界平衡点 $P_2(\bar{x}_2, 0)$ 存在并且是全局渐进稳定的.

事实上, 从系统(4.18) 的第2个方程, 得到

$$y'(t) = \frac{fx_2(t)y(t)}{my(t)+x_2(t)} - d_3y(t) \leq (f - d_3)y(t).$$

当 $f - d_3 < 0$ 时, 得到: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $y(t) \rightarrow 0$. 因此, 对于充分小的任意正数 δ , 存在一个时刻 t_1 使得对所有的 $t \geq t_1$ 都有 $y(t) \leq \delta$. 于是从系统(4.18) 的第1个方程得到

$$\begin{aligned} x_2'(t) &= re^{-d_1\tau}x_2(t-\tau) - d_2x_2(t) - \beta x_2^2(t) - \frac{cx_2(t)y(t)}{my(t)+x_2(t)}, \\ &\geq re^{-d_1\tau}x_2(t-\tau) - d_2x_2(t) - \beta x_2^2(t) - c\delta. \end{aligned}$$

此外, 显然有 $x_2'(t) \leq re^{-d_1\tau}x_2(t-\tau) - d_2x_2(t) - \beta x_2^2(t)$. 考虑到 δ 可以充分小, 由引理3.1 得到: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x_2(t) \rightarrow \bar{x}_2$. 所以系统(4.18) 的边界平衡点 $P_2(\bar{x}_2, 0)$ 是全局渐进稳定的.

定理 4.8 如果 $f > 2d_3$ 并且 $re^{-d_1\tau} - d_2 > \frac{2c(f-d_3)}{m_f}$, 则系统(4.18) 的正平衡点 $P_3(x_2^*, y^*)$ 是局部渐进稳定的.

证明: 系统(4.18) 在平衡点 $P_3(x_2^*, y^*)$ 处的特征方程为

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0, \quad (4.23)$$

其中,

$$a_1 = -re^{-(d_1+\lambda)\tau} + d_2 + 2\beta x_2^* + \frac{mc(y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2} + d_3 - \frac{f(x_2^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2},$$

$$a_2 = \left(\frac{f(x_2^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2} - d_3 \right) (re^{-(d_1+\lambda)\tau} - d_2 - 2\beta x_2^* - \frac{mc(y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2}) - \frac{mfc(x_2^*y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^4}.$$

接下来, 将分两个步骤证明方程(4.23) 的所有特征根都具有负实部.

步骤1. 至少存在一个负实数的特征根.

令 $\lambda = u \in R$. 把它代入方程(4.23), 我们得到

$$\begin{aligned} & u^2 + [d_2 + 2\beta x_2^* + \frac{mc(y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2} + d_3 - \frac{f(x_2^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2}]u \\ & + [d_3 - \frac{f(x_2^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2}][d_2 + 2\beta x_2^* + \frac{mc(y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2}] - \frac{mfc(x_2^*y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^4} \\ & = re^{-(d_1+\lambda)\tau} [u + d_3 - \frac{f(x_2^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2}]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

记方程(4.24) 的左端表达式和右端表达式分别为 $F(u)$, $G(u)$. 那么,

$$\begin{aligned} F(0) &= [d_3 - \frac{f(x_2^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2}][d_2 + 2\beta x_2^* + \frac{mc(y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2}] - \frac{mfc(x_2^*y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^4} \\ &= d_3 \frac{f-d_3}{f} [d_2 + 2\beta x_2^*] + \frac{cd_3(f-d_3)^2(f-2d_3)}{mf^3}, \end{aligned}$$

$$G(0) = re^{-d_1\tau} [d_3 - \frac{f(x_2^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2}] = re^{-d_1\tau} d_3 \frac{f-d_3}{f}.$$

如果 $f > 2d_3$ 且 $re^{-d_1\tau} - d_2 > \frac{2c(f-d_3)}{mf}$, 则 $F(0) > G(0)$. 另一方面, 有

$$G(-d_3 \frac{f-d_3}{f}) = 0 > -\frac{mfc(x_2^*y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^4} = F(-d_3 \frac{f-d_3}{f}).$$

因此, 由 $F(u)$ 和 $G(u)$ 是连续函数得知存在方程(4.24) 存在一个解 $u^* \in (-d_3 \frac{f-d_3}{f}, 0)$. 也就是说, 方程(4.23) 至少有一个负实数的特征根.

步骤2. 不可能存在纯虚数的特征根.

令 $\lambda = iv$, 这里 i 是虚数的单位, v 是实数. 把它代入方程(4.23), 得到

$$\begin{aligned} & v^2 - [d_3 - \frac{f(x_2^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2}][d_2 + 2\beta x_2^* + \frac{mc(y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2}] + \frac{mfc(x_2^*y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^4} \\ & = -re^{-d_1\tau} [d_3 - \frac{f(x_2^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2}] \cos(v\tau) - (re^{-d_1\tau} v) \sin(v\tau), \end{aligned} \quad (4.25)$$

以及

$$\begin{aligned} & v[d_2 + 2\beta x_2^* + \frac{mc(y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2} + d_3 - \frac{f(x_2^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2}] \\ &= -re^{-d_1\tau}[d_3 - \frac{f(x_2^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2}]\sin(v\tau) + (re^{-d_1\tau}v)\cos(v\tau). \end{aligned} \quad (4.26)$$

把方程(4.25) 和(4.26) 的平方相加, 则得到

$$v^4 + Av^2 + B = 0, \quad (4.27)$$

这里

$$\begin{aligned} A &= [d_2 + 2\beta x_2^* + \frac{mc(y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2} + d_3 - \frac{f(x_2^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2}]^2 \\ &\quad - 2(d_3 - \frac{f(x_2^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2})(d_2 + 2\beta x_2^* + \frac{mc(y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2}) \\ &\quad - 2\frac{mfc(x_2^*y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^4} - (re^{-d_1\tau})^2 \\ &= (d_2 + 2\beta x_2^*)^2 - (re^{-d_1\tau})^2 + (\frac{mc(y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2})^2 \\ &\quad + 2(d_2 + 2\beta x_2^*)\frac{mc(y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2} + (d_3 - \frac{f(x_2^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2})^2 - 2\frac{mfc(x_2^*y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^4}, \\ B &= (d_3 - \frac{f(x_2^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2})^2[d_2 + 2\beta x_2^* + \frac{mc(y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2}]^2 + \frac{(mfc)^2(x_2^*y^*)^4}{(my^* + x_2^*)^4} \\ &\quad - 2\frac{mfc(x_2^*y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^4}(d_3 - \frac{f(x_2^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2})(d_2 + 2\beta x_2^* + \frac{mc(y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2}) \\ &\quad - (d_3 - \frac{f(x_2^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2})^2(re^{-d_1\tau})^2 \\ &= \{(d_3 - \frac{f(x_2^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2})[d_2 + 2\beta x_2^* + \frac{mc(y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2}] - \frac{mfc(x_2^*y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^4}\}^2 \\ &\quad - (d_3 - \frac{f(x_2^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2})^2(re^{-d_1\tau})^2 \\ &= \{(d_3 - \frac{f(x_2^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2})[(d_2 + 2\beta x_2^* - re^{-d_1\tau}) + \frac{mc(y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2}] - \frac{mfc(x_2^*y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^4}\} \\ &\quad \times \{(d_3 - \frac{f(x_2^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2})[(d_2 + 2\beta x_2^* + re^{-d_1\tau}) + \frac{mc(y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2}] - \frac{mfc(x_2^*y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^4}\}. \end{aligned}$$

如果 $f > 2d_3$ 且 $re^{-d_1\tau} - d_2 > \frac{2c(f-d_3)}{mf}$, 那么,

$$(d_2 + 2\beta x_2^*)^2 - (re^{-d_1\tau})^2 > 0,$$

并且

$$\begin{aligned} & (\frac{mc(y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2})^2 + (d_3 - \frac{f(x_2^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2})^2 - 2\frac{mfc(x_2^*y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^4} \\ & \geq (\frac{mc(y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2})^2 + \frac{d_3^2}{f^2} - 2\frac{mfc(x_2^*y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^4} \\ & = (\frac{mc(y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2})^2 + [\frac{f(x_2^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2}]^2 - 2\frac{mfc(x_2^*y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^4} \\ & = [\frac{mc(y^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2} - \frac{f(x_2^*)^2}{(my^* + x_2^*)^2}]^2 \geq 0. \end{aligned}$$

因此, $A > 0$, $B > 0$, 方程(4.27)没有实数解. 也就是说, 特征方程(4.23) 没有纯虚数解.

由步骤1, 步骤2 和引理4.5, 得到预想的结果. $\square$

4.2.4 脉冲释放捕食者的效应

在这一部分, 将研究脉冲释放捕食者(天敌)对原来系统的影响. 脉冲干扰后系统的动力学行为如何? 系统是持续生存的还是食饵将会绝灭? 具有脉冲干扰的系统为

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1'(t) = rx_2(t) - d_1x_1(t) - re^{-d_1\tau}x_2(t-\tau), \\ x_2'(t) = re^{-d_1\tau}x_2(t-\tau) - d_2x_2(t) - \beta x_2^2(t) - \frac{cx_2(t)y(t)}{my(t) + x_2(t)}, \\ y'(t) = \frac{fx_2(t)y(t)}{my(t) + x_2(t)} - d_3y(t), \\ x_1(t^+) = x_1(t), \\ x_2(t^+) = x_2(t), \\ y(t^+) = y(t) + \mu, \end{array} \right\} \begin{array}{l} t \neq nT, \\ \\ \\ t = nT, n = 1, 2, 3, \dots, \end{array} \quad (4.28)$$

这里参数的生物意义与系统(4.18) 的类似, T 是脉冲释放捕食者的周期, μ 代表每次释放的数量. 事实上, 只需要研究下列具有初始条件(4.19)的子系统.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2'(t) = re^{-d_1\tau}x_2(t-\tau) - d_2x_2(t) - \beta x_2^2(t) - \frac{cx_2(t)y(t)}{my(t) + x_2(t)}, \\ y'(t) = \frac{fx_2(t)y(t)}{my(t) + x_2(t)} - d_3y(t), \\ x_2(t^+) = x_2(t), \\ y(t^+) = y(t) + \mu, \end{array} \right\} \begin{array}{l} t \neq nT, \\ \\ \\ t = nT, n = 1, 2, 3, \dots. \end{array} \quad (4.29)$$

如果对所有的 $t \geq 0$ 都有 $x_2(t) = 0$, 则得到了系统(4.30) 的子系统

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = -d_3y(t), \quad t \neq nT, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ y(nT^+) = y(nT) + \mu, \quad t = nT, \quad n = 1, 2, 3, \dots. \end{array} \right. \quad (4.30)$$

显然 $\tilde{y}(t) = \frac{\mu e^{-d_3(t-nT)}}{1-e^{-d_3T}}$, $t \in (nT, (n+1)T]$, $n \in Z_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\tilde{y}(0^+) = \frac{\mu}{1-e^{-d_3T}}$ 是系统(4.30) 的一个正周期解. 因此, 系统(4.29) 的食饵绝灭周期解的完整表达式是: $(0, \tilde{y}(t)) = (0, \frac{\mu e^{-d_3(t-nT)}}{1-e^{-d_3T}})$, $t \in (nT, (n+1)T]$, $n \in Z_+$. 由于系统(4.30)的解是 $y(t) = (y(0^+) - \frac{\mu}{1-e^{-d_3T}})e^{-d_3t} + \tilde{y}(t)$, $t \in (n\tau, (n+1)\tau]$, $n \in Z_+$, 得到以下引理

引理 4.6 系统(4.30) 的每个具有初始条件 $y(0^+) > 0$ 的解, 都满足: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $y(t) \rightarrow \tilde{y}(t)$.

