

流体力学 C 篇题解

C1 题解

CP1.2.1 设质量力 $\mathbf{f} = k\mathbf{r}$ ， k 为常量， $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ，试问流体有无可能达到平衡？

提示：验证流体保持平衡的质量力条件。

解：将质量力分量代入均质流体平衡的质量力条件（C1.2.6）式

$$\begin{cases} f_x = kx \\ f_y = ky \\ f_z = kz \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f_z}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$\therefore$ 可得平衡

CP1.4.1 如图示，一水箱在重力作用下沿斜面以加速度 $\mathbf{a}$ 滑下，斜面与水平面成 α 角，求水箱液面形状及液面与水平面倾角 β 。

提示：将坐标系固结于水箱上，按相对平衡等压面微分方程求解。

答：
$$-\arctg \frac{g \sin \alpha - a}{g \cos \alpha} + \alpha$$

解：建立固结于水箱的坐标系 $oxyz$ 如图所示，质量力除重力外，还有非惯性坐标系的惯性力，将单位质量力的三个分量代入等压面微分方程中

$$f_x = g \sin \alpha - a, \quad f_y = 0, \quad f_z = -g \cos \alpha$$

$$dp = f_x dx + f_y dy + f_z dz = (g \sin \alpha - a)dx - g \cos \alpha dz$$

令 $dp = 0$

令
$$\frac{dz}{dx} = \frac{g \sin \alpha - a}{g \cos \alpha} = -\tan \theta$$

$$\therefore \theta = -\arctg \frac{g \sin \alpha - a}{g \cos \alpha}, \quad \beta = \theta + \alpha = -\arctg \frac{g \sin \alpha - a}{g \cos \alpha} + \alpha$$

，液面与水平面夹角为

CP1.4.2 如图示，一两端敞口的 U 型管以加速度 a 沿水平方向作匀加速运动。设左右支管的间距为 $l = 0.2\text{m}$ ，左右支管的液位差为 $h = 0.1\text{m}$ ，试求：

U 型管的加速度 a ；

液体密度对结果的影响。

提示：将坐标系固结于 U 形管上，按相对平衡等压面微分方程求解。

答：(1)
$$a = g \frac{h}{l}$$

解：(1) 建立固结于 U 形管上的坐标系如图示

$$\text{惯性力 } f_x = -a, \quad f_y = -g$$

$$\text{由压强微分式 } dp = -a dx - g dy$$

$$\text{由于 } a \text{ 和 } g \text{ 均为常数 } p = -ax - gy + C \quad (a)$$

设左支管 $x = 0$ ，液面高 $y = b$ ， $p = 0$ 。由 (a) 式

$$-gb + C = 0, \quad C = gb \quad (b)$$

右支管 $x = l$ ，液面高 $y = b - h$ ， $p = 0$ 。由 (a), (b) 式

$$-al - g(b - h) + gb = 0, \quad a = g \frac{h}{l}$$

(2) 当 l 和 h 值确定后，加速度便确定了，与液体密度无关。但要达到一定的加速度，

对 U 形管施加的推力与液体密度有关

CP1.4.3 如图示，一密闭圆筒高为 $H_0 = 0.7\text{m}$ ，半径为 $R = 0.4\text{m}$ 。内装 0.25m^3 的水，液

面上为大气压强。当圆筒以角速度 $\omega = 10\text{rad/s}$ 绕垂直轴旋转时，设空气体积不变，试确定水作用在顶盖螺栓上的力 F 。

提示：将坐标系固结于圆筒上，按相对平衡压强全微分式求液内压强分布。应注意在顶盖上液体不充满，且沿径向压强为非线性分布，必需用积分法求其合力 F 。

答： $F = 175.2\text{N}$

解：以液面最低点为原点建立坐标系 orz ， z 轴垂直向上。

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \Rightarrow z_0 = \frac{\omega^2 r_0^2}{2g}$$

$$\tau_{\text{气}} = \pi R^2 H_0 - 0.25 = \pi \times 0.4^2 \times 0.7 - 0.25 = 0.102\text{m}^3$$

$$\text{设气体的体积不变 } \frac{1}{2} \pi r_0^2 \cdot z_0 = \tau_{\text{气}} = 0.102\text{m}^3$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \pi r_0^2 \cdot \frac{\omega^2 r_0^2}{2g} = 0.102 \text{ m}^3$$

$$\therefore r_0^4 = 0.102 \times \frac{4g}{\pi \omega^2} = 0.102 \times \frac{4 \times 9.81}{\pi \times 10^2} = 0.01274 (\text{m}^4)$$

$$\therefore r_0 = \sqrt[4]{0.012735} = 0.336 \text{ m}$$

$$\therefore z_0 = \frac{\omega^2 r_0^2}{2g} = \frac{10^2 \times 0.336^2}{2 \times 9.806} = 0.575 \text{ m}$$

