第八章

多元函数微分学及其应用

一元函数微分学

$\downarrow$ 推广

多元函数微分学

注意：善于类比，区别异同

第一节

多元函数的基本概念

一、多元函数的概念

二、多元函数的极限

三、多元函数的连续性

一、基本概念

平面点集

坐标平面上具有某种性质 P 的点的集合，称为平面点集，记作

$$E = \{(x, y) \mid (x, y)\text{ 具有性质 } P\}$$

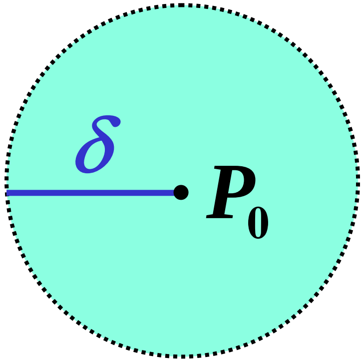
两点间的距离

设为 $M_1(x_1, y_1)$、$M_2(x_2, y_2)$平面上的两点，它们之间的距离记作$\rho(M_1, M_2)$

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

邻域

设 $P_0(x_0, y_0)$是 xoy平面上的一个点，δ是某一正数，与点 $P_0(x_0, y_0)$距离小于 δ的点 $P(x, y)$的全体，称为点 P_0的 δ邻域，记为 $U(P_0, \delta)$



$$U(P_0, \delta) = \{P \mid \rho(P, P_0) < \delta\}$$

$$= \{(x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$$

去心邻域

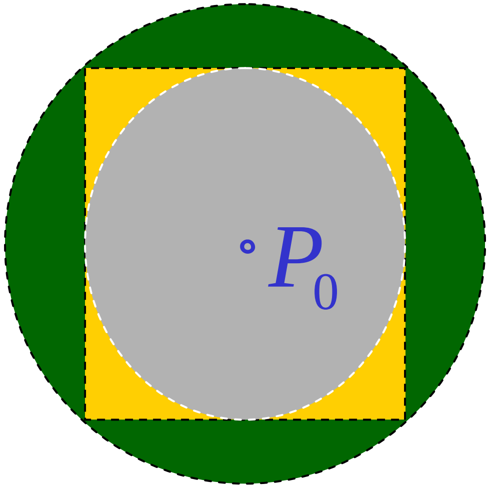
在$U(P_0,\delta)$中去掉点$P_0(x_0,y_0)$，称为点P_0的去心δ邻域，记为 $U^0(P_0,\delta)$

$$U^0(P_0,\delta)=\{P \mid 0<\rho(P,P_0)<\delta\}$$

$$=\{(x,y)\mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

若不需要强调邻域的半径，$U(P_0,\delta)$简记为$U(P_0)$，$U^0(P_0,\delta)$简记为 $U^0(P_0)$

在讨论实际问题中也常使用方邻域, 因为方邻域与圆邻域可以互相包含.



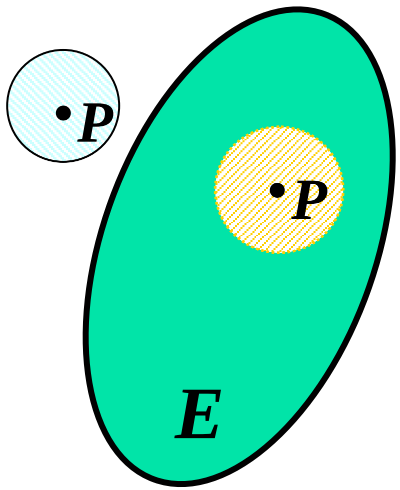
平面上的方邻域为

$$\mathrm{U}(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid |x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta\}$$

内点

设 E 是平面上的一个点集， P 是平面上的一个点. 如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)\subset E$，则称 P 为 E 的内点.

E 的内点属于 E.



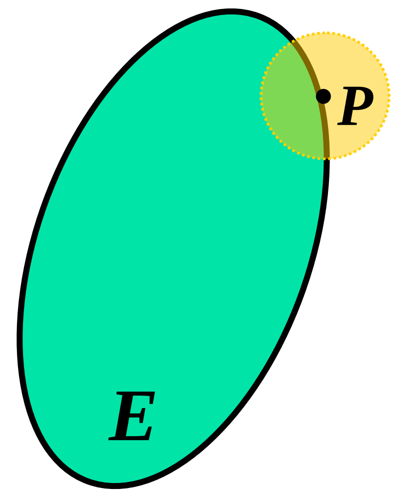
外点

如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)$, 使得 $U(P)\cap E=\Phi$, 则称 P 为 E 的外点.

E 的外点属不于 E.

边界点

如果点 P 的任一个邻域内既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点（点 P 本身可以属于 E，也可以不属于 E），则称 P 为 E 的边界点.



E 的边界点的全体称为 E 的边界，记为 ∂E

开集： 如果点集 E 的点都是内点，则称 E 为开集.

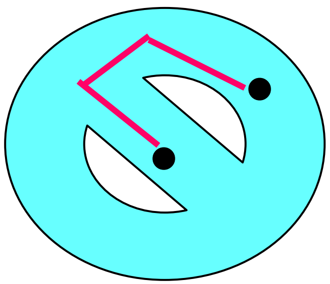
例如 $E_1=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$ 即为开集.

闭集： 如果点集 E 包含它的所有边界点，则称 E 为闭集.

例如 $E_1=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 4\}$ 即为闭集.

连通集：

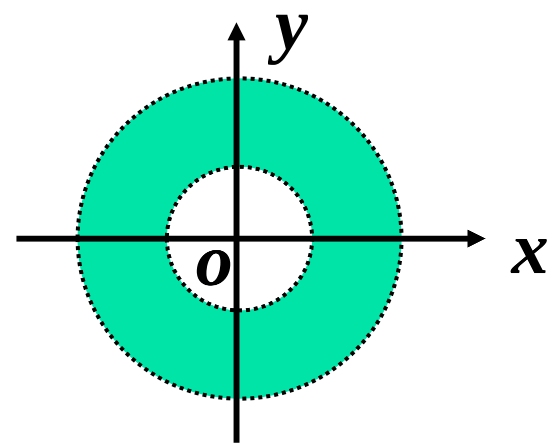
设 E 是点集. 如果 E 内的任何两点都可用折线连结起来，且该折线上的点都属于 E，则称该点集 E 是连通的.



（开）区域

连通的开集称为区域或开区域.

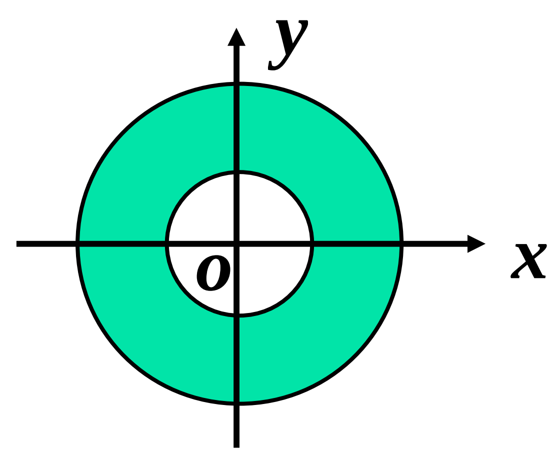
例如 $\{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.