关于系统(4.29)有以下结论.

定理 4.9 如果 $re^{-d_1\tau} - d_2 > \frac{c}{m}$, 则食饵不会灭绝, 也就是, 系统(4.29) 是持续生存的.

证明: 如果 $re^{-d_1\tau} - d_2 > \frac{c}{m}$, 由系统(4.29) 的第一个方程, 我们得到

$$\begin{aligned} x_2'(t) &= re^{-d_1\tau} x_2(t-\tau) - d_2 x_2(t) - \beta x_2^2(t) - \frac{cx_2(t)y(t)}{my(t)+x_2(t)}, \\ &\geq re^{-d_1\tau} x_2(t-\tau) - d_2 x_2(t) - \beta x_2^2(t) - \frac{c}{m} x_2(t). \end{aligned}$$

由引理3.1, 得到: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x_2(t) \geq \frac{re^{-d_1\tau} - d_2 - \frac{c}{m}}{\beta} > 0$. 因此, 食饵不会绝灭, 从而系统(4.29) 是持续生存的. $\square$

定理 4.10 如果 $re^{-d_1\tau} - d_2 < \frac{c}{m}$ 并且 $\mu > \frac{(e^{d_3T}-1)(re^{-d_1\tau}-d_2)^2}{c\beta[1-\frac{m}{c}(re^{-d_1\tau}-d_2)]}$, 则系统(4.29) 的食饵绝灭周期解 $(0, \tilde{y}(t))$ 是全局吸引的, 从而食饵绝灭.

证明: 如果 $re^{-d_1\tau} - d_2 < \frac{c}{m}$ 并且 $\mu > \frac{(e^{d_3T}-1)(re^{-d_1\tau}-d_2)^2}{c\beta[1-\frac{m}{c}(re^{-d_1\tau}-d_2)]}$, 则总是可以选取充分小的正常数 δ_1, δ_2 , 使得

$$\sigma = re^{-d_1\tau} - d_2 - \frac{cy_{\min}}{my_{\min} + x_{2\max}} < 0,$$

这里 $x_{2\max} = \frac{re^{-d_1\tau} - d_2}{\beta} + \delta_1$, $y_{\min} = \frac{\mu}{e^{d_3T}-1} - \delta_2$.

由系统(4.29) 的第1个方程, 得到

$$\begin{aligned} x_2'(t) &= re^{-d_1\tau} x_2(t-\tau) - d_2 x_2(t) - \beta x_2^2(t) - \frac{cx_2(t)y(t)}{my(t)+x_2(t)}, \\ &\leq re^{-d_1\tau} x_2(t-\tau) - d_2 x_2(t) - \beta x_2^2(t). \end{aligned}$$

由引理3.1, 得知: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x_2(t) \leq \frac{re^{-d_1\tau} - d_2}{\beta}$. 因此, 对于选定的充分小的 δ_1 , 存在一个时刻 t_1 使得对所有的 $t \geq t_1$ 都满足 $x_2(t) \leq x_{2\max}$. 此外, 还有

$$y'(t) = \frac{fx_2(t)y(t)}{my(t)+x_2(t)} - d_3 y(t) \geq -d_3 y(t),$$

由定理2.9 和引理4.6, 得知: 对于选定的充分小的 δ_2 , 存在 $N_1 \in \mathbb{Z}_+$ 使得

$$y(t) \geq \tilde{y}(t) - \delta_2 \geq \frac{\mu e^{-d_3T}}{1 - e^{-d_3T}} - \delta_2 = y_{\min}, \quad t \geq N_1 T.$$

因此, 当 $t > \max\{t_1, N_1 T\}$ 时, 得到

$$\frac{cx_2(t)y(t)}{my(t)+x_2(t)} \geq \frac{cx_2(t)y(t)}{my(t)+x_{2\max}} \geq \frac{cx_2(t)y_{\min}}{my_{\min}+x_{2\max}}$$

和

$$\begin{aligned} x_2'(t) &= re^{-d_1\tau} x_2(t-\tau) - d_2 x_2(t) - \beta x_2^2(t) - \frac{cx_2(t)y(t)}{my(t)+x_2(t)}, \\ &\leq re^{-d_1\tau} x_2(t-\tau) - d_2 x_2(t) - \beta x_2^2(t) - \frac{cx_2(t)y_{\min}}{my_{\min}+x_{2\max}} \end{aligned} \quad (4.31)$$

由于 $\sigma = re^{-d_1\tau} - d_2 - \frac{cy_{\min}}{my_{\min}+x_{2\max}} < 0$, 从方程(4.31) 和引理3.1 知道: 当 $t \rightarrow \infty$ 时一定有 $x_2(t) \rightarrow 0$. 因此,

$$y'(t) = \frac{fx_2(t)y(t)}{my(t)+x_2(t)} - d_3y(t) \rightarrow -d_3y(t) \quad \text{当 } t \rightarrow \infty \text{ 时.}$$

由定理2.9 得到: 当 $t \rightarrow \infty$ 时一定有 $y(t) \rightarrow \tilde{y}(t)$. 所以, 系统(4.29) 的食饵绝灭周期解是全局吸引的, 从而食饵会绝灭. $\square$

注 4.5 从以上的两个定理可以看出: 在一定条件下, 可以通过适当控制捕食者(天敌)的释放量达到消灭食饵(害虫)的目标. 然而, 在另外一些特殊情况下(例如 $re^{-d_1\tau} - d_2 > \frac{c}{m}$), 不管释放多少捕食者(天敌)都不能使食饵(害虫)绝灭. 这个结论与参考文献^[55, 56, 63-65]中的结论是非常不同的. 这个结论也解释了为什么在一些情况下食饵是非常难消灭的. 当食饵的密度非常低的时候, 捕食者(天敌)不得不努力以便捕获食饵(害虫). 考虑到捕食功能函数是比率依赖的, 捕食者(天敌)可能在捕获到食饵(害虫)以前就被饿死. 本节的结论表明: 在一些情况下, 比率依赖的捕食模型要比传统的非比率依赖模型更符合实际情况.

4.2.5 讨论

在本节, 建立并讨论了一个食饵具有阶段结构的比率依赖捕食模型. 在4.2.3, 得到了系统(4.18) 的平衡点存在性和稳定性的条件. 但是, 没有得到正平衡点的全局稳定性. 在4.2.4, 考虑了脉冲释放捕食者(天敌)对原来系统(4.18)的影响. 得到了系统(4.29) 持续生存和系统(4.29)的食饵绝灭周期解全局吸引的充分条件. 结论表明: 在一些恰当的条件下, 通过释放捕食者(天敌)可以使食饵(害虫)绝灭. 然而, 如果参数满足 $re^{-d_1\tau} - d_2 > \frac{c}{m}$, 则不管释放捕食者(天敌)的数量是多少都不能使食饵(害虫)绝灭. 这个结果与自然界中的许多现象是符合的, 而这反过来又表明本节所建立的比率依赖捕食模型是合适的, 结论也是正确的.

5 具有两次脉冲的食饵染病的捕食模型

5.1 引言

害虫的爆发往往会引起严重的生态和经济问题,而人类和害虫(例如蝗虫,蚜虫,棉铃虫,等等)之间的战争持续了数千年. 随着社会和科学技术的进步,人类已经采用了很多先进的武器来对付害虫,例如化学杀虫剂,生物杀虫剂,遥感技术,原子能,等等. 最终,人类取得了一些辉煌的成就. 然而,人与害虫这间的斗争并没有结束,必将继续下去. 人类用了大量的各种各样的杀虫剂来控制害虫,这是因为杀虫剂能够在短时间内迅速杀死相当比例的害虫,有时候为了避免经济损失只有使用杀虫剂. 然而,杀虫剂已经被证明是人类和其他有益生物的污染物的主要来源之一. 目前,越来越多的人开始关注杀虫剂残留物对人类健康以及对环境的影响. 在这方面,通过观察已经发现部分有益昆虫比害虫更容易被化学杀虫剂所杀死. 同时,随着时间和使用次数的增加杀虫剂的浓度越来越高,因为害虫对这些化学杀虫剂有了一定的抵抗力(见文献^[63-65, 98, 99]以及它们所引用的文献).

化学杀虫剂的一个替代物是生物控制,包括微生物控制,这是因为疾病是控制某些害虫数量的重要的和自然的方法. 昆虫,象人类和哺乳动物一样,能被引起疾病的有机体(例如细菌,病毒和真菌)所感染. 在恰当的条件下(例如高湿度或者昆虫的密度过于丰富),这些自然发生的有机体可以大量繁殖引起疾病的爆发或者形成动物流行病从而大批杀害昆虫种群. 昆虫病原体可以按两种方式使用. 第一种,少量病原体被引进某一个害虫种群以期在该种群内部形成地方病. 第二种,昆虫病原体象生物杀虫剂一样来使用. 在这种情况下,只要害虫的密度达到经济阈值的时候就使用病原体,并且病原体不会在环境中长时间存活. 已经有大量的文献研究使用昆虫病毒来控制害虫^[100-103]. 其中一个在温室中使用生物控制的成功例子是:利用寄生虫(*Encarsia formosa*)来控制温室粉虱(*Trialeurodes vaporariorum*)从而保护西红柿和黄瓜^[104, 105]. 也有些论文和书籍研究了微生物控制害虫的数学模型^[48, 55, 63, 64, 106, 107].