因空气体积不变，压强仍为大气压，液内压强分布为

$$p = \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} - \rho g \cdot z \Rightarrow p_{\text{顶}} = p|_{z=z_0} = \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} - \rho g \cdot z_0$$

$$\begin{aligned} \therefore F &= \int_{r_0}^R p_{\text{顶}} \cdot 2\pi r dr = 2\pi \int_{r_0}^R \left[\frac{\rho \omega^2 r^2}{2} - \rho g \cdot z_0 \right] \cdot r \cdot dr \\ &= 2\pi \left[\frac{\rho \omega^2 (R^4 - r_0^4)}{8} - \frac{\rho g z_0 (R^2 - r_0^2)}{2} \right] \\ &= 2\pi \left[\frac{1000 \times 10^2 \times (0.4^4 - 0.336^4)}{8} - \frac{9810 \times 0.575 \times (0.4^2 - 0.336^2)}{2} \right] \\ &= 2\pi (160.7 - 132.85) = 175 \text{ N} \end{aligned}$$

CP1.4.4 如图示横截面高：宽为 $b:c=1.:2$ 之飞机汽油箱，，所装油为油箱容量的 $1/3$ 。

试确定

在下面两种情况下飞机的水平（宽度方向）加速度 a ：（1）汽油自由液面碰到油箱底时；（2）汽油自由液面碰到油箱中心 A 时（即油箱停止供油时）。

提示：油面与底面的夹角由水平加速度和重力加速度之比决定，但可由油箱静止和运动时油体体积不变确定其夹角的值

$$\text{答：（1） } a = \frac{1}{3}g ; \text{（2） } a = \frac{3}{2}g$$

解：油面为等压面，与体积力合力垂直，设油面与底面成 α 角，则 $\tan \alpha = a/g$ 。

（1）当油面刚碰到箱底时，油的体积与静止时相同。设油箱长度为 l

$$\frac{1}{2} \times 2b \times 2b \tan \alpha \times l = \frac{b}{3} \times 2b \times l$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{1}{3} \quad \text{即} \quad \frac{a}{g} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a = \frac{1}{3}g$$

（2）当液面碰到中心点 A 时，油体横截面为梯形，梯形上下底为 $b-b/\tan \alpha, b$

$$\frac{1}{2}(b+b-b/\operatorname{tg}\alpha)b \times l = \frac{b}{3} \times 2b \times l$$

$$\therefore \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2} \quad \text{即} \quad \frac{a}{g} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}g$$

CP1.4.5 如图示, 在直径 $d = 0.4\text{m}$, 高度 $H = 0.6\text{m}$ 的开口圆桶中, 静止时的水位高度为

$h_1 = 0.4\text{m}$ 。设圆管绕中心轴匀速旋转, 试确定

(1) 液面正好达到容器边缘时的每分钟转数 n_1 ;

(2) 液面顶端碰到容器底时的每分钟转数 n_2 ;

(3) 当达到第二种情况后, 容器再停止下来时的水面高度 h_2 。

提示: 利用液面(等压面)方程确定液体的体积或空气的体积, 由圆筒静止和转动时液体或气体体积不变确定转速。当液面边缘正好达到圆筒边缘后, 继续提高转速将使部分水溢出筒外, 圆筒停止下来后水位比原来的低。

答: (1) 133.7r/min ; (2) 163.7r/min ; (3) $h_2 = 0.3\text{m}$

解: 取底部中心为原点 O, z 轴向上的坐标系 Oxz , 等压面方程为:

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + C \quad (a)$$

(1) 液面边缘点坐标为 $r = d/2$, $z = H$, 由 (a) 式 $C = H - \frac{\omega^2 d^2}{8g}$

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + H - \frac{\omega^2 d^2}{8g} \quad (b)$$

$\therefore$ 液面方程为:

求 ω 有两种方法:

$$1. \text{ 由水的体积不变} \quad \int_0^{d/2} z \cdot 2\pi \cdot dr = \frac{\pi d^2}{4} \cdot h_1$$

$$\begin{aligned} \int_0^{d/2} z \cdot 2\pi dr &= 2\pi \int_0^{d/2} \left[\frac{\omega^2 r^2}{2g} + H - \frac{\omega^2 d^2}{8g} \right] r dr \\ &= 2\pi \left[\frac{\omega^2}{8g} \cdot r^4 + \frac{1}{2} \left(H - \frac{\omega^2 d^2}{8g} \right) \cdot r^2 \right]_0^{d/2} \\ &= 2\pi \left[\frac{\omega^2 d^4}{128g} + \frac{1}{8} H d^2 - \frac{\omega^2 d^4}{64g} \right] \\ &= \frac{\pi d^2}{4} \left(H - \frac{\omega^2 d^2}{16g} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\pi d^2}{4} \cdot h_1 = \frac{\pi d^2}{4} \left(H - \frac{\omega^2 d^2}{16g} \right)$$

$$\therefore \omega = \sqrt{16g(H - h_1)/d^2} = \frac{4}{d} \cdot \sqrt{(H - h_1)g}$$

2. 由空气体积不变, 设液面最低点坐标为 z_0

$$\frac{\pi}{4} d^2 (H - h_1) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} d^2 (H - z_0), \quad z_0 = 2h_1 - H$$

在 (b) 式中令 $r = 0, \quad z = z_0$

$$\omega = \frac{\sqrt{8g(H - z_0)}}{d} = \frac{\sqrt{8g(2H - h_1)}}{d} = \frac{4}{d} \sqrt{(H - h_1)g}$$

$$\therefore \omega = \frac{4}{0.4} \cdot \sqrt{(0.6 - 0.4) \times 9.8} = 14 \text{ rad/s}$$

$$\therefore n = \frac{60\omega}{2\pi} = \frac{14 \times 60}{2\pi} = 133.7 \text{ r/min}$$