闭区域

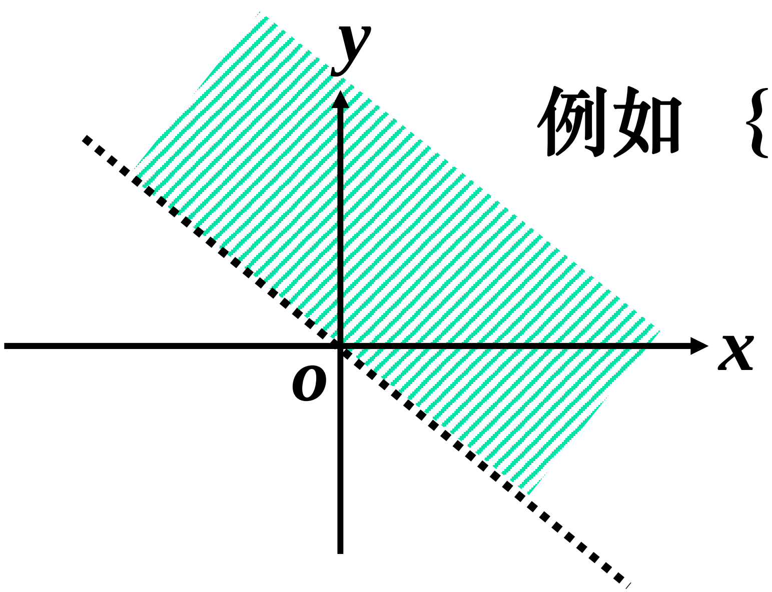
开区域连同它的边界一起称为闭区域.

例如 $\{(x,y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$.



有界集和无界集

设 E 是一点集，A是一定点。如果存在正数 K，使得对于任意的点 $P \in E$，都有 $\rho(A,P) \le K$，则称 E 为有界点集，否则称为无界点集.



例如 $\{(x,y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$

有界闭区域;

$\{(x,y) \mid x + y > 0\}$

无界开区域.

n 维空间

设 n为取定的一个自然数，我们称 n元数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的全体为 n维空间，而每个 n 元数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$称为 n维空间中的一个点，数 x_i 称为该点的第 i个坐标.

当所有坐标 $x_k = 0$时，称该元素为 n 为空间中的零元，记作 $\mathbf{0}$.

说明：

- n 维空间的记号为 R^n;

n 维空间中两点间的距离

设两点为 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$Q(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，

$$\rho(P, Q) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}.$$

特殊地当 $n = 1, 2, 3$ 时，便为数轴、平面、空间两点间的距离.

n 维空间中邻域、区域等概念

邻域： $U(P_0, \delta) = \left\{ P \middle| \rho(P, P_0) < \delta, P \in R^n \right\}$

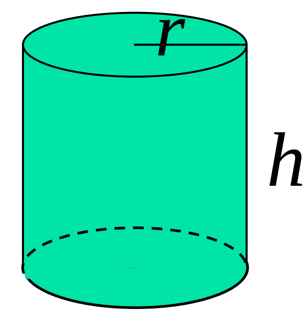
内点、边界点、区域等概念也可类似定义.

二、多元函数的概念

引例:

- 圆柱体的体积

$$V = \pi r^2 h, \qquad \{(r,h) \mid r>0, h>0\}$$



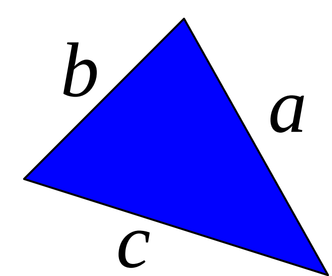
- 定量理想气体的压强

$$p = \frac{RT}{V} \ (R\text{为常数}), \qquad \{(V,T) \mid V>0, T>T_0\}$$

- 三角形面积的海伦公式 $\left(p = \frac{a+b+c}{2}\right)$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\{(a,b,c) \mid a>0, b>0, c>0, a+b>c\}$$



定义1. 设非空点集$D \subset \mathbf{R}^n$, 映射 $f: D \mapsto \mathbf{R}$ 称为定义在 D 上的 **n 元函数**，记作

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ 或 } u = f(P), P \in D$$

点集 D 称为函数的**定义域**；数集 $\{u \mid u = f(P), P \in D\}$ 称为函数的**值域**.

特别地，当 $n = 2$ 时, 有二元函数

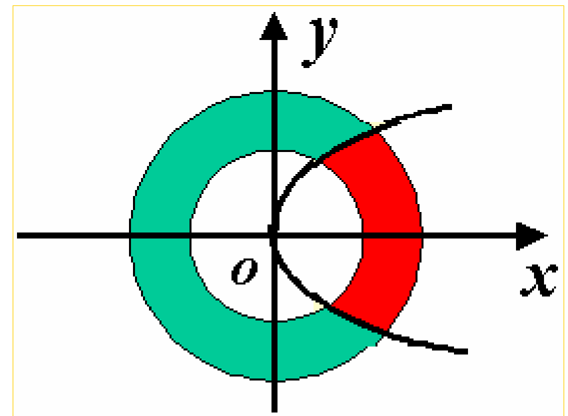
$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2$$

当 $n = 3$ 时，有三元函数

$$u = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D \subset \mathbf{R}^3$$

例1 求 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的定义域.

解 $\begin{cases} |3-x^2-y^2|\le 1 \\ x-y^2>0 \end{cases}$



$\Rightarrow \begin{cases} 2\le x^2+y^2\le 4 \\ x>y^2 \end{cases}$

所求定义域为 $D=\{(x,y)\,|\,2\le x^2+y^2\le 4,\ x>y^2\}$.