人们也使用天敌来控制害虫或者使害虫的密度低于经济危害水平. 当害虫规模达到或超过经济危害水平时,释放天敌可以起到象喷洒农药一样的作用. 有很多文献讨论了利用天敌来控制害虫^[45, 47, 104, 108].

综合害虫管理(IPM)指的是害虫管理的长期管理策略. 通过使用生物的,文化的,以及化学的等策略把害虫控制到可接受的水平,而对环境中的农民和动物的影响很小(具体细节参见^[49, 109]). 有关实验已经证明了IPM比传统的单一控制策略(例如生物控制或者化学控制)更加有效^[51].

受文章^[49, 51, 53, 109, 110]的启发,本章将考虑使用微生物和天敌来控制害虫的综合治理策略. 也就是,通过释放染病的害虫和天敌来控制害虫. 染病的害虫可以在实验室培养而

天敌可以从别的地方迁入. 一旦易感害虫和染病的害虫相遇, 易感害虫就有可能被感染. 易感害虫有更大的死亡概率. 假设天敌只捕捉易感的害虫, 但是不捕捉染病的害虫. 在模型中, 分别称害虫和天敌为食饵和捕食者. 为了数学上简洁, 对模型作了一些假设. 具体细节在下一节.

本章建立并且研究了一个具有两次脉冲的食饵得病的捕食模型. 本章按如下组织结构. 在5.2节, 建立模型并作了一些主要的生物假设. 在5.3节, 表述了一些基本的引理和定义. 在5.4节, 通过使用脉冲微分方程的Floquet定理, 小扰动方法以及比较技巧, 研究了易感害虫绝灭周期解的全局渐进稳定性以及系统持久生存的条件. 最后是本章的小结.

5.2 模型的建立

在本章中研究下面的害虫综合治理的模型.

$$\left\{ \begin{array}{l} S'(t) = rS(t)\left(1 - \frac{S(t) + I(t)}{K}\right) - \beta S(t)I(t) - \frac{aS(t)y(t)}{1 + \omega S(t)}, \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - d_1 I(t), \\ y'(t) = \frac{\delta a S(t)y(t)}{1 + \omega S(t)} - d_2 y(t), \\ \Delta S(t) = 0, \\ \Delta I(t) = p, \\ \Delta y(t) = 0, \end{array} \right\} t \neq n\tau, t \neq (n+l)\tau, \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta S(t) = 0, \\ \Delta I(t) = 0, \\ \Delta y(t) = q, \end{array} \right\} t = (n+l)\tau, n \in Z_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta S(t) = 0, \\ \Delta I(t) = 0, \\ \Delta y(t) = q, \end{array} \right\} t = (n+1)\tau, n \in Z_+.$$
(5.1)

这里 $S(t)$, $I(t)$ 分别代表易感食饵(易感害虫) 和染病食饵(染病虫害)的种群密度. $y(t)$ 是捕食者(天敌) 的种群密度. 模型的建立基于以下生物意义假设.

(H_1) 食饵种群中有流行病, 食饵种群分为两类: 易感食饵和染病食饵. 传染率是双线性的 $\beta S(t)I(t)$, β 是单位时间内染病食饵和易感食饵的平均接触数.

(H_2) 食饵种群按Logistic增长, $r > 0$ 是内禀增长率, $K > 0$ 是环境容纳量. 假设染病的食饵由于得病不能生产后代; 然而染病的食饵仍然危害农作物. 因此, 食饵的增长率是 $rS(t)(1 - \frac{S(t)+I(t)}{K})$.

(H_3) 捕食者只是捕捉易感的食饵, 捕食功能函数是Holling II型. 参数 a, ω 是正常数, δ 是捕食的转化率.

(H_4) d_1, d_2 分别是染病食饵和捕食者的死亡率.

(H_5) 周期性的释放染病食饵, 在每个 $t = (n+l)\tau$ 时刻释放数量为 $p(p > 0)$ 的染病食饵, 其中 $n \in Z_+$, $0 < l < 1$. 此外, 在每个时刻 $t = (n+1)\tau$ ($n \in Z_+$) 释放数量为 $q(q > 0)$ 的捕食者. 关于通过释放天敌和染病食饵来控制害虫的文献参看^[45, 111].

5.3 准备知识

引理 5.1 存在一个正常数 M 使得系统(5.1)的每一个具有正初始条件的解 $(S(t), I(t), y(t))$ 都满足 $S(t) \leq M, I(t) \leq M, y(t) \leq M$, 这里 t 充分大.

证明: 定义函数 $V(t)$ 如下

$$V(t) = S(t) + I(t) + y(t).$$

经简单计算, 知道当 $t \neq n\tau, t \neq (n+l)\tau$ 时,

$$\begin{aligned} D^+V|_{(5.1)} + dV &= (r+d)S(t) - rS(t)\frac{S(t)+I(t)}{K} - (d_1-d)I(t) \\ &\quad - (d_2-d)y(t) - \frac{(1-d)ay(t)}{1+\omega S(t)} \\ &\leq (r+d)S(t) - \frac{rS^2(t)}{K}, \end{aligned}$$

这里 $d = \min\{d_1, d_2\}$. 由于上面的不等式右端是首相系数为负数的二次多项式, 所以对于任意的 $(S(t), I(t), y(t)) \in R_+^3$ 上式右端都有上界. 因此存在一个正常数 λ 使得

$$D^+V|_{(5.1)} + dV < \lambda \quad \text{当 } t \neq n\tau, \quad t \neq (n+l)\tau \text{ 时.}$$

从系统(5.1)的第4个和第9个方程得到

$$V(n\tau^+) \leq V(n\tau) + \mu,$$

其中 $\mu = \max\{p, q\}$. 根据定理2.6, 得到

$$\begin{aligned} V(t) &= V(0)e^{-dt} + \int_0^t \lambda e^{-d(t-s)} ds + \sum_{0 < k\tau < t} \mu e^{-d(t-k\tau)} \\ &\rightarrow \frac{\lambda}{d} + \frac{\mu e^{d\tau}}{e^{d\tau}-1}, \text{ 当 } t \rightarrow \infty \text{ 时.} \end{aligned}$$

最后由 $V(t)$ 的定义我们知道系统(5.1)的每个具有正初始条件的解是一致最终有解的. $\square$

引理 5.2 系统

$$\begin{cases} u'(t) = -wu(t), & t \neq n\tau, n \in Z_+, \\ \Delta u(t) = \mu, & t = n\tau, n \in Z_+, \end{cases} \quad (5.2)$$

有唯一的周期解 $u^*(t)$, 并且系统的每个具有正初始条件 $u(0^+)$ 的解 $u(t)$ 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 满足 $|u(t) - u^*(t)| \rightarrow 0$, 这里

$$u^*(t) = \frac{\mu e^{-w(t-n\tau)}}{1 - e^{-w\tau}}, \quad u^*(0^+) = \frac{\mu}{1 - e^{-w\tau}}.$$

证明: 引理的证明是显然的. 事实上, 由于系统(5.2) 的解为

$$u(t) = (u(0^+) - \frac{\mu}{1 - e^{-w\tau}})e^{-wt} + u^*(t), \quad n\tau < t \leq (n+1)\tau,$$

所以结论显然. $\square$

5.4 主要结论

如果对所有的 $t \geq 0$ 都有 $S(t) \equiv 0$, 得到系统(5.1)的子系统

$$\begin{cases} \begin{cases} I'(t) = -d_1 I(t), \\ y'(t) = -d_2 y(t), \end{cases} & t \neq n\tau, t \neq (n+1)\tau, \\ \begin{cases} \Delta I(t) = p, \\ \Delta y(t) = 0, \end{cases} & t = (n+1)\tau, n \in Z_+, \\ \begin{cases} \Delta I(t) = 0, \\ \Delta y(t) = q, \end{cases} & t = (n+1)\tau, n \in Z_+. \end{cases} \quad (5.3)$$

在这个系统中, 可以看到 $I(t)$ 和 $y(t)$ 是没有关系的. 因此, 可以分别的求解. 由引理5.2, 得到以下结论.

定理 5.1 系统(5.3) 存在唯一的正周期解

$$I^*(t) = \begin{cases} I^* e^{-d_1(t-n\tau)}, & t \in (n\tau, (n+1)\tau], \\ (I^* e^{-d_1\tau} + p) e^{-d_1(t-(n+1)\tau)}, & t \in ((n+1)\tau, (n+2)\tau], \end{cases}$$

$$y^*(t) = \frac{q e^{-d_2(t-n\tau)}}{1 - e^{-d_2\tau}}, \quad t \in (n\tau, (n+1)\tau],$$

其中

$$I^*(0^+) \doteq I^* = \frac{p}{1 - e^{-d_1\tau}},$$

$$y^*(0^+) \doteq y^* = \frac{q}{1 - e^{-d_2\tau}}.$$

此外, 对系统(5.3)的每个具有初始条件 $I(0^+) > 0, y(0^+) > 0$ 的解, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 都满足: $I(t) \rightarrow I^*(t), y(t) \rightarrow y^*(t)$.

因此, 得到系统(5.1) 的易感害虫绝灭周期解的完整表达式为 $(0, I^*(t), y^*(t))$, $t \in (n\tau, (n+1)\tau], n \in Z_+$. 以下定理是关于易感害虫绝灭周期解 $(0, I^*(t), y^*(t))$ 的稳定性和吸引性的结论.

定理 5.2 如果 $r\tau < (\frac{r}{K} + \beta) \frac{p}{d_1} + \frac{aq}{d_2}$, 则系统(5.1) 的易感害虫绝灭周期解 $(0, I^*(t), y^*(t))$ 是局部渐进稳定的.