两种解法结果相同

(2) 液面最低点坐标为 $r = 0, \quad z = 0$, 由(a)式 $C = 0$

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

液面方程为

$$\text{液面边缘点坐标为 } r = d/2, \quad z = H, \quad \text{即} \quad \frac{\omega^2 (d/2)^2}{2g} = H$$

$$\omega = \sqrt{8gH} / d = \sqrt{8 \times 9.81 \times 0.6} / 0.4 = 17.16 \text{ rad/s}$$

$$n_2 = \frac{60\omega}{2\pi} = \frac{60 \times 17.16}{2\pi} = 163.7 \text{ r/min}$$

(3) 当(2)中的水静止下来后, 由空气体积保持不变

$$\frac{\pi}{4} d^2 (H - h_2) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} d^2 H$$

$$h_2 = \frac{1}{2} H = \frac{1}{2} \times 0.6 = 0.3 \text{ m}$$

CP1.5.1 如图示, 一边框装有铰链的倾斜闸门其宽度 $b = 1 \text{ m}$, 闸门与水平面夹角为

$\alpha = 60^\circ$ 。闸门左侧的水深 $H = 2.3 \text{ m}$, 水面与闸门交点到铰链轴的距离 $a = 30 \text{ cm}$, 设开启闸门的力作用于闸门底端, 垂直向上, 试求不计闸门重量与铰链的摩擦力时开启闸门的力 F 。

提示: 求总压力作用点时注意坐标系和原点的选取, 求合力矩应对铰链轴取矩。

答: $F = 4.195 \times 10^4 \text{ N}$

解: 沿闸门建立坐标轴 y , 向下为正, 原点 O 在水面上。闸门水下长度为 l

$$l = \frac{H}{\sin \alpha} = \frac{2.3}{\sin 60^\circ} = 2.656 \text{ m}$$

设形心为 C , $y_c = l/2 = 1.328 \text{ m}$ 。设压强中心为 D

$$\begin{aligned} y_D &= y_c + \frac{r_\xi^2}{y_c} = y_c + \frac{l^2}{12y_c} \\ &= 1.328 + \frac{2.656^2}{12 \times 1.328} \\ &= 1.77 \text{ m} \end{aligned}$$

(实际上, D 位于下三分点上, $y_D = \frac{2}{3}l = 1.77 \text{ m}$)

总压力 $F_p = \rho g h_c A = 1.0 \times 10^3 \times 9.806 \times \frac{2.3}{2} \times (1 \times \frac{2.3}{\sin 60^\circ}) = 29949.3 \text{ N}$

由对铰链 A 的合力矩为零 $\sum M_A(\vec{F}) = 0$

$$F(H \cot \alpha + a \cos \alpha) = F_p(a + y_D)$$

$$F = \frac{F_p(a + y_D)}{H \cot \alpha + a \cos \alpha} = \frac{29949.3 \times (0.3 + 1.77)}{2.3 \times 0.866 + 0.3 \times 0.5} = 4.195 \times 10^4 \text{ N}$$

故开启闸门所需的力为 $4.195 \times 10^4 \text{ N}$

CP1.5.2 如图示, 一水下建筑的密封舱门高 $l = 2 \text{ m}$, 宽 $b = 1 \text{ m}$, 水面离门框顶边淹深

$H = 5 \text{ m}$, 门框顶边装有铰链, 求打开舱门所需的力矩 M 。

提示: 求总压力作用点时注意坐标系和原点的选取, 求合力矩对顶边铰链取矩。

答: $1.24 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}$

解: 设 y 轴垂直向下, 原点 O 在液面上。舱门形心 C 的淹深 $y_c = 6 \text{ m}$ 。设总压力作用点为 D

$$y_D = y_c + \frac{r_\xi^2}{y_c} = y_c + \frac{l^2}{12y_c} = 6 + \frac{1}{18} = 6.056 \text{ m}$$

总压力 $F = \rho g h_c A = \rho g(H + y_c)A = 9806 \times (5 + 1) \times 1 \times 2$

$$=117672\text{N}$$

以顶边铰链为轴，打开舱门所需的力矩为

$$M = F(0.5l + l/18) = 117672(1 + 0.056) = 1.24 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

CP1.5.3 如图示，一矩形闸门的高 $\times$ 宽 $= l \times b = 3\text{m} \times 4\text{m}$ ，转动轴为 O。左侧水位为

$H_1 = 2\text{m}$ ，右侧水位为 $H_2 = 5\text{m}$ 。为开启闸门在 A 端 60° 方向系有缆绳，试求开启闸门时作用在缆绳上的力 F。

提示：闸门两侧总压力计算方法相同，但作用点偏心距计算方法有所不同。求合力距时对转动轴取矩。

答： $F = 3.49 \times 10^5 \text{ N}$

解：左右两侧水的总压力大小 F_1, F_2 分别为

$$F_1 = \rho g \frac{H_1}{2} H_1 b = 9806 \times 1 \times 2 \times 4 = 78448 \text{ N}$$

$$F_2 = \rho g [(H_2 - l) + l/2] b = 9806 \times (2 + 1.5) \times 3 \times 4 = 411852 \text{ N}$$