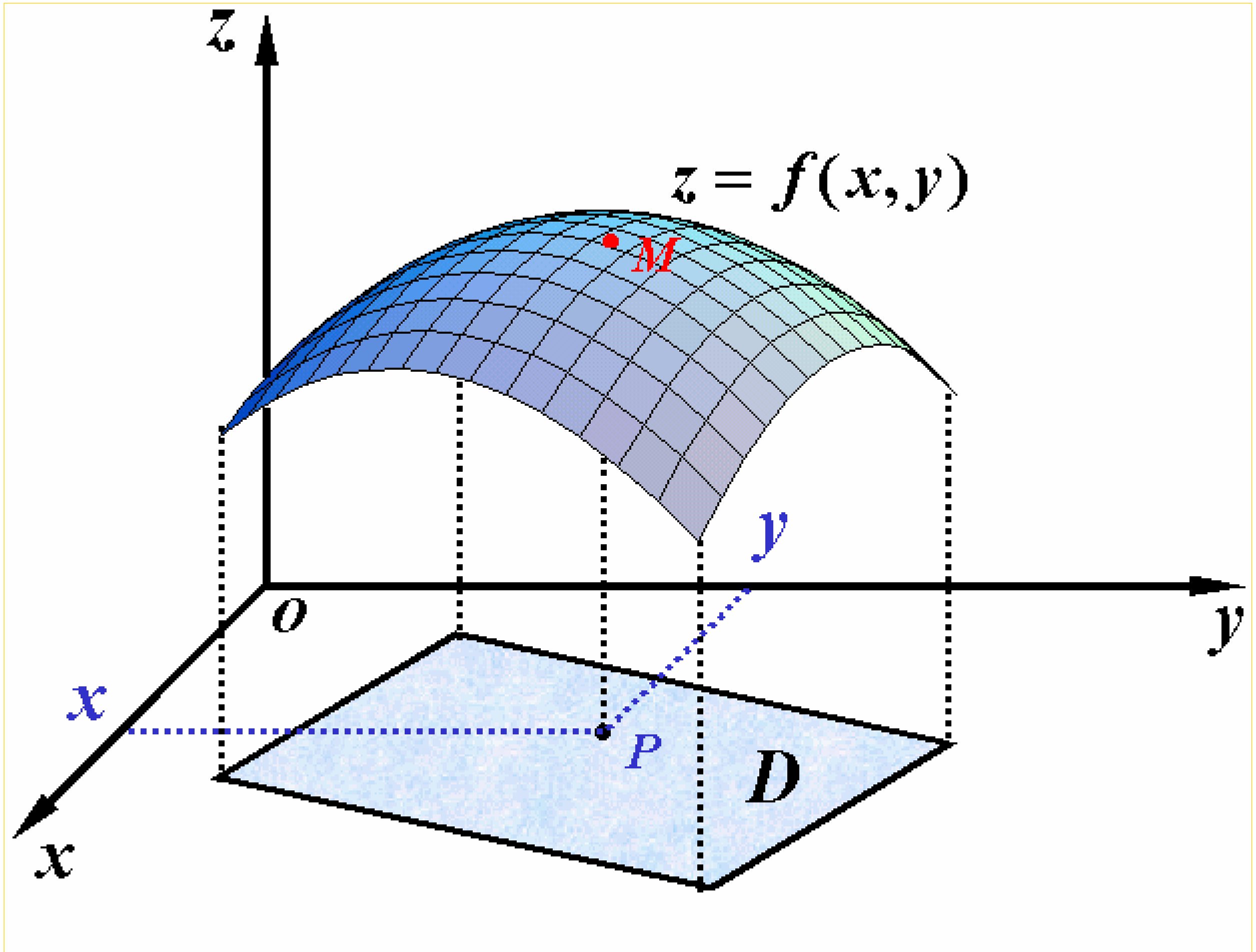
二元函数 $z = f(x,y)$ 的图形

设函数 $z = f(x,y)$ 的定义域为 D，对于任意取定的 $P(x,y) \in D$，对应的函数值为 $z = f(x,y)$，这样，以 x 为横坐标、y 为纵坐标、z 为竖坐标在空间就确定一点 $M(x,y,z)$，当 (x,y) 取遍 D 上一切点时，得一个空间点集

$$\{(x,y,z) \mid z = f(x,y), (x,y) \in D\},$$

这个点集称为二元函数的图形.

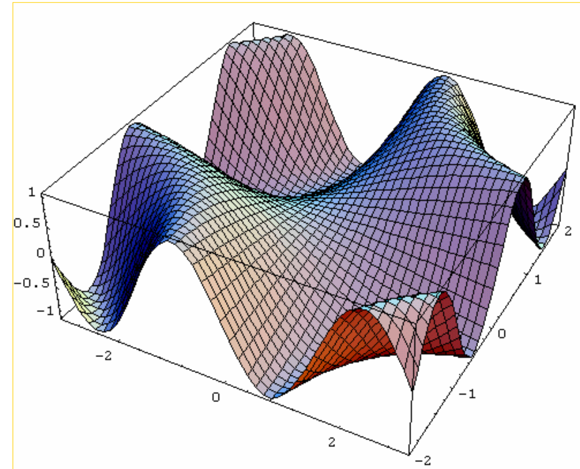
(如下页图)



二元函数的图形通常是一张曲面.

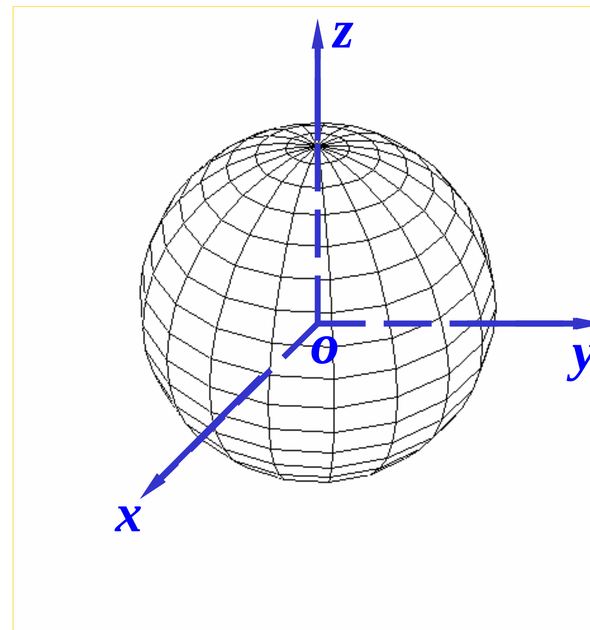
例如 $z = \sin xy$

图形如右图.



例如 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

右图球面.



$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le a^2\}.$$

单值分支: $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

$$z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

三、多元函数的极限

定义 1 设函数$z = f(x, y)$在$P_0(x_0, y_0)$的某个去心邻域内有定义，A是常数。如果对于任意给定的正数ε，总存在正数 δ，使得当 $0 < \rho(P, P_0) < \delta$时，即$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$时，恒有

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

成立，则称A为函数$z = f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$处的极限，记为

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$$

或 $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = A$，或 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A$

定义 1′ 设函数$z=f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$的某个去新邻域内有定义，A是常数。如果对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得当$|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$且$(x,y)\neq(x_0,y_0)$时，恒有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，则称A为函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处的极限，记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

或 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$，或 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$

说明：

（1）定义1和定义 $1'$ 是等价的；

（2）二元函数的极限也叫二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y)$；

（3）二元函数极限的基本性质与一元函数极限的性质类似，不再赘述。

（4）定义中 $P \to P_0$ 的方式是任意的；

例1. 二重极限存在的例子

$$z = x^2 + y^2 + 1$$

在平面上的(0,0)点处

有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2 + y^2 + 1) = 1$

(和的极限等于极限的和)