证明: 为了证明易感害虫绝灭周期解的局部稳定性, 使用小扰动的方法. 令

$$S(t) = u(t), \quad I(t) = v(t) + I^*(t), \quad y(t) = w(t) + y^*(t),$$

这里 $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ 是小扰动. 则系统(5.1) 可以按Taylor 展式展开, 忽略高阶项后, 得到线性化方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} u'(t) = u(t)[r - (\frac{r}{K} + \beta)I^*(t) - ay^*(t)], \\ v'(t) = \beta I^*(t)u(t) - d_1v(t), \\ w'(t) = \delta ay^*(t)u(t) - d_2w(t) \end{array} \right\} \quad t \neq n\tau, t \neq (n+l)\tau,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u((n+l)\tau^+) = u((n+l)\tau), \\ v((n+l)\tau^+) = v((n+l)\tau), \\ w((n+l)\tau^+) = w((n+l)\tau), \end{array} \right\} \quad t = (n+l)\tau, n \in Z_+, \quad (5.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u((n+1)\tau^+) = u((n+1)\tau), \\ v((n+1)\tau^+) = v((n+1)\tau), \\ w((n+1)\tau^+) = w((n+1)\tau), \end{array} \right\} \quad t = (n+1)\tau, n \in Z_+.$$

设 $\Phi(t)$ 为系统(5.4) 的基础解矩阵. 则 $\Phi(t)$ 满足

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \begin{pmatrix} r - (\frac{r}{K} + \beta)I^*(t) - ay^*(t) & 0 & 0 \\ \beta I^*(t) & -d_1 & 0 \\ \delta ay^*(t) & 0 & -d_2 \end{pmatrix} \Phi(t),$$

$\Phi(0) = I_3$ 是3阶单位矩阵. 因此基础解矩阵是

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\int_0^t [r - (\frac{r}{K} + \beta)I^*(t) - ay^*(t)]dt} & 0 & 0 \\ \varphi_{21} & e^{-d_1 t} & 0 \\ \varphi_{31} & 0 & e^{-d_2 t} \end{pmatrix},$$

这里 φ_{21} 和 φ_{31} 的具体表达式不需要给出, 因为后面没有用到. 系统(5.4) 的第4、5、6个方程变为

$$\begin{pmatrix} u((n+l)\tau^+) \\ v((n+l)\tau^+) \\ w((n+l)\tau^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u((n+l)\tau) \\ v((n+l)\tau) \\ w((n+l)\tau) \end{pmatrix},$$

系统(5.4) 的第7、8、9个方程变为

$$\begin{pmatrix} u((n+1)\tau^+) \\ v((n+1)\tau^+) \\ w((n+1)\tau^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u((n+1)\tau) \\ v((n+1)\tau) \\ w((n+1)\tau) \end{pmatrix}.$$

因此, 如果

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi(\tau)$$

的所有特征根的绝对值小于1, 则系统(5.1) 的害虫绝灭周期解 $(0, I^*(t), y^*(t))$ 是局部渐进稳定的. 由于M 的特征根为

$$\lambda_1 = e^{-d_2\tau} < 1, \quad \lambda_2 = e^{-d_1\tau} < 1, \quad \lambda_3 = e^{\int_0^\tau [r - (\frac{r}{K} + \beta)I^*(t) - ay^*(t)]dt},$$

容易得到 $|\lambda_3| < 1$ 当且仅当 $r\tau < (\frac{r}{K} + \beta)\frac{p}{d_1} + \frac{aq}{d_2}$ 成立. 根据脉冲微分方程的Floquet 定理, 系统(5.1) 的害虫绝灭周期解 $(0, I^*(t), y^*(t))$ 是局部渐进稳定的. $\square$

定理 5.3 如果 $r\tau < (\frac{r}{K} + \beta)\frac{p}{d_1} + \frac{aq}{d_2(1+\omega K)}$, 则系统(5.1) 的害虫绝灭周期解 $(0, I^*(t), y^*(t))$ 是全局渐进稳定的.

证明: 由所给条件和定理5.2, 容易得到 $(0, I^*(t), y^*(t))$ 是局部渐进稳定的. 因此, 只需要证明周期解的全局吸引力. 由于 $r\tau < (\frac{r}{K} + \beta)\frac{p}{d_1} + \frac{aq}{d_2(1+\omega K)}$, 可以选取一个充分小的 $\varepsilon_1 > 0$ 使得

$$\int_0^\tau [r - (\frac{r}{K} + \beta)(I^*(t) - \varepsilon_1) - \frac{a}{1+\omega K}(y^*(t) - \varepsilon_1)]dt \doteq \sigma < 0.$$

另外, 还有

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - d_1 I(t) \geq -d_1 I(t).$$

从定理2.9 和引理5.2, 知道存在 $n_1 \in Z_+$ 使得

$$I(t) \geq I^*(t) - \varepsilon_1, \quad t \geq n_1\tau. \quad (5.5)$$

类似的, 存在 $n_2 \in Z_+$ ($n_2 > n_1$) 使得

$$y(t) \geq y^*(t) - \varepsilon_1, \quad t \geq n_2\tau. \quad (5.6)$$

因此, 对于 $t \geq n_2\tau$, 有

$$\begin{aligned} S'(t) &= rS(t)(1 - \frac{S(t)+I(t)}{K}) - \beta S(t)I(t) - \frac{aS(t)y(t)}{1+\omega S(t)} \\ &\leq rS(t) - (\frac{r}{K} + \beta)S(t)I(t) - \frac{aS(t)y(t)}{1+\omega K} \\ &\leq S(t)[r - (\frac{r}{K} + \beta)(I^*(t) - \varepsilon_1) - \frac{a(y^*(t) - \varepsilon_1)}{1+\omega K}]. \end{aligned}$$

从以上不等式, 得到

$$S(t) \leq S(n_2\tau)e^{\int_{n_2\tau}^t [r - (\frac{r}{K} + \beta)(I^*(t) - \varepsilon_1) - \frac{a(y^*(t) - \varepsilon_1)}{1+\omega K}]dt} \leq S(n_2\tau)e^{k\sigma},$$

这里 $t \in ((n_2+k)\tau, (n_2+k+1)\tau]$, $k \in Z_+$. 由于 $\sigma < 0$, 容易看出: 当 $k \rightarrow +\infty$ 时, $S(t) \rightarrow 0$. 因此, 对充分小的任意一个正常数 ε_2 ($\varepsilon_2 < \min\{\frac{d_1}{\beta}, \frac{d_2}{\delta a}\}$), 存在 $n_3 \in Z_+$ ($n_3 > n_2$) 使得对所有的 $t \geq n_3\tau$ 满足 $S(t) < \varepsilon_2$. 由此得到

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - d_1 I(t) \leq (\beta \varepsilon_2 - d_1)I(t).$$

由定理2.9 和引理5.2, 知道存在 $n_4 \in Z_+$ ($n_4 > n_3$) 使得

$$I(t) \leq I_1^*(t) + \varepsilon_1, \text{ 当 } t \geq n_4\tau \text{ 时}, \quad (5.7)$$

这里

$$I_1^*(t) = \begin{cases} I_1^* e^{-(d_1 - \beta \varepsilon_2)(t - n\tau)}, & t \in (n\tau, (n+1)\tau], \\ (I_1^* e^{-d_1\tau} + p) e^{-(d_1 - \beta \varepsilon_2)(t - (n+1)\tau)}, & t \in ((n+1)\tau, (n+2)\tau]. \end{cases}$$

通过类似的推导, 存在 $n_5 \in Z_+$ ($n_5 > n_4$) 使得

$$y(t) \leq y_1^*(t) + \varepsilon_1, \text{ 当 } t \geq n_5\tau \text{ 时}, \quad (5.8)$$

其中 $y_1^*(t) = \frac{qe^{-(d_2 - \delta a \varepsilon_2)(t - k\tau)}}{1 - e^{-(d_2 - \delta a \varepsilon_2)\tau}}$, $t \in (k\tau, (k+1)\tau]$, $k \in Z_+$. 注意到 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是充分小的正常数, 并且当 $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ 时, $I_1^*(t) \rightarrow I^*(t)$, $y_1^*(t) \rightarrow y^*(t)$. 根据(5.5) (5.6) (5.7) 和(5.8) 得到: 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $I(t) \rightarrow I^*(t)$, $y(t) \rightarrow y^*(t)$. 所以, 系统(5.1) 的害虫绝灭周期解 $(0, I^*(t), y^*(t))$ 是全局渐进稳定的. $\square$

推论 5.1 (1) 如果 $p = 0$, 定理5.3 的条件变为

$$q > \frac{r\tau d_2(1 + \omega K)}{a} \doteq q_0. \quad (5.9)$$

这就意味着如果只是周期释放天敌, 那么释放天敌的数量必须大于 q_0 才能保证害虫绝灭.

(2) 如果 $q = 0$, 定理5.3 的条件变为

$$p > \frac{r\tau d_1}{\beta + \frac{r}{K}} \doteq p_0, \quad (5.10)$$

这意味着如果只是周期释放染病的害虫, 那么释放染病害虫的数量必须大于 p_0 才能保证害虫绝灭.

定理 5.4 如果 $r\tau > (\frac{r}{K} + \beta)\frac{p}{d_1} + \frac{aq}{d_2}$, 则系统(5.1) 持续生存.

证明: 将分几部分来证明. 由引理5.1, 不失一般性, 为了后面的证明过程简单, 假设对所有的 $t \geq 0$ 有 $S(t), I(t), y(t) \leq M$.

步骤1. 证明 $I(t)$ 和 $y(t)$ 是一致最终有下界的.

首先, 从方程(5.5) 得到: 当 $t \geq n_1\tau$ 时, $I(t) \geq I^*(t) - \varepsilon_1 \geq I^*e^{-d_1 t\tau} - \varepsilon_1 \doteq m_1 > 0$.

其次, 从方程(5.6) 得到: 当 $t \geq n_2\tau$ 时, $y(t) \geq y^*(t) - \varepsilon_1 \geq y^*e^{-d_2 t\tau} - \varepsilon_1 \doteq m_2 > 0$.

