普通高中2019年12月高三教学质量监测

理科数学参考答案及评分标准

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	C	D	B	C	B	B	C	A	A	D

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13.$\sqrt{5}$　14.$\frac{2\pi}{3}$　15.$\frac{3}{2}$　16.①$\frac{\sqrt{2}}{2}$　②$e=\sin\theta$

三、解答题:共70分.

(一)必考题:共60分.

17.(12分)

解:(1)∵数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是以$a_2-a_1=2$为首项,2为公比的等比数列,

∴$a_{n+1}-a_n=2^n$. …………………………………………………………………… 2分

∴$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$

$=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$. …………………………………… 6分

(2)方法一:∵$c_n=(-1)^{n+1}(2^n-1)=-(-2)^n+(-1)^n$, ……………………………… 8分

∴$S_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$

$=[(-1)+(-1)^2+\cdots+(-1)^n]-[(-2)+(-2)^2+\cdots+(-2)^n]$ …………… 9分

$=\frac{-1[1-(-1)^n]}{1-(-1)}-\frac{-2[1-(-2)^n]}{1-(-2)}$ ……………………………………… 10分

$=\frac{(-1)^n}{2}+\frac{(-2)^{n+1}}{3}+\frac{1}{6}$. ……………………………………………… 12分

方法二:令$b_n=a_{n+1}-a_n$,则$b_n=2^n$.

n为偶数时,

$S_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{n-1}-a_n=-(b_1+b_3+\cdots+b_{n-1})$

$=-(2+2^3+\cdots+2^{n-1})=-\frac{2(1-4^{\frac{n}{2}})}{1-4}=\frac{2-2^{n+1}}{3}$; ……………………………… 9分

n为奇数时,

$S_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_n=a_1+(a_3-a_2)+(a_5-a_4)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$

$=1+b_2+b_4+\cdots+b_{n-1}=1+2^2+2^4+\cdots+2^{n-1}=\frac{1-4^{\frac{n+1}{2}}}{1-4}=\frac{2^{n+1}-1}{3}$. ………… 11分

$$\therefore S_n=\begin{cases}\frac{2-2^{n+1}}{3}(n\text{为偶数}),\\ \frac{2^{n+1}-1}{3}(n\text{为奇数}).\end{cases}$$ …………………………………… 12分

18.(12 分)

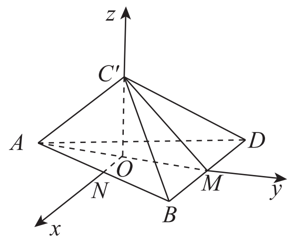
(1)证明:平面四边形 $ABCD$ 中,$\angle BAD=60°$,$AB=BD$,所以$\triangle ABD$ 为正三角形.

在三棱锥 $C'\text{-}ABD$ 中,取 BD 的中点 M,连接 AM,$C'M$,则 $AM\perp BD$,$C'M\perp BD$.

因为 $AM\cap C'M=M$,

所以 $BD\perp$平面 $C'AM$,从而 $AC'\perp BD$. …………………………………………………… 5 分

(2)解:设 $AB=2$,则 $AM=\sqrt{3}$,$C'M=1$. 由(1)知,$\angle C'MA$ 为二面角 $C'\text{-}BD\text{-}A$ 的平面角,所以$\angle C'MA=30°$.



在$\triangle C'AM$ 中,利用余弦定理可求得 $AC'=1$,所以$\triangle C'AM$ 为等腰三角形. 取 AM 的中点 O,则 $C'O\perp AM$,又 $C'O\perp BD$,所以 $C'O\perp$平面 ABD. 取 N 为 AB 中点,则 $ON\parallel BD$,且 $ON\perp AM$,所以以 O 为原点,建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$. …………………… 7 分

则 $A(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},0)$,$B(1,\frac{\sqrt{3}}{2},0)$,$D(-1,\frac{\sqrt{3}}{2},0)$,$C'(0,0,\frac{1}{2})$.

$\overrightarrow{BC'}=(-1,-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$,$\overrightarrow{AD}=(-1,\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{AC'}=(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$. ………………………………… 9 分

设平面 $C'AD$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC'}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x+\sqrt{3}y=0,\\ \frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}z=0.\end{cases}$

可取 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,-\sqrt{3})$.