左右侧作用点离作用面形心的纵向偏心距 e_1, e_2 分别为

$$e_1 = H_1/6 = 0.33\text{m}$$

$$e_2 = \frac{r_{\xi}^2}{y_{C2}} = \frac{l^2/12}{H_2 - l/2} = \frac{9/12}{5 - 1.5} = 0.214\text{m}$$

由 $\sum M_o = 0$

$$F_1(l - H_1/2 + e_1) + Fl \cos 60^\circ - F_2(l/2 + e_2) = 0$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{F_2(l/2 + e_2) - F_1(l - H_1/2 + e_1)}{l \cos 60^\circ} \\ &= \frac{411852 \times (1.5 + 0.214) - 78448 \times (3 - 1 + 0.33)}{3 \times 0.5} \\ &= 3.49 \times 10^5 \text{ N} \end{aligned}$$

CP1.6.1 如图示，圆柱体两侧的水位不同：左侧水位 H 与圆柱同高，右侧水位仅及一半。设

圆柱半径为 R，试求作用于单位长圆柱面上总压力的水平和垂直分力 F_x, F_y (坐标系如图示)。

提示：两侧水位不同，圆柱下部水平力不能左右抵消，只能分别计算。计算垂直力的压力体正好就是与水接触的四分之三圆柱体。

答： $F_x = \frac{3}{8} \rho g H^2$; $F_y = \frac{3}{4} \rho g \pi R^2$

解：左侧水平力为

$$F_{x1} = \rho g \frac{H}{2} H = \frac{1}{2} \rho g H^2$$

右侧水平力为

$$F_{x2} = -\rho g \frac{H}{4} \cdot \frac{H}{2} = -\frac{1}{8} \rho g H^2$$

水平合力为

$$F_x = F_{x1} + F_{x2} = \frac{3}{8} \rho g H^2$$

左右两侧的压力体均是实的，合起来正好是四分之三个圆

$$F_y = \rho g (\pi R^2 - \frac{1}{4} \pi R^2) = \frac{3}{4} \rho g \pi R^2$$

CP1.6.2 如图示，一贮水容器右端通大气，左端容器壁上装有 3 个直径分别为 $d = 0.5\text{m}$ 的

半球型盖 a、b、c。设 $h = 2.0\text{m}$, $H = 2.5\text{m}$ ，试求作用在每个球盖上的静水总压力的大小和方向。

提示：确定压力体必需以大气压面为基准面，从每个球盖向基准面投影确定压力体；压力体内可以有水（实体），可以没有水（虚体）。求水平分力作水平投影时有重叠部分合力为零。

答： $F_a = 1123.5\text{N}$, $F_b = 6578.2\text{N}$, $F_c = 3864.1\text{N}$ （与水平方向夹角 4.76° ）

解：对 a 盖，水平分力合力为零，压力体为半球盖与大气压面所夹部分，为虚体（压力向上）

$$F_a = \rho g \tau_a$$

$$\begin{aligned} &= 9810 \times \left[\frac{\pi}{4} \cdot \left(h - \frac{H}{2} \right) \cdot d^2 - \frac{2}{3} \pi r^3 \right] = 9810 \left[\frac{\pi}{4} \times (2 - 1.25) \times 0.5^2 - \frac{2}{3} \pi \times 0.25^3 \right] \\ &= 9810 \times (0.1473 - 0.0327) = 1124.0\text{N} \end{aligned}$$

对 b 盖，水平分力合力为零，压力体为半球盖与大气压面所夹部分，为实体（压力向下）

$$\begin{aligned} F_b &= \rho g \tau_b = 9810 \times \left[\frac{2}{3} \pi r^3 + \frac{\pi}{4} \left(h + \frac{H}{2} \right) \cdot d^2 \right] \\ &= 9810 \left[0.0327 + \frac{\pi}{4} (2 + 1.25) \times 0.5^2 \right] = 9810 \times (0.0327 + 0.638) = 6580.0\text{N} \end{aligned}$$

对 c 盖，有水平和垂直分力，压力体为半球盖内容积，为实体（压力向下）

垂直方向

$$F_{cy} = \rho g \cdot \tau_c = 9810 \times \frac{2}{3} \pi r^3 = 9810 \times 0.0327 = 320.8\text{N}$$

水平方向

$$F_{cx} = -p_c \cdot A_c = -\rho g h \times \frac{\pi}{4} d^2 = -9810 \times 2 \times 0.1963 = -3852.4\text{N}$$

合力大小

$$F_c = \sqrt{F_{cx}^2 + F_{cy}^2} = 3865.7\text{N}$$

合力方向与水平方向夹角 $\alpha = \arctan F_{cy} / F_{cx} = \arctan 0.08328 = 4.76^\circ$

CP1.7.1 如图示，一蜡块比重为 $SG = 0.9$ ，浸没在装有水和油的容器中，油的比重为 $SG = 0.85$ ，试确定蜡块浸没在水中和油中的体积各占总体积的比例。

提示：蜡块受到的浮力为分别在水和油中部分受到的浮力之和，应与蜡块重量相等。

答：在水中占 $1/3$ ，在油中占 $2/3$

解：设蜡块浸没在油和水中的体积分别为 τ_1, τ_2 ，总的体积为 τ_0 ；油和水的密度分别为 ρ_1, ρ_2 。

根据阿基米德浮力定律，有

$$\begin{cases} \rho_1 g \tau_1 + \rho_2 g \tau_2 = \rho_0 g \tau_0 \\ \tau_1 + \tau_2 = \tau_0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \rho_1 \tau_1 + \rho_2 \tau_2 = \rho_0 \tau_0 \\ \tau_1 + \tau_2 = \tau_0 \end{cases}$$