因此, $I(t)$ 和 $y(t)$ 是一致最终有下界的。

步骤2. 证明 $S(t)$ 一致最终有下界。

由于 $r\tau > (\frac{r}{K} + \beta)\frac{p}{d_1} + \frac{aq}{d_2}$, 可以选取充分小的正常数 ε 和 m_3 使得

$$[r(1 - \frac{m_3}{K}) - (\frac{r}{K} + \beta)\varepsilon - a\varepsilon]\tau - [(\frac{r}{K} + \beta)\frac{p}{d_1 - \beta m_3} + a\frac{q}{d_2 - \delta a m_3}] \doteq \sigma_2 > 0.$$

可以断言: 对任意的 $N_1 \in Z_+$, $S(t) < m_3$ 不能对所有的 $t \geq N_1\tau$ 都成立. 否则, 存在一个 $N_1 \in Z_+$, 使得对所有的 $t \geq N_1\tau$ 都有 $S(t) < m_3$. 那么得到: 对所有的 $t \geq N_1\tau$ 都满足

$$\begin{aligned} I'(t) &= \beta S(t)I(t) - d_1 I(t) \leq (\beta m_3 - d_1)I(t), \\ y'(t) &= \frac{\delta a S(t)y(t)}{1 + \omega S(t)} - d_2 y(t) \leq (\delta a m_3 - d_2)y(t). \end{aligned}$$

由定理2.9 和引理5.2, 知道存在一个 $N_2 \in Z_+$ ($N_2 > N_1$) 使得: 当 $t \geq N_2\tau$ 时,

$$I(t) \leq I_2^*(t) + \varepsilon, \quad y(t) \leq y_2^*(t) + \varepsilon,$$

这里

$$I_2^*(t) = \begin{cases} I_2^*e^{-(d_1 - \beta m_3)(t - n\tau)}, & t \in (n\tau, (n+l)\tau], \\ (I_2^*e^{-d_1\tau} + p)e^{-(d_1 - \beta m_3)(t - (n+l)\tau)}, & t \in ((n+l)\tau, (n+1)\tau], \end{cases}$$

$$y_2^*(t) = y_2^*e^{-(d_2 - \delta a m_3)(t - n\tau)}$$

$$I_2^* = \frac{pe^{-(d_1 - \beta m_3)(1-l)\tau}}{1 - e^{-(d_1 - \beta m_3)\tau}},$$

$$y_2^* = \frac{q}{1 - e^{-(d_2 - \delta a m_3)\tau}}.$$

分别是系统(5.11) 和(5.12)的唯一正周期解。

$$\begin{cases} I'(t) = (\beta m_3 - d_1)I(t), & t \neq (n+l)\tau, t \neq n\tau, \\ \Delta I(t) = p, & t = (n+l)\tau, \\ \Delta I(t) = 0, & t = (n+1)\tau, \end{cases} \quad (5.11)$$

$$\begin{cases} y'(t) = (\delta am_3 - d_2)y(t), & t \neq (n+l)\tau, t \neq n\tau, \\ \Delta y(t) = 0, & t = (n+l)\tau, \\ \Delta y(t) = q, & t = (n+1)\tau, \end{cases} \quad (5.12)$$

由此得到,

$$\begin{aligned} S'(t) &= rS(t)\left(1 - \frac{S(t)+I(t)}{K}\right) - \beta S(t)I(t) - \frac{aS(t)y(t)}{1+\omega S(t)} \\ &\geq S(t)\left[r - \frac{rm_3}{K} - \left(\frac{r}{K} + \beta\right)(I_2^*(t) + \varepsilon) - a(y_2^*(t) + \varepsilon)\right]. \end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned} S((N_2+k)\tau) &\geq S(N_2\tau)e^{\int_{N_2\tau}^{(N_2+k)\tau} [r - \frac{rm_3}{K} - (\frac{r}{K} + \beta)(I_2^*(t) + \varepsilon) - a(y_2^*(t) + \varepsilon)] dt} \\ &\geq S(N_2\tau)e^{k\sigma_2}. \end{aligned}$$

容易得到: 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $S((N_2+k)\tau) \rightarrow +\infty$, 这是因为 $\sigma_2 > 0$. 这就与引理5.1 矛盾. 因此前面的断言是正确的, 也就是: 对任意的 $N_1 \in Z_+$, 至少存在一个 $t_1 \geq N_1\tau$ 使得 $S(t_1) \geq m_3$. 此时有两种情况:

情况1. 对所有的 $t \geq t_1$ 都满足 $S(t) \geq m_3$. 那么目的就达到了. 否则考虑下面一种情况.

情况2. 考虑离开并再次进入区域 $\Gamma = \{(S(t), I(t), y(t)) \in R_+^3 : S(t) < m_3\}$ 的解. 令 $t^* = \inf_{t \geq t_1} \{S(t) < m_3\}$. 则 $S(t) \geq m_3, t \in [t_1, t^*]$ 并且 $S(t^*) = m_3$, 这是由于 $S(t)$ 是连续的. 假设 $t^* \in (N_3\tau, (N_3+1)\tau]$, $N_3 \in Z_+$. 选取 $N_4, N_5 \in Z_+$ 使得

$$N_4\tau > \max\left\{\frac{-\ln \frac{\varepsilon}{2M}}{d_1 - \beta m_3}, \frac{-\ln \frac{\varepsilon}{2M}}{d_2 - \delta am_3}\right\},$$

$$N_5\sigma_2 > (N_4+1)\rho\tau,$$

$$\rho = \left(\frac{r}{K} + \beta + a\right)M.$$

记 $T = (N_4 + N_5)\tau$. 可以 $S(t) < m_3$ 不能对所有的 $t \in [(N_3+1)\tau, (N_3+1)\tau + T]$ 都成立. 否则, 对所有的 $t \in [(N_3+1)\tau, (N_3+1)\tau + T]$ 都有 $S(t) < m_3$. 那么对所有的 $t \in [(N_3+1)\tau, (N_3+1)\tau + T]$ 就有

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - d_1 I(t) \leq (\beta m_3 - d_1)I(t).$$

考虑下面的具有初始条件 $u((N_3+1)\tau^+) = I((N_3+1)\tau^+)$ 的系统.

$$\begin{cases} u'(t) = (\beta m_3 - d_1)u(t), & t \neq n\tau, n = N_3+1, N_3+2, \dots, \\ u(n\tau^+) = u(n\tau^-) + p, & t = n\tau, n = N_3+1, N_3+2, \dots \end{cases} \quad (5.13)$$

显然, 系统(5.13) 的解是

$$u(t) = I_2^*(t) + (u((N_3 + 1)\tau^+) - I_2^*)e^{-(d_1 - \beta m_3)(t - (N_3 + 1)\tau)}.$$

并且对所有的 $t \in [(N_3 + N_4 + 1)\tau, (N_3 + 1)\tau + T]$ 都有

$$|u(t) - I_2^*(t)| \leq 2Me^{-(d_1 - \beta m_3)(t - (N_3 + 1)\tau)} < \varepsilon.$$

因此由定理2.9 得到: 对所有的 $t \in [(N_3 + N_4 + 1)\tau, (N_3 + 1)\tau + T]$ 都有

$$I(t) \leq u(t) \leq I_2^*(t) + \varepsilon. \quad (5.14)$$

类似的, 得到: 对所有的 $t \in [(N_3 + N_4 + 1)\tau, (N_3 + 1)\tau + T]$ 都有

$$y(t) \leq y_2^*(t) + \varepsilon. \quad (5.15)$$

因此, 对所有的 $t \in [(N_3 + N_4 + 1)\tau, (N_3 + 1)\tau + T]$ 都有

$$\begin{aligned} S'(t) &= rS(t)(1 - \frac{S(t) + I(t)}{K}) - \beta S(t)I(t) - \frac{aS(t)y(t)}{1 + \omega S(t)} \\ &\geq S(t)[r - \frac{rm_3}{K} - (\frac{r}{K} + \beta)(I_2^*(t) + \varepsilon) - a(y_2^*(t) + \varepsilon)]. \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} S((N_3 + 1)\tau + T) &\geq S((N_3 + N_4 + 1)\tau)e^{\int_{(N_3 + N_4 + 1)\tau}^{(N_3 + 1)\tau + T} [r - \frac{rm_3}{K} - (\frac{r}{K} + \beta)(I_2^*(t) + \varepsilon) - a(y_2^*(t) + \varepsilon)] dt} \\ &\geq S((N_3 + N_4 + 1)\tau)e^{N_5\sigma_2}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

在区间 $t \in [N_3\tau, (N_3 + N_4 + 1)\tau]$, 有

$$\begin{aligned} S'(t) &= rS(t)(1 - \frac{S(t) + I(t)}{K}) - \beta S(t)I(t) - \frac{aS(t)y(t)}{1 + \omega S(t)} \\ &\geq -[\frac{r}{K} + \beta + a]MS(t) = -\rho S(t) \end{aligned} \quad (5.17)$$

和

$$\begin{aligned} S((N_3 + N_4 + 1)\tau) &\geq S(N_3\tau)e^{\int_{N_3\tau}^{(N_3 + N_4 + 1)\tau} (-\rho) dt} \\ &\geq S(N_3\tau)e^{-(N_4 + 1)\tau\rho}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

从(5.16) 和(5.18) 得到

$$S((N_3 + 1)\tau + T) \geq S(N_3\tau)e^{-(N_4 + 1)\tau\rho}e^{N_5\sigma_2} \geq m_3e^{N_5\sigma_2 - (N_4 + 1)\tau\rho}.$$

由 $N_5\sigma_2 > (N_4 + 1)\rho\tau$, 得到 $S((N_3 + 1)\tau + T) \geq m_3$, 这是一个矛盾. 因此, 至少存在一个 $t_2 \in [(N_3 + 1)\tau, (N_3 + 1)\tau + T]$ 使得 $S(t_2) \geq m_3$. 所以, 对于 $t \in [t_1, t_2]$, 满足 $S(t) \geq$

$m_3 e^{\rho(t_2 - N_3 \tau)} \doteq m_4$. 当 $t > t_2$ 时, 因为 $S(t_2) \geq m_3$, 故类似的讨论可以继续. 这就证明了 $S(t)$ 是一致最终有界的.

步骤3. 记 $m = \min\{m_1, m_2, m_4\}$, $D = \{R_+^3 : m \leq S(t), I(t), y(t) \leq M\}$. 根据步骤1, 步骤2 和引理5.1, 知道系统(5.1) 的每个具有正初始条件的解最终将进入并保留在区域 D . 由定义2.11 知道系统(5.1) 是持续生存的. $\square$

推论 5.2 (1) 如果 $p = 0$, 则定理5.4 的条件变为

$$q < \frac{r\tau d_2}{a} \doteq q_1, \quad (5.19)$$

这就意味着如果只是周期释放天敌, 并且释放天敌的数量少于 q_1 , 则系统(5.1) 是持续生存的, 从而害虫不能绝灭.