所以 $\cos\langle\overrightarrow{BC'},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BC'}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{BC'}||\boldsymbol{m}|}=-\dfrac{\sqrt{42}}{7}$. ………………………………………………………… 11 分

所以直线 BC' 与平面 $C'AD$ 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{42}}{7}$. …………………………………………… 12 分

19.(12 分)

解:(1)由抛物线的定义可知$|PF|=3+\frac{p}{2}=4$,得 $p=2$,所以抛物线方程为 $y^2=4x$.

把 $x=3$ 代入抛物线方程,得 $y=\pm2\sqrt{3}$,所以 $P(3,\pm2\sqrt{3})$. ………………………………… 5 分

(2)若证$\dfrac{|OA|}{|OD|}=\dfrac{|OC|}{|OB|}$,可证$\dfrac{|OA|}{|OC|}=\dfrac{|OD|}{|OB|}$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$\dfrac{|OA|}{|OC|}=\dfrac{x_1}{1}=x_1$,$\dfrac{|OD|}{|OB|}=\dfrac{1}{x_2}$, ………………………………… 7 分

所以只要证明 $x_1x_2=1$ 即可. ……………………………………………………………… 8 分

若直线斜率不存在,易知$|OA|=|OB|=|OC|=|OD|$,所以$\dfrac{|OA|}{|OD|}=\dfrac{|OC|}{|OB|}$;……………… 9 分

若直线斜率存在,设直线方程为 $y=k(x-1)$,

联立$\begin{cases}y=k(x-1),\\ y^2=4x,\end{cases}$ 得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$,$\therefore x_1x_2=\dfrac{k^2}{k^2}=1$. ……………………… 11 分

从而$\dfrac{|OA|}{|OD|}=\dfrac{|OC|}{|OB|}$. ………………………………………………………………… 12 分

20.(12 分)

(1)证明:$a=1$ 时,$f(x)=e^x-\cos x-x$,令 $g(x)=e^x-x$,则 $g'(x)=e^x-1$.

当 $x<0$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$在$(-\infty,0)$上为减函数,

当 $x>0$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数, ………………………………………… 3 分

$\therefore g(x)\geqslant g(0)=1$. 而 $\cos x\leqslant 1$. 且 $g(0)=\cos 0$, ………………………………………… 4 分

$\therefore e^x-x\geqslant \cos x$,即 $f(x)\geqslant 0$. ……………………………………………………………… 5 分

(2)解:$f(x)$在$(0,\pi)$上有两个极值点$\Leftrightarrow f'(x)=ae^x+\sin x-1=0$ 在$(0,\pi)$上有两个不同实数根. ……………………………………………………………………………………………… 6 分

$f'(x)=0\Leftrightarrow a=\dfrac{1-\sin x}{e^x}$,设 $h(x)=\dfrac{1-\sin x}{e^x}$,$x\in(0,\pi)$,

$h'(x)=\dfrac{\sin x-\cos x-1}{e^x}=\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-1}{e^x}$,令 $h'(x)=0$,得 $x=\dfrac{\pi}{2}$. ………………… 8 分

当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$时,$h'(x)<0$,$h(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上为减函数,当$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ 时,$h'(x)>0$,

$h(x)$在$\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$上为增函数. ……………………………………………………………… 10 分

又 $h(0)=1$,$h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$,$h(\pi)=\dfrac{1}{e^{\pi}}=e^{-\pi}$,$0<e^{-\pi}<1$,

……………………………………………………………………………………………… 11 分

$\therefore$当 $0<a<e^{-\pi}$时,方程 $a=\dfrac{1-\sin x}{e^x}$在$(0,\pi)$上有两个不同的实数根,

$\therefore a$ 的取值范围是 $0<a<e^{-\pi}$. …………………………………………………………… 12 分

21.(12 分)

解:(1) ①ξ的所有可能取值为 36,27,18,0. ……………………………………………… 1 分

$P(\xi=36)=\dfrac{3}{3^4}=\dfrac{1}{27}$, ……………………………………………………………………… 2 分

$P(\xi=27)=\dfrac{C_2^1C_4^1+C_4^2}{3^4}=\dfrac{14}{81}$, ………………………………………………………… 3 分