解得

$$\frac{\tau_2}{\tau_0} = \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{\rho_0 / \rho_2 - \rho_1 / \rho_2}{1 - \rho_1 / \rho_2} = \frac{0.9 - 0.85}{1 - 0.85} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_0} = \frac{2}{3}$$

CP1.7.2 如图示一地秤装置，在直径为 $D = 3.6\text{m}$ 的圆柱形水池中盛水。圆柱形浮筒的直径为 $d = 3.2\text{m}$ ，自重为 $W = 3 \times 10^5 \text{N}$ ，底面的淹深为 H 。当加负载 $F = 10^5 \text{N}$ 于浮筒上后，求浮筒的下降距离 $\Delta h (\text{m})$ 。

提示：利用加载前后淹深改变而水的体积不变计算浮筒下降距离。

答： $\Delta h = 0.266\text{m}$

解：加载前由浮力定律

$$\rho g \cdot \frac{\pi d^2}{4} H = W$$

$$H = \frac{4W}{\rho g \pi d^2} = \frac{4 \times 3 \times 10^5}{9810 \pi \times 3.2^2} = 3.804\text{m}$$

设加载 F 后浮筒新的淹深为 H_1 ，由浮力定律

$$\rho g \frac{\pi}{4} d^2 H_1 = W + F$$

$$H_1 = \frac{4(W + F)}{\rho g \pi d^2} = \frac{4 \times (3 \times 10^5 + 10^5)}{9810 \pi \times 3.2^2} = 5.072\text{m}$$

由水的体积不变：

$$\frac{\pi}{4} d^2 \cdot \Delta h = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) (H_1 - \Delta h - H)$$

$$\begin{aligned}\therefore \Delta h &= \frac{D^2 - d^2}{D^2} (H_1 - H) = (1 - \frac{d^2}{D^2}) (H_1 - H) \\ &= (1 - \frac{3.2^2}{3.6^2}) (5.072 - 3.804) = 0.266\text{m}\end{aligned}$$

CP1.7.3 图示一盛水容器，底部开孔，孔直径为 r 。一倒置圆锥体塞住圆孔，圆锥底直径为 $2r$ ，

高为 $h = 3r$ 。设水深 $H = 4r$ ，水密度为 ρ ，圆锥密度为 ρ_1 ，试求顶起圆锥最小的力 F 。
提示：若设容器底部无孔，放置一个与本题圆锥体浸没在水中圆台部分相同的圆台体，两者所受浮力不同。圆台体的浮力为圆台体排开水的体积重量，倒圆锥体排开水的体积应为圆台体积减去以圆孔面积为底，相同高度的圆柱体积之差。

答：

$$F = \pi r^3 (\rho_1 + \frac{1}{8} \rho) g$$

解：由圆孔边向圆锥底面作投影线，设投影线所切割的圆锥外围部分所受浮力为 F_b

$$F_b = \rho g \left[\frac{1}{3} \pi r^2 \cdot 3r - \frac{1}{3} \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 \frac{3}{2} r - \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 \frac{3}{2} r \right] = \frac{1}{2} \rho g \pi r^3$$

投影线内部分受水压力为 F_1

$$F_1 = \rho g \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 \left(4r - \frac{3}{2} r\right) = \frac{5}{8} \rho g \pi r^3$$

圆锥自身重量为 F_2

$$F_2 = \rho_1 g \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot 3r = \rho_1 g \pi r^3$$

$$F = F_1 + F_2 - F_b = \pi r^3 \left(\rho_1 + \frac{1}{8} \rho\right) g$$

CP1.8.1 设 A 地从海平面到 5km 高空均保持温度不变 $T_0 = 303\text{K}(30^\circ\text{C})$ ，试求：

从海平面算起，大气压强减少 5% 的位置高度 Δz_1 ；

从海平面算起，大气密度减少 10% 的位置高度 Δz_2 。

提示：用可压缩流体平衡方程，按同温层方法处理。

答： $\Delta z_1 = 454.7\text{m}$, $\Delta z_2 = 934\text{m}$

解：设大气为完全气体， $p = \rho R T$, $T \equiv T_0$ ，由气体静力学方程

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{pg}{RT_0}, \quad \frac{dp}{p} = \frac{-g}{RT_0} dz$$

$$\text{积分} \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT_0} \int_{z_1}^{z_2} dz, \quad \ln \frac{p_2}{p_1} = -\frac{g}{RT_0} (z_2 - z_1)$$

$$\Delta z = z_2 - z_1 = -\frac{RT_0}{g} \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (\text{a})$$

设 $p_2/p_1 = 0.95$, $R = 287 \text{ N} \cdot \text{m/kg} \cdot \text{K}$, 由式 (a) 可得

$$\Delta z_1 = -\frac{287 \times 303}{9.81} \ln 0.95 = -8864.5 \times (-0.0513) = 454.7 \text{ m}$$

将状态方程 $p_2/p_1 = \rho_2/\rho_1$, 代入 (a) 式, 可得

$$\Delta z = -\frac{RT_0}{g} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (\text{b})$$