(2) 如果 $q = 0$, 则定理5.4 的条件变为

$$p < \frac{r\tau d_1}{\beta + \frac{r}{K}} = p_0, \quad (5.20)$$

这就意味着如果只是周期释放染病虫害, 并且释放染病虫害的数量少于 p_0 , 则系统(5.1) 是持续生存的, 从而害虫不能绝灭.

5.5 讨论

本章建立并研究了一个食饵染病的捕食模型以及在害虫综合治理中的应用. 定理5.3 得到了易感害虫绝灭周期解的全局稳定的充分条件, 也就是: 如果释放染病虫害和天敌的数量大于某一值, 则易感害虫将会绝灭. 定理5.4 得到了系统(5.1) 持续生存的充分条件, 这就意味着: 如果释放天敌和染病虫害的数量少于另外一个临界值, 则害虫和天敌可以持续生存. 推论5.1 说明了如果只是采取一种策略, 也就是: 或者只释放天敌, 或者只释放染病虫害, 那么释放的数量必须满足方程(5.9) 或方程(5.10). 显然, 本章的结果表明了综合治理害虫的策略比单一的释放天敌或者释放染病虫害更有效. 因此, 本章提出了一种更优的害虫治理策略. 本章的模型假设天敌和染病虫害在不同时刻释放. 在另外一篇文章中, 考虑了具有一个脉冲的相同模型, 也就是, 染病虫害和天敌在相同时刻释放. 一个有趣的结果是: 得到了相似的结论, 而这个结论与直观不符. 事实上, 由定理5.3 和定理5.4, 可以看到系统(5.1) 的易感害虫绝灭周期解全局稳定的条件以及系统(5.1) 持续生存的条件与参数 l 无关, 这意味着可以任意的选取 l ($0 < l < 1$). 这个结果是非常重要的因为在现实生活中不能保证每次在相同的时刻释放天敌和染病虫害. 在实践中, 染病虫害和天敌可能在不同时刻释放. 有时候先释放染病虫害; 有时候, 先释放天敌. 定理5.3 的结论保证了不管先释放染病虫害还是先释放天敌都可以保证达到控制害虫的目的. 因此, 本章的结论是有用的.

结 论

本文根据种群动力学和脉冲微分方程的基本理论研究具有阶段结构和脉冲效应的种群模型,特别是研究了具有阶段结构的两种群捕食模型以及在害虫管理中的应用.所取得的主要结果概括如下:

1. 第三章讨论了两个具有阶段结构的单种群模型.第一节研究幼年染病的具有阶段结构和时滞的单种群模型.所考虑的种群具有两个年龄阶段,幼年期和成年期,并且从幼年到成年的平均成熟期为一个常数,在模型中用时滞来表示.在幼年种群中存在流行病,并且这个流行病只在幼年种群中传播.讨论了几个平衡点的存在性和稳定性,并且研究了时滞对模型动力学行为的影响.第二节研究具有阶段结构和脉冲的单种群SI流行病模型.为了控制害虫的数量,在固定时刻脉冲式投放染病的害虫,从而让流行病在害虫种群中传播以达到控制害虫数量的目的,因为染病害虫是不危害农作物的.得到了易感害虫绝灭周期解的存在性和全局渐进稳定性条件,也得到了系统持久的充分条件.为利用流行病控制害虫提供了理论依据.

2. 第四章讨论了两个具有阶段结构的两种群捕食模型.第一节研究了一个食饵具有阶段结构的Lotka-Volterra 捕食模型.假设食饵分为两个年龄阶段,幼年卵和成虫;捕食者种群不分年龄,并且只捕食成年食饵,因为幼年食饵被它们的卵壳所保护.定期的投放天敌达到控制害虫的目的,捕食功能函数是最基本的Lotka-Volterra型.得到了害虫绝灭周期解局部稳定和全局稳定的充分条件;也得到了系统持久的充分条件,也就是害虫没有被有效地控制的条件.得到的释放天敌的阈值为合理的利用天敌控制害虫提供了理论依据.第二节研究了食饵具有阶段结构的比率依赖捕食模型.在此模型中,仍然假设食饵分为两个年龄段,幼年卵和成虫;捕食者种群不分年龄,并且只捕食成年食饵,捕食功能函数是比率依赖的.研究结果表明:在特殊的情况下,无论投放多少天敌,都不能有效的控制害虫.这也揭示了比率依赖对模型动力学行为的影响,从而也解释了为什么有些害虫很难被控制住.

3. 第五章讨论了具有两次脉冲的食饵染病的捕食模型.假设食饵(害虫)种群分为两类:易感食饵(易感害虫)和染病食饵(染病害虫).染病害虫是不危害农作物的,所以为了控制食饵种群的数量,采取释放染病害虫和释放天敌(捕食者)相结合的方法.在某些固定时刻脉冲式的释放天敌,在另外一些固定时刻脉冲式的释放染病害虫.基于这些假设建立了具有两次脉冲的捕食模型.通过使用脉冲微分方程的Floquet 定理,小扰动方法以及比较技巧,研究了易感害虫绝灭周期解的全局渐进稳定性以及系统持久生存的条件.丰富了脉冲微分理论在种群模型中的应用.

鉴于作者的能力和时间的限制,以上工作仅仅是对这几个问题的初步探讨,还有许多工作有待进一步研究:

1. 在第三章的的第一节推论3.2(2)中,指出:当 $\tau \in (\tau_2, \tau_3)$ 时,没有研究系统的正平

衡点的存在性和稳定性. 由定理3.1和推论3.1知道, 当 $\tau \in (\tau_2, \tau_3)$ 时, P_0 和 P_1 是不稳定的, 此时 P_2 是否存在, 以及 P_2 的稳定性如何?

2. 在第三章的第二节, 当 $R_0 > 1$ 和 $\frac{b(1-e^{-a\tau})}{\beta} < p < (e^{a\tau} - 1)\frac{b}{\beta}$ 时系统的动力学行为如何?

3. 在第四章的第一节, 没有考虑当 $p_2 > p > p_3$ 时的情形, 此时是否存在非平凡周期解, 以及系统的动力学行为如何?

此外, 本文考虑的阶段结构模型总是假设只有食饵种群具有阶段结构, 以后还可以进一步考虑捕食者种群具有阶段结构的模型, 以及食饵种群和捕食者种群都具有阶段结构的模型.

参考文献

- [1] Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P S. Theory of Impulsive Differential Equations. Singapore: World scientific, 1989.
- [2] Bainov D D, Simeonov P S. Impulsive differential equations: Asymptotic properties of the solutions. Singapore: World Scientific, 1995.
- [3] Bainov D D, Simeonov P S. Impulsive Differential Equations: Stability Theory and Applications. Ellis Horwood: Chichester, 1989.
- [4] Ballinger G, Liu X. Existence and uniqueness results for impulsive delay differential equations. Dyn. Continuous Discrete Impulsive System, 1999, 5:267-270.
- [5] Liu X, Ballinger G. Existence and continuability of solutions for differential equations with delays and state dependent impulses. Nonlinear Analysis, 2002, 51: 633-647.
- [6] Bainov D D, Simeonov P S, Dishlie A B. Oscillatory of the solutions of a class of impulsive differential equations with a deviating argument. J. Appl. Math. Stochastic Anal., 1998, 11:95-102.
- [7] Berezensky L, Braverman E. Linearized oscillation theory for a nonlinear delay impulsive equations. J. Comput. and Appl. Math., 2003, 161: 477-495.
- [8] Chen M P, Yu J S, Shen J H. The persistence of nonoscillatory solutions of delay differential equations under impulsive perturbations. Comput. Math. Appl., 1994, 27: 1-6.
- [9] Yan J R. Oscillation of nonlinear delay impulsive differential equations and inequalities. J. Math. Anal. Appl., 2002, 265: 332-342.
- [10] Kulev G K, Bainov D D. On the asymptotic stability of systems with impulses by the direct method of Lyapunov. J. Math. Anal. Appl., 1989, 140(2): 324-340.
- [11] Pavidis T. Stability of systems described by differential equations containing impulses. IEEE, Trans. Automatic Control, 1967, AC-2: 43-45.
- [12] Simeonov P S, Bainov D D. Stability with respect to part of the variables in system with impulsive effect. J. Math. Anal. Appl., 1986, 117(1): 247-263.
- [13] Fu X L, Qi J G, Liu Y S. The existence of periodic orbits for nonlinear impulsive differential systems. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 1999, 4: 50-53.
- [14] Qi J G, Fu X L. Existence of limit cycle of impulsive differential equations with impulses at variable times. Nonlinear Analysis, 2001, 44: 345-353.
- [15] Lyapunov A M. Stability of Motion. New York: Academic Press, 1966.
- [16] Birkhoff G D. Dynamical systems. New York: American Mathematical Society. 1927.

- [17] MacKay R S, Meiss J D. Hamiltonian Dynamical Systems: A Reprint Selection. CRC Press, 1987.
- [18] Roger T. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. New York: Springer, 1997.
- [19] Smale S. Differentiable dynamical systems. Bulletin of the American Mathematical Society, 1967, 73: 747-817.
- [20] Bajaj A K. Resonant Parametric Perturbations of the Hopf Bifurcation. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1986, 115(1): 214-224.
- [21] Bajaj A K. Bifurcations in a Parametrically Excited Nonlinear Oscillator. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1987, 22(1): 47-59.
- [22] Lorenz E N. The Essence of Chaos. Seattle: University of Washington Press, 1993.
- [23] 叶彦谦. 多项式微分系统定性理论. 上海: 上海科学技术出版社, 1995.
- [24] 张芷芬. 关于方程 $\ddot{x} + \mu \sin x = 0$ 在 $|x| \leq n(n+1)$ 上恰好存在 n 个极限环的定理. 中国科学, 1980, 10(10): 941-948.
- [25] Ding Tongren, Iannacci R, Zanolin F. Existence and multiplicity results for periodic solutions of semilinear Duffing equations. Journal of differential equations, 1993, 105(2): 364-409.
- [26] 陈兰荪, 陈健. 非线性生物动力系统. 北京: 科学出版社, 1993.
- [27] Gao Caixia, Li Kezan, Feng Enmin. Nonlinear impulsive system of fed-batch culture in fermentative production and its properties. Chaos, Soliton and Fractals, 2006, 28: 271-277.
- [28] Lawrence C. Evans. Partial Differential Equations. New York: American Mathematical Society, 1998.
- [29] Bainov D D, Simeonov P S. Systems with Impulse Effect: Stability, Theory and Application. England: Ellis Horwood Limited, 1989.
- [30] Lakshmikantham V, Leela S, Kaul S. Comparison Principle for Impulsive Differential Equation with Variable Times and Stability Theory. Nonlinear Analysis, 1994, 22: 499-503.
- [31] Liu Xinzhi. Impulsive Stabilizability of Autonomous Systems. Journal of Mathematical Analysis and Application, 1997, 187: 17-39.
- [32] Ahmed N U. Some Remarks on the Dynamics of Impulsive Systems in Banach Spaces. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, 2001, 8: 261-274.
- [33] Ahmed N U, Teo K L, Hou S H. Nonlinear Impulsive Systems on Infinite Dimensional Spaces. Nonlinear Analysis, 2003, 54: 907-925.