$P(\xi=18)=\dfrac{C_3^1C_4^2A_2^2}{3^4}=\dfrac{4}{9}$, ……………………………………………………………… 4 分

$P(\xi=0)=\dfrac{28}{81}$. …………………………………………………………………………………… 5 分

所以 ξ 的分布列为

ξ	36	27	18	0
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{14}{81}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{28}{81}$

……………………………………………………………………………………………… 6 分

②因为 $E(\xi)=36\times\dfrac{1}{27}+27\times\dfrac{14}{81}+18\times\dfrac{4}{9}+0\times\dfrac{28}{81}=14$, ………………………… 7 分

所以当 $a\geqslant 14$ 时,搞活动后的利润不会小于搞活动之前. ………………………………… 8 分

(2)因为 $72=36\times2=27\times2+18=36+18\times2$,

所以若三箱酒两箱中一等奖,另一箱不中奖,则小张不能得到电影票; …………………… 9 分

若三箱酒两箱中二等奖,另一箱中三等奖,或一箱中一等奖,两箱中三等奖,则小张能得到电影票,概率设为 P,

则 $P=\dfrac{C_3^2\dfrac{14}{81}\times\dfrac{14}{81}\times\dfrac{4}{9}+C_3^1\dfrac{1}{27}\times\dfrac{4}{9}\times\dfrac{4}{9}}{C_3^2\dfrac{1}{27}\times\dfrac{1}{27}\times\dfrac{28}{81}+C_3^2\dfrac{14}{81}\times\dfrac{14}{81}\times\dfrac{4}{9}+C_3^1\dfrac{1}{27}\times\dfrac{4}{9}\times\dfrac{4}{9}}=\dfrac{304}{311}$. ………………………… 12 分

(二)选考题:共 10 分.

22.(10 分)

(1)解:曲线 C_1 化成直角坐标方程为 $x^2+2y^2=8$,即 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$. ……………………………… 2 分

曲线 C_2 化成直角坐标方程为 $x^2+y^2-2y=0$,即 $x^2+(y-1)^2=1$. ……………………… 4 分

(2)证明:经分析,曲线 C_2 是以 $M(0,1)$ 为圆心,CD 为直径的圆,所以 $|CD|=2$. ………… 5 分

把直线 l 的参数方程代入 $x^2+2y^2=8$,得 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2+2\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2=8$, ……………………… 6 分

整理得 $3t^2+4\sqrt{2}t-12=0$,设方程的两根为 t_1,t_2,则 $t_1\cdot t_2=-4$, ……………………… 8 分

所以 $|MA|\cdot|MB|=|t_1|\cdot|t_2|=|t_1\cdot t_2|=4$,所以 $|MA|\cdot|MB|=|CD|^2$. ………… 10 分

23.(10 分)

解:(1)不等式 $f(x)-g(x)\geqslant0$,即 $|x+1|\geqslant|2x-1|$, ……………………………………… 1 分

两边平方得 $x^2+1+2x\geqslant4x^2+1-4x$,$x^2-2x\leqslant0$,解得 $0\leqslant x\leqslant2$, ……………………… 3 分

所以不等式的解集为 $[0,2]$. …………………………………………………………………… 4 分

(2)$y=\begin{cases}-3x+a-1, & x\leqslant-1,\\ -x+a+1, & -1<x<\dfrac{a}{2},\\ 3x+1-a, & x\geqslant\dfrac{a}{2},\end{cases}$ ………………………………………………………… 5 分

设 $A(-1,2+a)$,$B\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}+1\right)$,因为 $a>0$,所以 $2+a>\dfrac{a}{2}+1$,

所以当 $m=2+a$ 时封闭三角形面积最大. …………………………………………………… 7 分

令 $3x+1-a=2+a$,得 $x=\dfrac{2a+1}{3}$,设 $C\left(\dfrac{2a+1}{3},2+a\right)$, ……………………………… 8 分

所以封闭三角形 ABC 的面积为 $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2a+1}{3}+1\right)\cdot\left(2+a-\dfrac{a}{2}-1\right)=\dfrac{3}{2}$,

解得 $a=-5$(舍)或 $a=1$,所以正数 $a=1$. ……………………………………………… 10 分