设 $\rho_2/\rho_1 = 0.9$, 由 (b) 式可得

$$\Delta z_2 = -8864.5 \ln 0.9 = -8864.5 \times (-0.1054) = 934 \text{ m}$$

CP1.8.2 设 B 地海平面满足国际标准大气模型, 试分别按 (1) 不可压缩条件; (2) 绝热条件计算海拔 3658m 高处的大气压强。

提示: (1) 和 (2) 遵循相同的平衡方程, 但状态方程的具体形式不同。

答: (1) $p = 57.3 \text{ kPa}$; (2) $p = 63.7 \text{ kPa}$

解: (1) 设大气为完全气体, 并满足不可压缩条件, $\rho = \rho_0 = \frac{p_0}{RT_0}$, 由气体静力学方程:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{p_0 g}{RT_0}, \quad dp = -\frac{p_0 g}{RT_0} dz$$

$$\int_{p_0}^p dp = -\int_0^z \frac{p_0 g}{RT_0} dz, \quad p - p_0 = -\frac{p_0 g}{RT_0} z$$

$$p = p_0 \left(1 - \frac{gz}{RT_0}\right) = 101.3 \times \left(1 - \frac{9.81 \times 3658}{287 \times 288}\right) = 57.3 \text{ kPa}$$

$$\frac{p}{p_0} = 56.6\%$$

(2) 设大气满足绝热条件 $p/\rho^\gamma = \text{常数}$, $\gamma = 1.4$, 由气体静力学方程

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} g, \quad p^{-\frac{1}{\gamma}} dp = -\rho_0 p_0^{-\frac{1}{\gamma}} g dz$$

$$\int_{p_0}^p p^{-\frac{1}{\gamma}} dp = -\rho_0 p_0^{-\frac{1}{\gamma}} g \int_0^z dz, \quad \frac{\gamma}{\gamma-1} p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Big|_{p_0}^p = -\rho_0 p_0^{-\frac{1}{\gamma}} g z \Big|_0^z$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] = -\rho_0 p_0^{-\frac{1}{\gamma}} g z$$

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} p_0^{-\frac{1}{\gamma} \frac{\gamma-1}{\gamma}} \rho_0 g z = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} p_0^{-1} \rho_0 g z$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho_0}{p_0} g z\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{g z}{R T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{g z}{R T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 101.3 \times \left(1 - \frac{0.4}{1.4} \times \frac{9.81 \times 3658}{287 \times 288}\right)^{1.4/0.4} = 63.7 \text{ kPa}$$

$$\frac{p}{p_0} = 62.9\%$$

同〔例 C 1.8.1〕相比，说明绝热条件更接近实际情况。

C2 题解

CP 2.2.2 设速度场可表为 $u = ax + by$, $v = cx + dy$, 若流场为不可压缩和无旋的, 求 a、b、c、d 必须满足的条件。

答: $a = -d$ 且 $c = b$

解: 由不可压缩, $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, 得 $a + d = 0$

由无旋, $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, 得 $c - b = 0$

则 a、b、c、d 必须满足: $a = -d$ 且 $c = b$

CP 2.3.1 已知速度场 $u = x^2 y + y^2$, $v = x^2 - y^2 x$, 试问此流场是否存在流函数和速度势函数? 如有, 请求之。

答: $\psi = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}y^3 + C$

解: (1) $\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} [(2x - y^2) - (x^2 + 2y)] = (x - y) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \neq 0$

不存在速度势函数。

(2) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2xy + (-2xy) = 0$, 存在流函数。

由 $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v = -(x^2 - y^2x)$, $\psi = -\int (x^2 - y^2x)dx + f(y) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2x^2 + f(y)$

由 $\frac{\partial \psi}{\partial y} = x^2y + f'(y) = u = x^2y + y^2$, $f'(y) = y^2$, $f(y) = \frac{1}{3}y^3 + C$

得 $\psi = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}y^3 + C$

CP 2.3.2 试判断不可压缩流体平面流动: $u = 2xy + x$, $v = x^2 - y^2 - y$ 是否有势流动, 若有, 求出速度势。

答: $\phi = \frac{1}{2}x^2 + x^2y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + C$

解: $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2x - 2x = 0$, 为有势流动。

由 (C2.3.7) 式

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u = 2xy + x$, $\phi = x^2y + \frac{1}{2}x^2 + f(y)$

$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 + f'(y) = v = x^2 - y^2 - y$, $f'(y) = -y^2 - y$, $f(y) = -\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + C$

$\phi = \frac{1}{2}x^2 + x^2y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + C$

CP 2.3.3 试写出不可压缩均匀来流场 $u = 2\text{m/s}$, $v = 3\text{m/s}$ 的速度势和流函数。

答: $\phi = 2x + 3y + C$, $\psi = 2y - 3x + C$

$$\text{解: } \begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2 \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 3 \end{cases} \Rightarrow \phi = 2x + 3y + C \quad ; \quad \begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2 \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 3 \end{cases} \Rightarrow \psi = 2y - 3x + C$$

CP 2.3.4 已知极坐标系中的速度场为 $v_r = 4r \cos 2\theta$, $v_\theta = -4r \sin 2\theta$, (1) 试确定流动是否有速度势和流函数; (2) 若有, 则求之。

$$\text{答: } \phi = 2r^2 \cos 2\theta + C_1, \quad \psi = 2r^2 \sin 2\theta + C_2$$