- [34] Kaul S K, Liu Xinzhi. Generalized Variation of Parameters and Stability of Impulsive Systems. *Nonlinear Analysis*, 2000, 40: 295-307.
- [35] Cooke, Kroll J. The Existence of Periodic Solutions to Certain Impulsive Differential Equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 2002, 44(5-6): 667-676.
- [36] Guo Dajun, Liu Xinzhi. Multiple Positive Solutions of Boundary-value Problems for Impulsive Differential Equations. *Nonlinear Analysis*, 1995 25(4): 327-337.
- [37] Shen Jianhua. New Maximum Principles for First-order Impulsive Boundary Value Problems. *Applied Mathematics Letters*, 2003, 16(1): 105-112.
- [38] Luo Zhiguo, Shen Jianhua. Stability and Boundness for Impulsive Functional Differential Equations with Infinite Delays. *Nonlinear Analysis*, 2001, 46(4): 475-493.
- [39] Qi Jianggang, Fu Xilin. Existence of Limit Cycles of Impulsive Differential Equations with Impulsives at Variable Times. *Nonlinear Analysis*, 2001, 44(3): 345-353.
- [40] Yan Jurang. Oscillation of Nonlinear Delay Impulsive Differential Equations and Inequalities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2002, 265: 332-342.
- [41] Liu Xianning, Chen Lansun. Global Dynamical of the Period Logistic System with periodic Impulsive Perturbations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2004, 289(1): 279-291.
- [42] Jin Zhen, Ma Zhien, Han Maoan. The existence of periodic solutions of the n-species Lotka - Volterra competition systems with impulse. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004, 22(1): 181-188.
- [43] Zhang Xiaoying, Shuai Zhisheng, Wang Ke. Optimal Impulsive Harvesting Policy for Single Population. *Nonlinear Analysis*, 2003, 4: 639-651.
- [44] Abdelkader L, Ovide A. Nonlinear Mathematical Model of Pulsed-theraph of Heterogeneous Tumors. *Nonlinear Analysis*, 2001, 2: 455-465.
- [45] Davis P E, Myers K, Hoy J B. Biological control among vertebrates. Theory and practice of biological control. (Huffaker C B and Messenger P S, Editors). Plenum Press, New York, (1976).
- [46] Falcon L A. Problem associated with the use of arthropod viruses in pest control. *Annu. Rev. Entomol.* 21, 305-324, (1976).
- [47] Freedman H J, Graphical stability, enrichment, and pest control by a natural enemy. *Math. Biosci.*, 31, 207-225, (1976).
- [48] Goh B S. Management and analysis of biological populations. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam-Oxford-New York, (1980).
- [49] Mary L F and Robert V B. Introduction to intergrated pest management. Plenum Press, New York and London, (1981).

- [50] Van Lenteren J C and Woets J. Biological and integrated pest control in greenhouses. *Ann. Rev. Ent.* 239-250, (1988).
- [51] Van Lenteren J C. Integrated pest management in protected crops. Integrated pest management. (Dent, D., editor). Chapman & Hall, London, 1995.
- [52] Liu X N and Chen L S. Complex dynamics of Holling type II Lotka-Volterra predator-prey system with impulsive perturbations on the predator. *Chaos, Solitons & Fractals* 16, 311-320, (2003).
- [53] Liu B, Teng Z D, Chen L S. The effect of impulsive spraying pesticides on stage-structured population models with birth pulse. *J. Biological Systems*, Vol. 13, No. 1, 31-44, (2005).
- [54] Liu B, Chen L S, Zhang Y J. The dynamics of a prey-dependent consumption model concerning impulsive control strategy. *Appl. Math. Comp.* 169, 305-320, (2005).
- [55] Jiao Jianjun, Meng Xinzhu, Chen Lansun. Global attractivity and permanence of a stage-structured pest management SI model with time delay and diseased pest impulsive transmission. *Chaos, Solitons & Fractals*, Volume 38, Issue 3, November 2008, Pages 658-668.
- [56] Jiao Jianjun, Chen Lansun, Luo Guilie. An appropriate pest management SI model with biological and chemical control concern. *Applied Mathematics and Computation*, Volume 196, Issue 1, 15 February 2008, 285-293.
- [57] Jiao Jianjun, Pang Guoping, Chen Lansun, Luo Guilie. A delayed stage-structured predator - prey model with impulsive stocking on prey and continuous harvesting on predator. *Applied Mathematics and Computation*, Volume 195, Issue 1, 15 January 2008, 316-325.
- [58] Jiao Jianjun, Chen Lansun, Li Limei. Asymptotic behavior of solutions of second-order nonlinear impulsive differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Volume 337, Issue 1, 1 January 2008, 458-463.
- [59] Jiao Jianjun, Meng Xinzhu, Chen Lansun. A stage-structured Holling mass defence predator - prey model with impulsive perturbations on predators. *Applied Mathematics and Computation*, Volume 189, Issue 2, 15 June 2007, 1448-1458.
- [60] Meng Xinzhu, Jiao Jianjun, Chen Lansun. Global dynamics behaviors for a nonautonomous Lotka - Volterra almost periodic dispersal system with delays. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Volume 68, Issue 12, 15 June 2008, 3633-3645.
- [61] Meng Xinzhu, Jiao Jianjun, Chen Lansun. The dynamics of an age structured predator - prey model with disturbing pulse and time delays. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Volume 9, Issue 2, April 2008, 547-561.
- [62] Meng Xinzhu, Chen Lansun. Almost periodic solution of non-autonomous Lotka - Volterra predator - prey dispersal system with delays. *Journal of Theoretical Biology*, Volume 243, Issue 4, 21 December 2006, 562-574.

- [63] Zhang Hong, Jiao Jianjun, Chen Lansun. Pest management through continuous and impulsive control strategies. *BioSystems*, 90 (2007) 350 - 361.
- [64] Zhang Hong, Chen Lansun, J. Nieto Juan, A delayed epidemic model with stage-structure and pulses for pest management strategy. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Volume 9, Issue 4, September 2008, 1714-1726.
- [65] Zhang Hong, Georgescu Paul, Chen Lansun. On the impulsive controllability and bifurcation of a predator - pest model of IPM. *Biosystems*, Volume 93, Issue 3, September 2008, 151-171.
- [66] Georgescu Paul, Zhang Hong, Chen Lansun. Bifurcation of nontrivial periodic solutions for an impulsively controlled pest management model. *Applied Mathematics and Computation*, Volume 202, Issue 2, 15 August 2008, 675-687.
- [67] Zhang Hong, Chen Lansun, Zhu Rongping. Permanence and extinction of a periodic predator - prey delay system with functional response and stage structure for prey. *Applied Mathematics and Computation*, Volume 184, Issue 2, 15 January 2007, 931-944.
- [68] Aiello W G and Freedman H I. A time delay model of single-species growth with stage structure. *Math. Biosci.*, 1990, 101:139-153.
- [69] Aiello W G, Freedman H I and Wu J. Analysis of a model representing stage structured populations growth with state-dependent time delay. *SIAM J. Appl. Math.*, 1992, 52(3): 855-869.
- [70] Tang S Y and Chen L S. Multiple Attractors in stage-structured population models with birth pulses. *Bulletin of Mathematical Biology* 65 (2003) 479-495.
- [71] Xiao Y N and Chen L S. On an SIS epidemic model with stage structure. *J. Sys. Sci. Complexity*, 2003, 16(2): 275-288.
- [72] Xiao Y N and Chen L S. An SIS epidemic model with stage structure and a delay. *Acta Mathematicae Applicatae sinica, English Series* 2002, 18(1): 607-618.
- [73] Xiao Y N, Chen L S and Bosh F V D. Dynamical behavior for stage-structured *SIR* infectious disease model. *Nonlinear Analysis:RWA* 3 (2002) 175-190.
- [74] Lu Z H, Gang S J and Chen L S. Analysis of an *SI* epidemic with nonlinear transmission and stage structure. *Acta Mathematica Scientia* 4 (2003) 440-446.
- [75] Song X Y and Chen L S. Modeling and Analysis of a single-species system with stage structure and harvesting. *Math. and Comput. Modeling*, 2002, 36: 67-82.
- [76] Song X Y and Chen L S. Optimal harvesting policy and stability for single-species growth model with stage structure. *J. Sys. Sci. Complexity*, 2002. 15: 194-201.
- [77] Song X Y and Chen L S. Optimal harvesting and stability for a two species competitive system with stage structure. *Mathematical Biosciences*, 2001, 170(2):173-186.