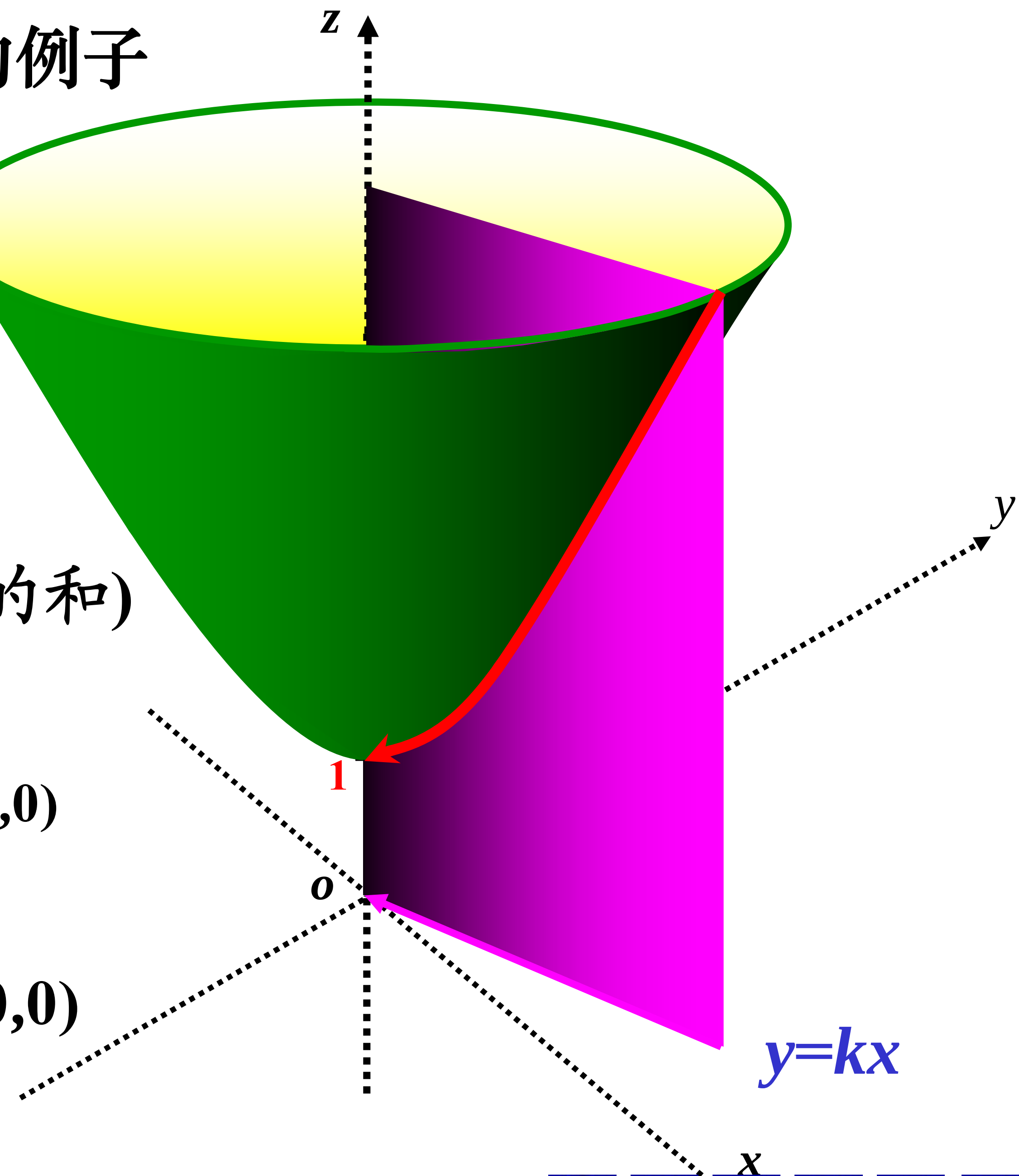
故：在 xoy 平面上

点 $(x,y) \xrightarrow{\text{以任何方式}} (0,0)$

都有 $z \to 1$

例如：$(x,y) \xrightarrow{\text{沿 } y=kx} (0,0)$

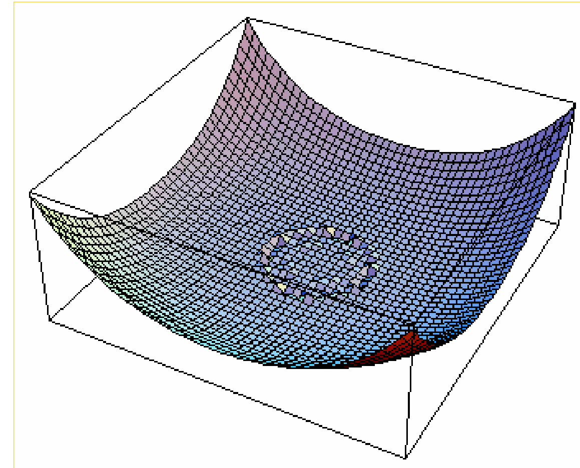
有 $z \to 1$



机动 目录 上页 下页 返回 结束

例2 求证

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$$



证 $\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|$

$$=\left|x^2+y^2\right|\cdot\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\le x^2+y^2$$

$\forall\,\varepsilon>0,\quad \exists\,\delta=\sqrt{\varepsilon},$

当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时，

$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$ 原结论成立.

例3 求证 $\lim\limits_{x\to0,y\to0}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$

证 $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le|y|\qquad\left(\text{或}\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le\dfrac{1}{2}|x|\right)$

$\forall\varepsilon>0,\quad\exists\delta=\varepsilon$, 当 $|x|<\delta,|y|<\delta$ 时

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le|y|<\varepsilon$$

例4: 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$

解 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2e^{-x}e^{-y})+\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(y^2e^{-x}e^{-y})$$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}x^2e^{-x}\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}e^{-y}+\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}y^2e^{-y}\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}e^{-x}$$

$$=0$$

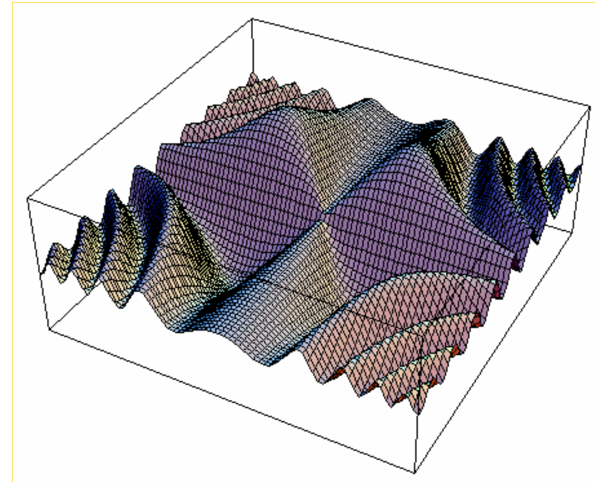
例5 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解1 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \dfrac{1}{2}$.

解2 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, $\sqrt{xy+1}-1 \sim \dfrac{1}{2}xy$,

$$\therefore \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy} = \frac{1}{2}$$

例6 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2}$.



解 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时

$$\sin(x^2 y) \sim x^2 y$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^2+y^2},$$

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{2}|x| \xrightarrow{x\to 0} 0, \qquad \therefore \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2} = 0.$$

例7. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$

此函数定义域不包括 x , y 轴

解1: 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时

$$1-\cos(x^2+y^2)\sim\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2$$

则 $$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)x^2y^2}$$

$$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{2x^2y^2}\ge\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{2x^2y^2}=\infty$$

故 $$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}=\infty$$

例7. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$

此函数定义域不包括 x , y 轴

解2: 因 $x^2y^2 \le \dfrac{1}{4}(x^2+y^2)^2$, 令 $r^2 = x^2+y^2$, 则

$$\left| \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2} \right| \ge \frac{4(1-\cos r^2)}{r^6}$$

而 $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{4(1-\cos r^2)}{r^6} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{2r^4}{r^6} = \infty$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2} = \infty$

$1-\cos r^2 \sim \dfrac{r^2}{2}$

证明极限不存在的方法：

（1）找一条特殊路径，使得点 $P(x,y)$ 沿此路径趋向于$P_0(x_0,y_0)$时，$f(x,y)$的极限不存在，则可断言$f(x,y)$的极限不存在。

（2）找两种不同趋近方式，使 $\lim\limits_{x\to x_0,y\to y_0} f(x,y)$存在，但两者不相等，此时可断言$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处极限不存在.

例： 令点 $P(x,y)$ 沿 $y=kx$ 趋向于$P_0(x_0,y_0)$，若极限值与k有关，则可断言极限不存在；

例 8: 证明 $f(x,y)=\sin\frac{y}{x^2}$ 在点(0,0)处的极限不存在。

证明 取 $y=x$，则

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\sin\frac{y}{x^2}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