解: (1) 由 (C2.3.6b) 式

$$\begin{aligned} \Omega_z &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (-4r^2 \sin 2\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (4r \cos 2\theta) \right] \\ &= -8r \sin 2\theta + 8r \sin 2\theta = 0 \end{aligned}$$

存在势函数。

由 (C2.3.12b) 式

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} = \frac{\partial}{\partial r} (4r \cos 2\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (-4r \cos 2\theta) + 4 \cos 2\theta \\ &= 4 \cos 2\theta - 8 \cos 2\theta + 4 \cos 2\theta = 0 \end{aligned}$$

存在流函数。

$$(2) \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} = v_r = 4r \cos 2\theta$$

$$\phi = \int 4r \cos 2\theta dr + f(\theta) = 2r^2 \cos 2\theta + f(\theta)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -4r \sin 2\theta + \frac{1}{r} f'(\theta) = v_\theta = -4r \sin 2\theta$$

$$f'(\theta) = 0, \quad f(\theta) = C_1$$

势函数为 $\phi = 2r^2 \cos 2\theta + C_1$ 。

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -v_\theta = 4r \sin 2\theta$$

$$\psi = \int 4r \sin 2\theta dr + g(\theta) = 2r^2 \sin 2\theta + g(\theta)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 4r \cos 2\theta + \frac{1}{r} g'(\theta) = v_r = 4r \cos 2\theta$$

$$g'(\theta) = 0, \quad g(\theta) = C_2$$

流函数为 $\psi = 2r^2 \sin 2\theta + C_2$ 。

CP 2.3.5 不可压缩流体平面流动的速度势 $\phi = x^2 - y^2 + x$, 试求其流函数。

答: $\psi = (2x+1)y + C$

解: $u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2x+1, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -2y$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u = 2x+1$$

$$\psi = 2xy + y + f(x)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2y + f'(x) = -v = 2y$$

$$f'(x) = 0, \quad f(x) = C$$

$$\psi = 2xy + y + C$$

CP 2.3.6 不可压缩流体平面流动的流函数 $\psi = xy + 2x - 3y + 10$, 试求其速度势。

答: $\phi = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{2}y^2 - 2y + C$

解: $u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = x-3, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -y-2$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u = x-3$$

$$\phi = \frac{1}{2}x^2 - 3x + f(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = f'(y) = v = -y-2$$

$$f(y) = -\frac{1}{2}y^2 - 2y + C$$

$$\phi = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{2}y^2 - 2y + C$$

CP 2.3.7 下列流函数是否都是有势流动 (k 为常数)?

(1) $\psi = kxy$; (2) $\psi = x^2 - y^2$;

(3) $\psi = k \ln xy^2$; (4) $\psi = k(1 - \frac{1}{r^2})r \sin \theta$ 。

答: (1) 是 (2) 是 (3) 不是 (4) 是

解：(1) $u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = kx$, $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -ky$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 - 0 = 0$$

所以是有势流动。

(2) $u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -2y$, $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2x$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -2 - (-2) = 0$$

所以是有势流动。

(3) $u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{2k}{y}$, $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{k}{x}$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{k}{x^2} + \frac{2k}{y^2} \neq 0$$

所以不是有势流动。

(4) $v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = k(1 - \frac{1}{r^2}) \cos \theta$

$$\begin{aligned} v_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} [k(r - \frac{1}{r}) \sin \theta] \\ &= -k(1 + \frac{1}{r^2}) \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial r} [-k(r + \frac{1}{r}) \sin \theta] - \frac{\partial}{\partial \theta} [k(1 - \frac{1}{r^2}) \cos \theta] \\ &= -k(1 - \frac{1}{r^2}) \sin \theta + k(1 - \frac{1}{r^2}) \sin \theta = 0 \end{aligned}$$

所以是有势流动。

CP2.3.8 已知流函数 $\psi = 3x^2y - y^3$ ，试求 (1) 势函数；(2) 过 A (1, 0) 与 B (0, 1) 两点任意连线的流量。

提示：(2) 流过流场中任意两点的连线的流量等于这两点的流函数值之差。

答：(1) $\phi = x^3 - 3xy^2 + C$; (2) $Q_{AB} = -1$

解： $u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$, $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -6xy$

$$(1) \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = u = 3x^2 - 3y^2, \quad \phi = x^3 - 3xy^2 + f(y);$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -6xy + f'(y) = v = -6xy, \quad f'(y) = 0, \quad f(y) = C;$$

$$\phi = x^3 - 3xy^2 + C$$

$$(2) \quad Q_{AB} = \psi_B - \psi_A = (3x^2y - y^3) \Big|_{(1,0)}^{(0,1)} = -1 - 0 = -1$$

CP2.3.9 已知势函数 $\phi = -3xy$ ，试确定 (1) $(1,3)$ ， $(3,3)$ 点上的速度；(2) 求过此两点的连线的流量。

提示：流过流场中任意两点的连线的流量等于这两点的流函数值之差。

答： $Q = 12$

$$\text{解：(1)} \quad u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -3y, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -3x$$

$$(1,3) \text{ 点上的速度为 } u = -9, \quad v = -3$$

$$(3,3) \text{ 点上的速度为 } u = -9, \quad v = -9$$

$$(2) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v = 3x, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u = -3y, \quad \text{得} \quad \psi = \frac{3}{2}(x^2 - y^2) + C$$

$$Q = \psi_3 - \psi_1 = \frac{3}{2}(x^2 - y^2) \Big|_{(1,3)}^{(3,3)} = 0 - \frac{3}{2}(1 - 9) = 12$$