- [78] Burges H D and Hussey N W(editors). Microbial control of insections and mites. Academic Press, New York, pp. 861, 1971.
- [79] Wickwire K. Mathematical models for the control of pests and infectious diseases: a survey. *Theor. Pop. Biol.* **8** (1977) 182-238.
- [80] Wang W, Shen J, Nieto J. Permanence and Periodic Solution of Predator-Prey System with Holling Type Functional Response and Impulses. *Discrete Dynamics in Nature and Society* (2007), Article ID 81756, 15 pages.
- [81] Wang W D and Chen L S. A predator-prey system with stage-structure for predator. *Computers Math. Applic.* **33** (1997) 83-91.
- [82] Liu S Q, Chen L S and Liu Z J. Extinction and permanence in nonautonomous competitive system with stage structure. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **274** (2002) 667-684.
- [83] Liu S Q, Chen L S and Agarwal R. Recent progress on stage-structured population dynamics. *Mathematical and Computer Modelling* **36** (2002) 1319-1360.
- [84] Arditi R and Saiah H. Empirical evidence of the role of heterogeneity in ratio-dependent consumption. *Ecology*, **73** (1992), 1544-1551.
- [85] Arditi R, Ginzburg L R and Akcakaya H R. Variation in plankton densities among lakes: a case for ratio-dependent models. *Americal Nature*, **138** (1991), 1287-1296.
- [86] Gutierrez A P. The physiological basis of ratio-dependent predator-prey theory: a methobolic pool model of Nicholson's blowflies as an example. *Ecology*, **73** (1992), 1552-1563.
- [87] Arditi R and Ginzburg L.R. Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence. *J. Theoretical Biol.* **139** (1989), 311-326.
- [88] Hanski I. The functional response of predator: worries about scale, *TREE*. **6** (1991), 141-142.
- [89] Ding X Q and Jiang J F. Multiple periodic solutions in delayed Gause-type ratio-dependent predator-prey systems with non-monotonic numerical responses. *Mathematical and Computer Modelling* **47** (2008) 1323-1331.
- [90] Xu R, Chaplain M A J and Davidson F A. Persistence and global stability of a ratio-dependent predator-prey model with stage structure. *Appl. Math. Comput.* **158** (2004) 729-744.
- [91] Wang Y M. Numerical solutions of a Michaelis-Menten type ratio-dependent predator-prey system with diffusion, *Applied Numerical Mathematics* (2008), doi:10.1016/j.apnum.2008.05.003.
- [92] Krisztina Kiss and Sándor Kovács. Qualitative behavior of n-dimensional ratio-dependent predator-prey systems. *Applied Mathematics and Computation* **199** (2008) 535-546.

- [93] Xiao Y N and Chen L S. A ratio-dependent predator-prey model with disease in the prey. *Applied Mathematics and Computation* **131** (2002), 397-414.
- [94] Song X Y, Cai L M and Neumann Avidan U. Ratio-dependent predator-prey system with stage structure for prey. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B (DCDS-B)* **4(3)** (2004) 747-758.
- [95] R. Xu and Z. Ma. Stability and Hopf bifurcation in a ratio-dependent predator-prey system with stage structure. *Chaos, Solitons & Fractals* **38** (2008) 669-684.
- [96] Song X Y and Chen L S. Optimal harvesting and stability for a predator-prey system with stage struture. *Acta Math. Appl. Sinica.* **18** (2002) 423-430.
- [97] Xiao Y N and Chen L S. Stabilizing effect of cannibalism on a structured competitive system. *Acta Mathematica* (in chinese), **22A(2)** (2002) 210-216.
- [98] McEwen F L and Stephenson R G. The use and significance of pesticides in the environment. New York: Wiley, 1979.
- [99] Phelps W. Pesticide environmental fate: bridging the gap between laboratory and field studies. USA: American Chemical Society, 2002.
- [100] Burges H D and Hussey N W. Microbial control of insects and mites. Academic Press, New York, (1971).
- [101] Davis P E, Myers K, Hoy J B. Biological control among vertebrates. Theory and practice of biological control. (Huffaker C B and Messenger P S, Editors). Plenum Press, New York, (1976).
- [102] Falcon L A. Problem associated with the use of arthropod viruses in pest control. *Annu. Rev. Entomol.* **21**, 305-324, (1976).
- [103] Tanada Y. Epizootiology of insect disease. Biological control of insect pests and weeds (DeBach P, editor). Chapman & Hall, London, (1964).
- [104] Van Lenteren J C. Measures of success in biological control of anthropoids by augmentation of natural enemies. *Measures of Success in Biological Control* (Wratten S, Gurr G, editors). Kluwer Academic Publishers, Dordrdcht. p.77-89, (2000).
- [105] Van Lenteren J C, Woets J, Biological and integrated pest control in greenhouses. *Ann. Rev. Ent.* **239-250**, (1988).
- [106] Grasman J, Van Herwarnden O A, Hemerik L, et al.. A two-component model of host-parasitoid interactions: determination of the size of inundative releases of parasitoids in biological pest control. *Math. Biosci.* **196**, 207-216, (2001).
- [107] Debach P, Rosen D. Biological control by natural enemies (second edition). Cambridge University Press, Cambridge, (1991).

- [108] Luff M L. The potential of predators for pest control. *Agri. Ecos. Environ.* 10, 159-181,(1983).
- [109] Cherry A J, Lomer, C J, Djegui D, Schulthess F. Pathogen incidence and their potential as microbial control agents in IPM of maize stemborers in West Africa. *Biocontrol* 44(a), 301-327,(1999).
- [110] Gao S J, Chen L S, Sun L H. Optimal pulse fishing policy in stage-structured models with birth pulses. *Chaos, Solitons & Fractals*, 25, 1209-1219, (2005).
- [111] Zhang Wei. Multiply methods for pest control. (in chinese)
<http://biological.aweb.com.cn/news/2007/9/12/10495060.shtml>, 2007-09-12.

攻读博士学位期间发表和完成的学术论文情况

- 1 Ruiqing Shi, Lansun Chen. Stage-structured impulsive SI model for pest management. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Volume 2007, Article ID 97608, 11 pages doi:10.1155/2007/97608. 主办单位: Hindawi. SCI 期刊. (本博士学位论文第三章§2)
- 2 Ruiqing Shi, Lansun Chen. Staged-structured Lotka-Volterra predator-prey models for pest management. *Applied Mathematics and Computation* 203 (2008) 258 - 265. 主办单位: Elsevier. SCI 期刊. (本博士论文第四章§1)
- 3 Ruiqing Shi, Lansun Chen. 幼年染病的具有阶段结构和时滞的单种群模型研究. *大连理工大学学报*(已接稿). 主办单位: 大连理工大学. EI检索期刊. (本博士论文第三章§1)
- 4 Ruiqing Shi, Lansun Chen. The study of a ratio-dependent predator-prey model with stage structure in the prey. (已投稿). (本博士论文第四章§2)
- 5 Ruiqing Shi, Lansun Chen. Qualitative analysis of a stage-structured *SI* model. *International Journal of Pure and Applied Mathematics* volume 41, No.1(2007).
- 6 Ruiqing Shi, Lansun Chen. A predator-prey model with disease in the prey and two impulses for integrated pest management. *Applied Mathematical Modeling* doi:10.1016/j.apm.2008.06.001(已经接稿). 主办单位: Elsevier. SCI 期刊. (本博士论文第五章)
- 7 Ruiqing Shi, Chunjin Wei, Liuquan Huang. An Optimal Strategy for Increasing Fish Production. *生物数学学报*2008, 23(3), 399-406. 中文核心期刊.
- 8 Ruiqing Shi, Lansun Chen. The asymptotic behavior of a delayed stage-structured model with a disease in the infant. (2008生物数学会年会会议论文).

创 新 点 摘 要

1. 在害虫综合管理的研究方面除了利用生物控制和化学控制相结合的办法,人们还利用传染病来控制害虫. 在第五章研究了利用染病虫害和释放天敌来控制害虫的具有两次脉冲的捕食模型. 假设在不同的固定时刻分别释放染病虫害和天敌. 得到的结果表明投放染病虫害和天敌的周期以及每次投放的数量对模型的动力学行为有重要的影响,但是在每次脉冲的周期内是先投放染病虫害还是先投放天敌对模型没有影响. 这个结论保证了在具体的害虫管理过程中可以根据具体情况先投放染病虫害,然后再投放天敌,或者反之也可以达到同样的目的. 这为农业上利用染病虫害和释放天敌来控制害虫提供了一些参考.

2. 在第四章的比率依赖模型中,引入了阶段结构. 已有的文献中有考虑捕食者(天敌)具有阶段结构,本文假设食饵(害虫)具有阶段结构,并且脉冲式的投放捕食者(天敌)以便达到控制食饵(害虫)的数量之目的. 研究结果表明: 在参数取某些特殊值的时候,无论投放多少捕食者(天敌)都不能有效的控制食饵(害虫)的数量. 这个结果也说明了比率依赖模型与普通的功能捕食反应模型具有很大的不同之处. 这个结果与自然界中的许多现象是符合的,而这反过来又表明本节所建立的比率依赖捕食模型是合适的,结论也是正确的.

3. 以往的单种群阶段结构模型在数学上是两维的,研究了幼年种群和成年种群的动力学行为. 本论文的第三章所研究的单种群模型中引入了流行病,研究了阶段结构对流行病发展趋势的影响. 研究的结果表明了如果从幼年到成年的成熟期很长的话(用一个时滞表示成熟期),将不利于种群持续生存,整个种群(包括幼年种群和成年种群)可能将因病而绝灭,或者种群产生地方病.

致 谢

首先,我要衷心地感谢导师陈兰荪教授.感谢他在学习上对我的谆谆教导以及在生活上对我的关心与帮助,使我不仅在专业知识方面取得了很大的提高,而且对邻近学科也有了相当的了解.特别是在论文的选题、数学思想方法和论文的最后整理都得到陈老师的精心指导.他那严谨的治学态度和渊博的学识深深地影响着我,使我受益终生.

感谢冯恩明教授,郑斯宁教授,王天明教授,于波教授,宋新宇教授,刘兵教授等对我论文的关心和帮助.感谢蔡晶老师及数学系各位老师,感谢研究生院各位老师,他们给我博士生期间的学习和生活创造了良好的条件.

感谢山西师范大学数计学院的领导和老师们在学业上和生活上对我的关心与支持.

感谢高淑京、谭远顺、刘志军、孙树林、孙明晶、庞国萍、孟新柱、焦建军、张弘、刘开源、郭红建、魏春金、赵中、李祖雄、王铁英、田园等各位师兄、师姐、师弟和师妹们的支持与帮助.

最后,我要感谢我的亲人和朋友们,感谢他们这些年来对我的理解、支持与鼓励,使我能够顺利完成学业.

值此论文定稿之际,谨在此向所有提到的和未提及的关心和帮助过我的老师、同学、朋友和家人致以最诚挚的谢意!

石瑞青

二零零八年九月于大连理工大学