极限不存在，故 $f(x,y)$ 在点(0,0)处的极限不存在。

例 9：证明 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点（0，0）处的极限不存在。

证明　取 $y=kx$，则

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

极限值与 k 有关，故 $f(x,y)$ 在点 (0，0) 处的极限不存在。

例9. 二重极限不存在的例子

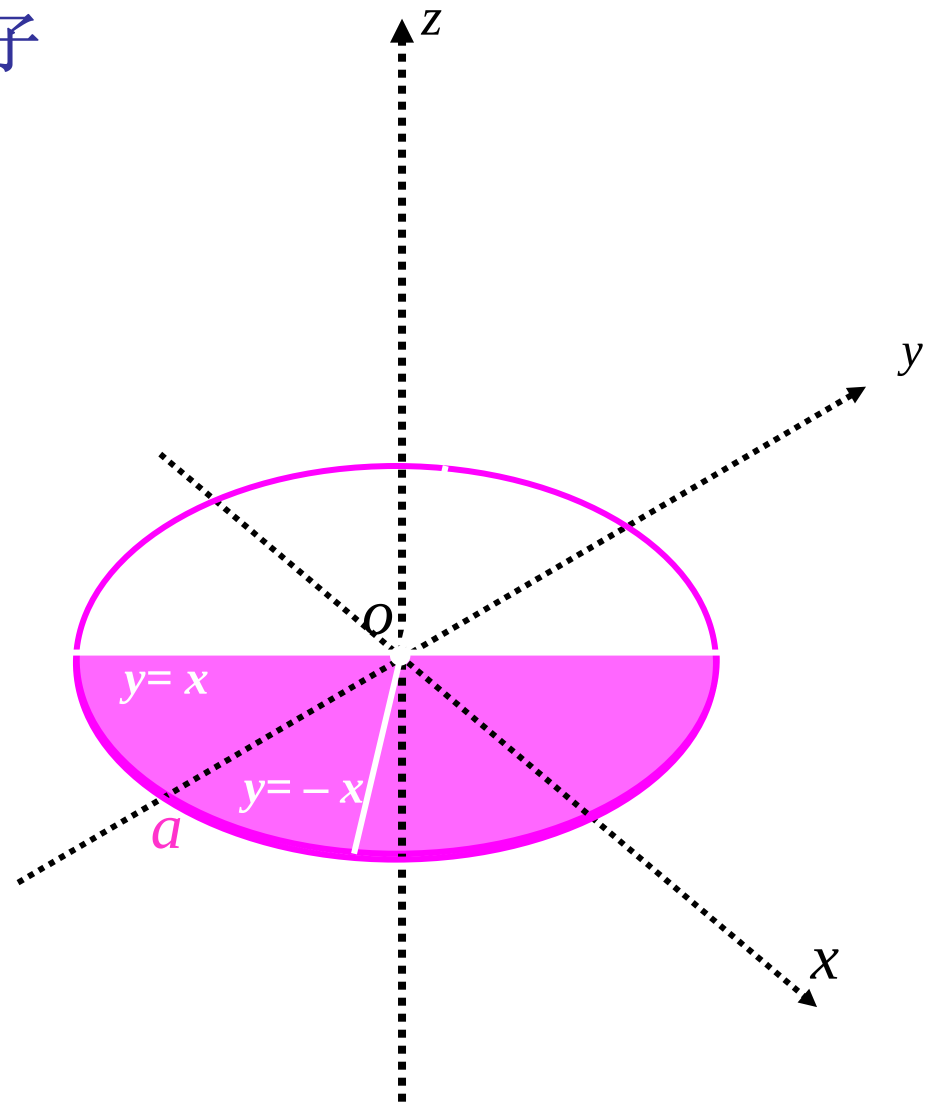
$$z = \frac{xy}{x^2 + y^2} \qquad (x, y) \neq (0,0)$$

点 $P(x, y)$ 沿直线 $y = kx$

$\to (0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y=kx\to 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{k}{1 + k^2}$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x, y)$ 不存在



那么，曲面在点(0,0)附近的形状是怎样的呢？

曲面与z轴无交点;

曲面关于平面 $y=x$ 对称;

曲面关于平面 $y=-x$ 对称;

例9. 二重极限不存在的例子

$$z=\frac{xy}{x^2+y^2},\ (x,y)\neq(0,0)$$

点$P(x,y)$沿直线 $y=kx$

$\to(0,0)$时，有

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y=kx\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

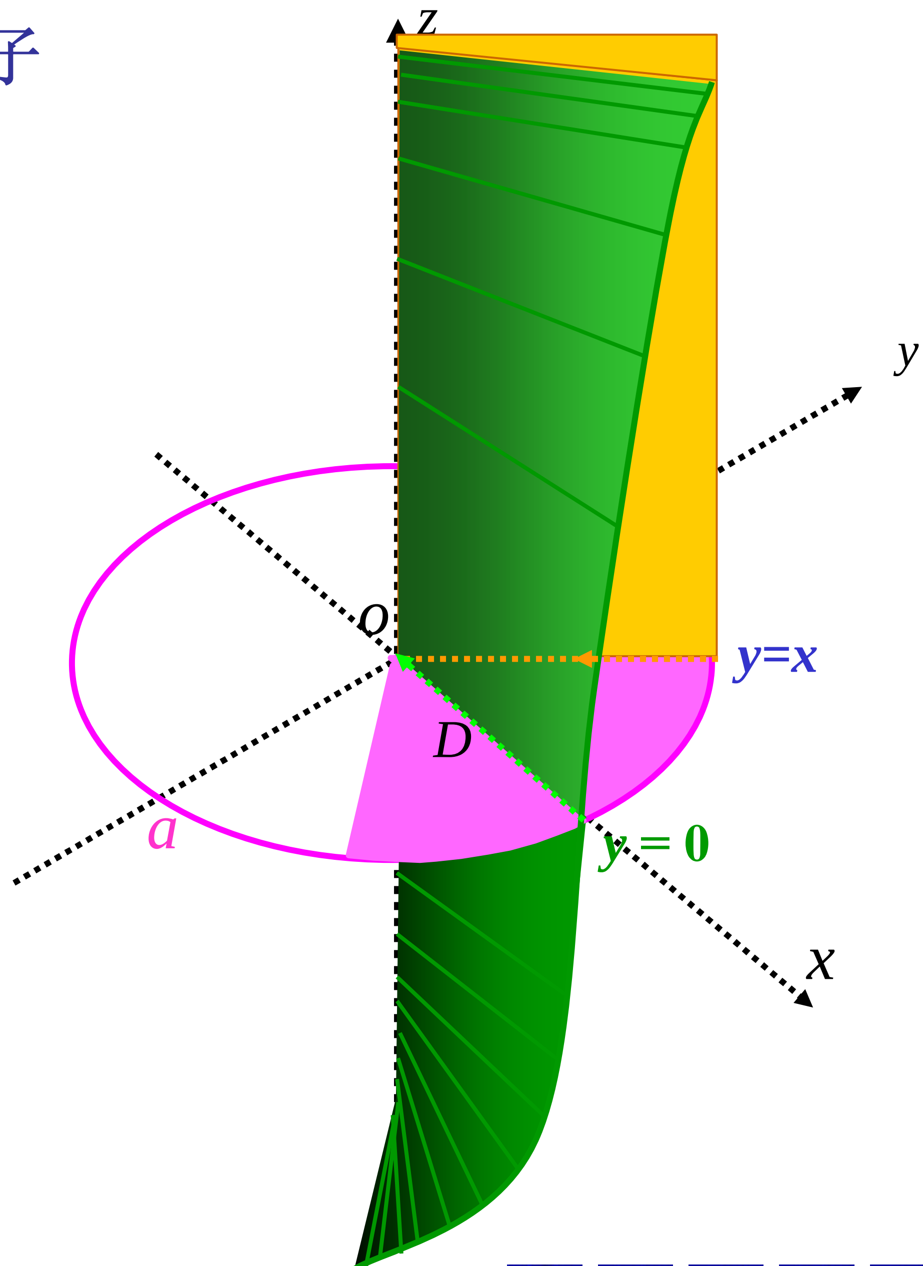
故$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}f(x,y)$不存在

那么，曲面在点(0,0)附近的形状是怎样的呢？

曲面与z轴无交点;

曲面关于平面 $y=x$对称;

曲面关于平面 $y=-x$对称;



例9. 二重极限不存在的例子

$$z=\frac{xy}{x^2+y^2},\ (x,y)\neq(0,0)$$

点$P(x,y)$沿直线 $y=kx$

$\to(0,0)$时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

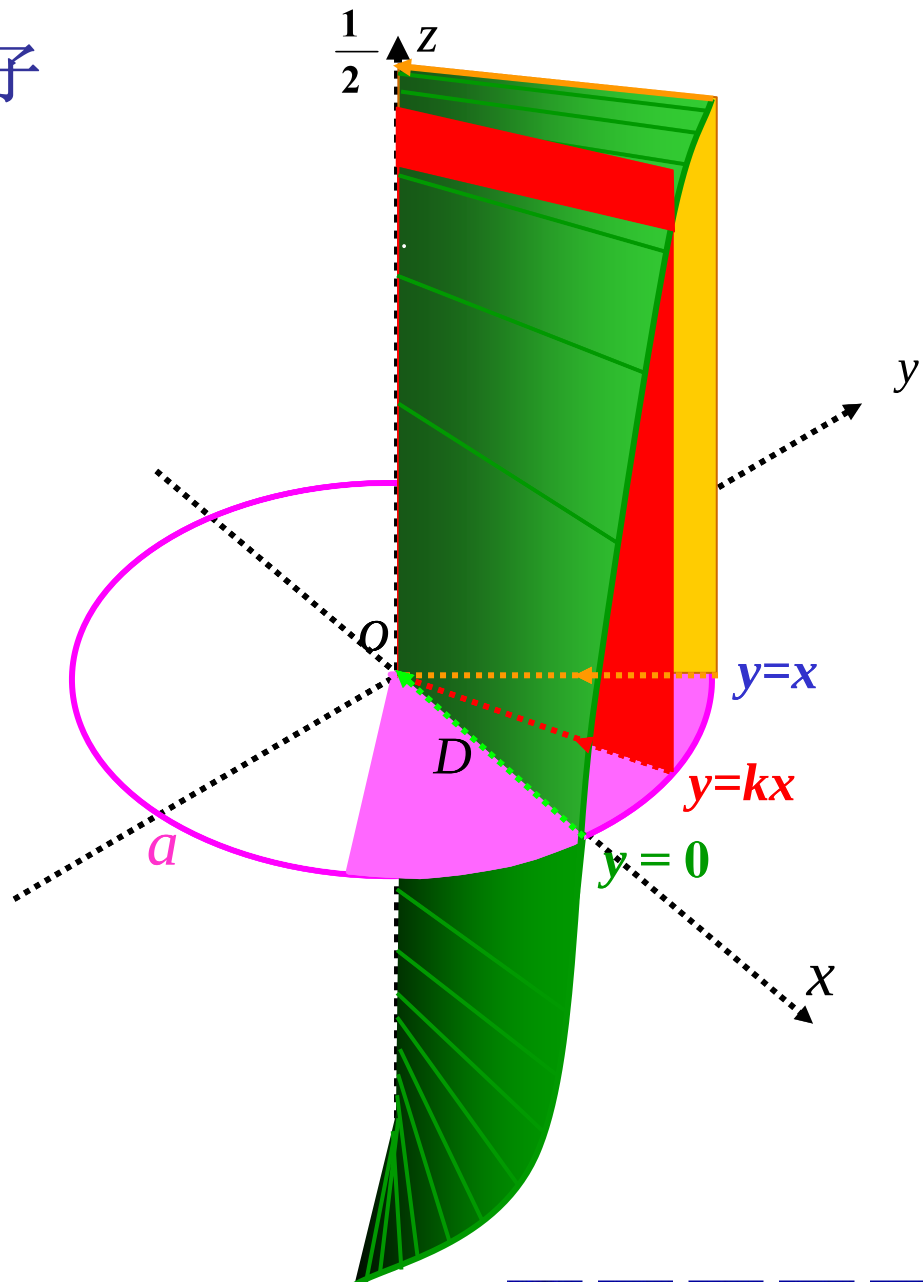
故$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$不存在

那么，曲面在点(0,0)附近的形状是怎样的呢？

曲面与z轴无交点；

曲面关于平面 $y=x$对称；

曲面关于平面 $y=-x$对称；



例9. 二重极限不存在的例子

$$z = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0,0)$$

点 $P(x, y)$ 沿直线 $y = kx$

$\rightarrow (0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx \to 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{k}{1 + k^2}$$

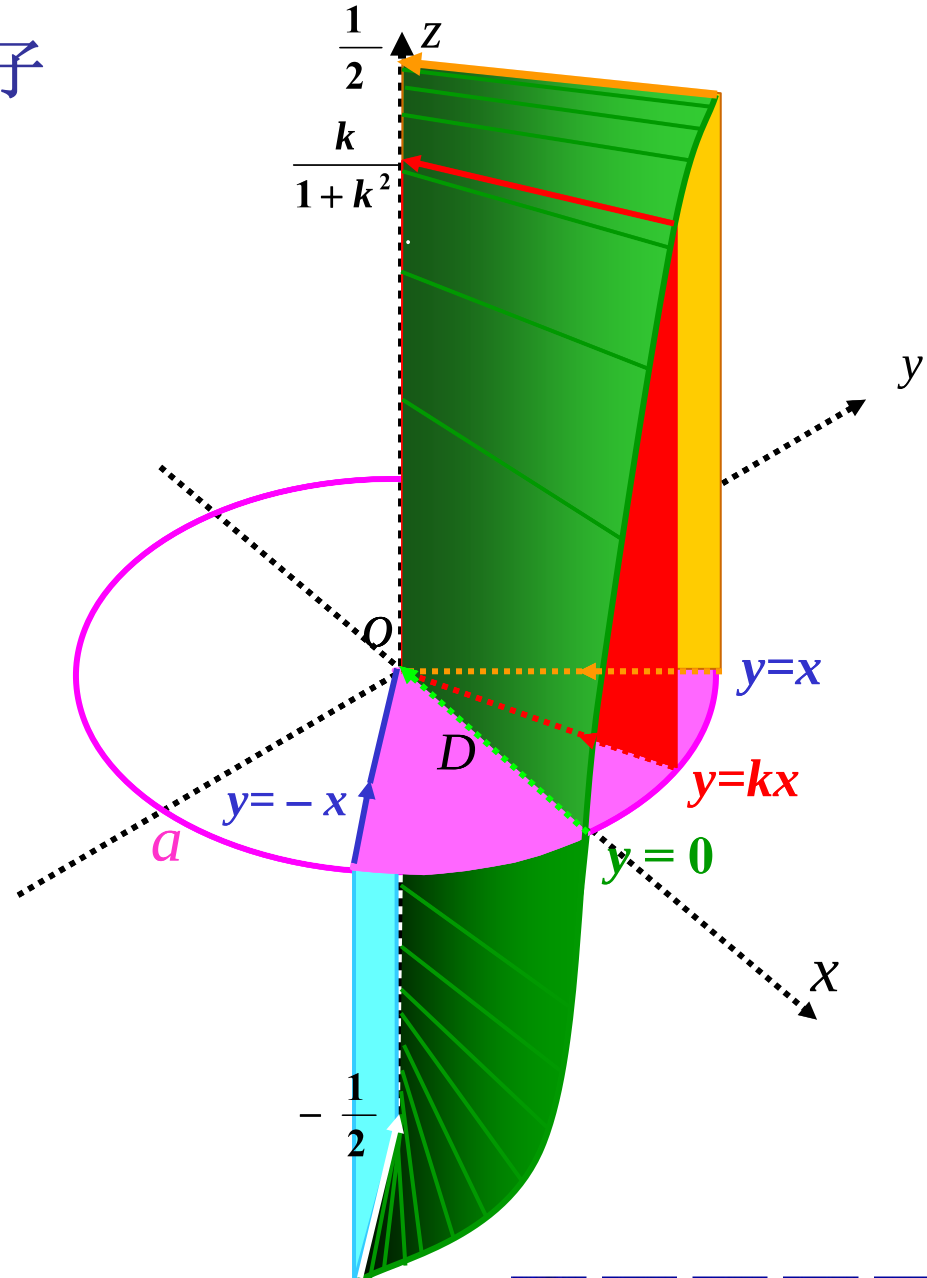
故 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ 不存在

那么，曲面在点(0,0)附近的形状是怎样的呢？

曲面与z轴无交点；

曲面关于平面 $y=x$对称；

曲面关于平面 $y=-x$对称；



例9. 二重极限不存在的例子

$$z = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \ (x, y) \neq (0,0)$$

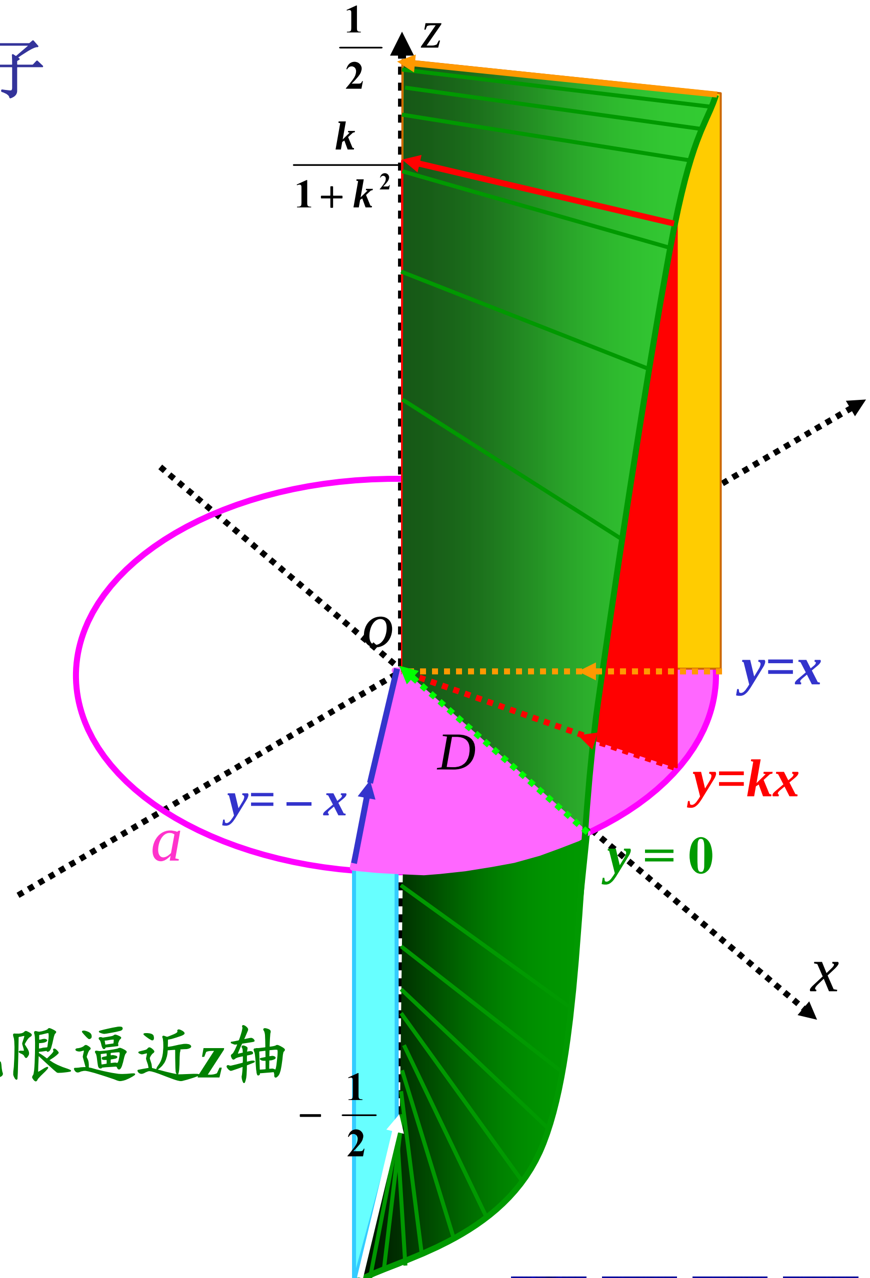
点 $P(x, y)$ 沿直线 $y = kx$

$\to (0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx \to 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{k}{1 + k^2}$$

故 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ 不存在

那么，曲面在点(0,0)附近的形状是怎样的呢？



曲面与z轴无交点;但曲面无限逼近z轴

曲面关于平面 $y=x$ 对称;

曲面关于平面 $y=-x$ 对称;

例 10：证明 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 沿任何直线趋于(0,0)时，极限都存在，但 $f(x,y)$ 在(0,0)处的极限不存在。

证明 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{x^2+k^2}$$

（1）当 $k\neq 0$ 时，极限为 0；

（2）当 $k=0$ 时，即沿 $y=0$ 趋于(0,0)，显然极限为 0；

（3）沿 $x=0$ 趋于(0,0)，显然极限也为 0；

即沿任何直线趋于 0 时，极限为 0。但

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}\neq 0$$

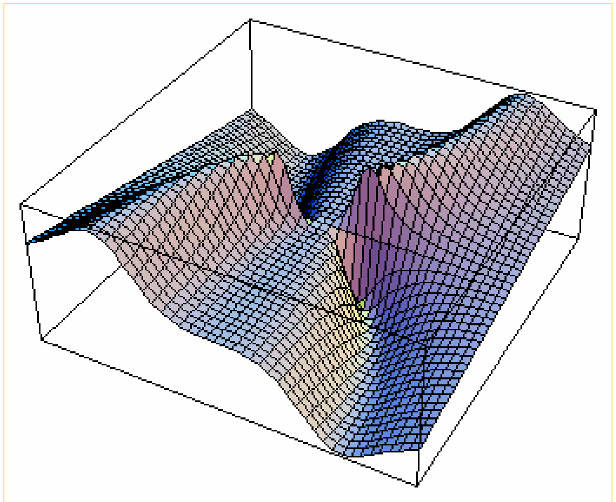
所以 $f(x,y)$ 在(0,0)没有极限。

例11： 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 不存在.

证 取 $y=kx^3$,

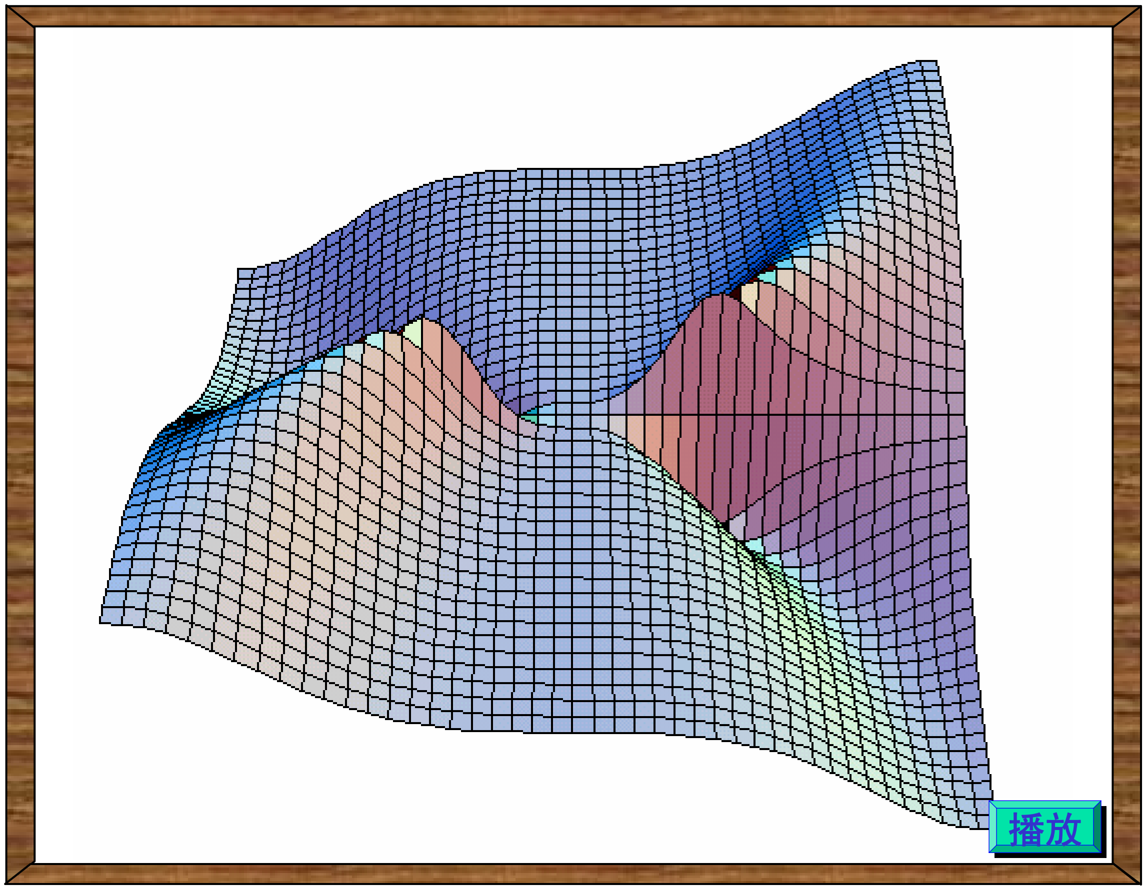
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3y}{x^6+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^3}}\frac{x^3\cdot kx^3}{x^6+k^2x^6}$$

$$=\frac{k}{1+k^2},$$



其值随 k 的不同而变化，故极限不存在.

观察 $z=\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 图形， $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 不存在.



四、多元函数的连续性

定义： 设二元函数 $z = f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 及其附近有定义，若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

则称二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处连续。

否则称 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处不连续，$P_0(x_0, y_0)$ 称为 $f(x,y)$ 的间断点。

此定义也可用改变量的语言来叙述：

令 $x - x_0 = \Delta x$，$y - y_0 = \Delta y$，则

$$\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$
$$= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

称为函数 $z = f(x, y)$ 的改变量或全增量。

于是，连续性的定义可写成：

$$\lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \Delta z = 0$$

即：当自变量 x，y 的改变量都趋于零时，函数的改变量也趋于零。

例 12 证明下列函数在(0,0)处是连续的:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{x(y^2+1)}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases},$$

证明1: (1) $x=0$时, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

(2) $x\neq 0$时, $\dfrac{\sin xy}{x(y^2+1)}\sim\dfrac{xy}{x(y^2+1)}$, $(x,y)\to(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x(y^2+1)}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y}{y^2+1}=0$$

故$f(x,y)$在(0,0)处是连续的。

例 12 证明下列函数在(0,0)处是连续的：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{x(y^2+1)}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases},$$

证明 2：（1）$x=0$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$；

（2）$x\neq 0$，但 $y=0$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$；

（3）$x\neq 0$，$y\neq 0$，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin xy}{xy}\frac{y}{y^2+1}=0$$

故 $f(x,y)$在(0,0)处是连续的。

例 13 证明下列函数在(0,0)处是连续的:

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

证明: 令 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$

当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$r\to 0$

当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$r\neq 0$

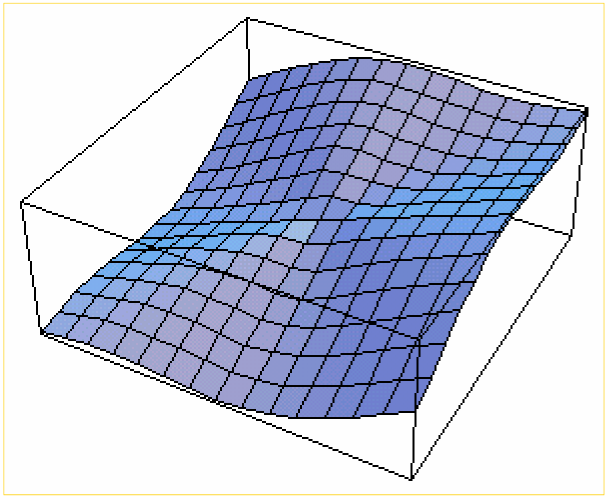
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)=\lim_{r\to 0} r^2\cos\theta\sin\theta\ln r^2=0$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续。

例14 讨论 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

在(0,0)处的连续性.

解 取 $x=r\cos\theta,$
$y=r\sin\theta$



$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$$

$$=\lim_{r\to 0} r(\sin^3\theta+\cos^3\theta)$$

$$=0$$ 故函数在(0,0)处连续.

闭区域上连续函数的性质

(1) 有界性定理

有界闭区域 D 上的多元连续函数必定是 D 上的有界函数。

(2) 最大值和最小值定理

有界闭区域 D 上的多元连续函数，在 D 上必取得它的最大值和最小值。

(3) 介值定理

有界闭区域 D 上的多元连续函数，如果它在 D 上的最大值和最小值分别为 M 和 m，则它在 D 必上取得介于M 和 m这两值之间的任何值。

多元初等函数:

由多元多项式及基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的可用一个式子所表示的多元函数叫**多元初等函数**

一切多元初等函数在其定义域内是连续的。

一般地，求 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 时，如果 $f(P)$ 是初等函数，且 P_0 是 $f(P)$ 的定义域的内点，则 $f(P)$ 在点 P_0 处连续，于是 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$.

五、小结

多元函数的定义

多元函数极限的概念

（注意趋近方式的任意性）

多元函数连续的概念

闭区域上连续函数的性质

作业

习题7-1(P64)

1， 2， 4， 5， 6，

7， 8(1)(5)

备用题 1. 设 $f(xy,\frac{y^2}{x})=x^2+y^2$，求 $f(\frac{y^2}{x},xy)$.

解法1 令 $\begin{cases} xy=u \\ \frac{y^2}{x}=v \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y=\sqrt[3]{uv} \\ x=\frac{u}{\sqrt[3]{uv}} \end{cases}$

$$\Longrightarrow f(u,v)=\frac{u^2}{(uv)^{2/3}}+(uv)^{2/3}$$

$$u=\frac{y^2}{x},\ v=xy$$

$$f(\frac{y^2}{x},xy)=\frac{(\frac{y^2}{x})^2}{y^2}+y^2=\frac{y^2}{x^2}+y^2$$

1．设 $f(xy,\dfrac{y^2}{x})=x^2+y^2$，求 $f(\dfrac{y^2}{x},xy)$.

$$f(\frac{v^2}{u},uv)$$

解法2 令 $\begin{cases} xy=\dfrac{v^2}{u} \\ \dfrac{y^2}{x}=uv \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y=v \\ x=\dfrac{v}{u} \end{cases}$

$$\Longrightarrow f(\frac{v^2}{u},uv)= f(xy,\frac{y^2}{x})=(\frac{v}{u})^2+v^2$$

即 $$f(\frac{y^2}{x},xy)=\frac{y^2}{x^2}+y^2$$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\dfrac{\ln(1+xy)}{x+y}$ 是否存在?

解: 利用 $\ln(1+xy)\sim xy$，取 $y=x^{\alpha}-x$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\frac{\ln(1+xy)}{x+y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}}\frac{x^2 y}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha+2}-x^3}{x^{\alpha}}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x^2-x^{3-\alpha})=\begin{cases}-1, & \alpha=3\\ 0, & \alpha<3\\ \infty, & \alpha>3\end{cases}$$

所以极限不存在.

3. 证明 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

在全平面连续.

证1：在 $(x,y)\neq(0,0)$ 处，$f(x,y)$ 为初等函数，故连续.

令 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$

当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$r\to 0$，当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$r\neq 0$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{r\to 0} r\sin\theta\cos\theta=0=f(0,0)$$

故函数在全平面连续 .

3. 证明 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

在全平面连续.

证2: 在 $(x,y)\neq(0,0)$ 处, $f(x,y)$ 为初等函数 , 故连续.

又 $$0\le\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

$\boxed{x^2+y^2\ge 2|xy|}$

由夹逼准则得

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$$

故函数在全平面连续 .