CP2.3.10 已知不可压缩流场的流函数 $\psi = x^2 - y^2$ ，试确定 A $(1,1)$ ，B $(2,2)$ 两点间之流量及流动方向。

提示：流过流场中任意两点的连线的流量等于这两点的流函数值之差。

答：流量为 0，流动方向为由 $(2,2)$ 向 $(1,1)$ 流动。

解： $Q_{AB} = \psi_B - \psi_A = (x^2 - y^2) \Big|_{(1,1)}^{(2,2)} = 0$ ，这说明 $(1,1)$ ， $(2,2)$ 点在同一根流线上，故流量为 0。

$$\text{又} \quad u \Big|_{(1,1)} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{(1,1)} = -2y \Big|_{(1,1)} = -2 < 0$$

故流动方向为由 $(2,2)$ 向 $(1,1)$ 流动。

CP2.4.1 位于 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$ 两点有相同强度 4π 的点源，试求在 $(0,-1)$ 和 $(1,1)$ 处的速度。

提示：描述该流场的势函数由两点源的势函数叠加而成；点源不在坐标原点时， r 应取相对于点源位置的距离；势函数的直角坐标形式可从极坐标形式转换而来。

答： $u|_{(0,-1)} = 0$, $v|_{(0,-1)} = -2$; $u|_{(1,1)} = \frac{4}{5}$, $v|_{(1,1)} = \frac{12}{5}$

解：速度势 $\phi = \phi_{(1,0)} + \phi_{(-1,0)} = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{Q}{2\pi} \left[\frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2} \right]$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{Q}{2\pi} \left[\frac{y}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{y}{(x+1)^2 + y^2} \right]$$

$Q = 4\pi$ 故 $u|_{(0,-1)} = 0$, $v|_{(0,-1)} = -2$; $u|_{(1,1)} = \frac{4}{5}$, $v|_{(1,1)} = \frac{12}{5}$

CP2.4.2 设一平面流动，速度势为 $\phi = k\theta$ ， k 是正常数。试计算下列周线上环量：(1)

沿圆 $x^2 + y^2 = R^2$ ，(2) 沿圆 $(x-a)^2 + y^2 = R^2$ 。

提示：首先判断速度势表达式代表何种基本流，再利用无旋流斯托克斯公式计算圆周环量。

答：(1) $\Gamma = 2\pi k$ ；(2) 如果 $|a| > R$ ，则 $\Gamma = 0$ ；如果 $|a| < R$ ，则 $\Gamma = 2\pi k$

解：(1) 该速度势代表位于坐标原点，强度为 $2\pi k$ 的点涡 ($\Gamma = 2\pi k$)，半径为 R 的圆内包含该点涡，按斯托克斯公式沿该圆的环量即点涡的强度 $2\pi k$ 。

(2) 对圆心在 $(a,0)$ 的圆，如果 $|a| > R$ ，则点涡位于圆外， $\Gamma = 0$ ；如果 $|a| < R$ ，则包含点涡， $\Gamma = 2\pi k$ 。

CP2.4.3 设空气绕某中心作无旋圆周运动，已知半径为 1m 与 1.2m 的两圆周之间的压差为

150Pa ，试求绕该中心点的任意封闭曲线上的环量。设空气密度为 $\rho = 1.29\text{kg/m}^3$ 。

提示：将流场化为基本解流，找出环量关系，利用伯努利方程求解。

答： $173.3\text{m}^2/\text{s}$

解：在该点上放置一点涡，设强度为 Γ 。以该点为原点，绕原点的封闭曲线上的环量即为 Γ ，速度场为

$$V_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad V_r = 0。$$

$$\text{将 } V_{\theta 1} = \frac{\Gamma}{2\pi r_1}, \quad V_{\theta 2} = \frac{\Gamma}{2\pi r_2}, \text{ 代入伯努利方程}$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho V_{\theta 1}^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_{\theta 2}^2,$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\Gamma}{2\pi r_1} \right)^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\Gamma}{2\pi r_2} \right)^2$$

$$\frac{1}{8\pi^2} \rho \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \Gamma^2 = p_2 - p_1$$

$$\therefore \Gamma = \sqrt{\frac{(p_2 - p_1) \cdot 8\pi^2}{\rho \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right)}} = \sqrt{\frac{150 \times 8\pi^2}{1.29 \times \left(1 - \frac{1}{1.44} \right)}} = 173.3 \text{ m}^2/\text{s}$$

CP2.4.4 二维无旋流场由位于坐标原点强度为 Q 的源及强度为 Γ 的点涡组成。(1)试写出

此流场中的流线方程，(2) 已知 $p_{r \rightarrow \infty} = p_{\infty}$, $v_{\infty} = 0$ ，求压强场。

提示：将流场表示成基本解的叠加，求出流函数表达式即可写出流线方程。由基本解求速度场，再利用伯努利方程求压强。

$$\text{答：(1)流线方程：} \frac{m\theta}{2\pi} - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r = C; \text{ (2)压强场：} p = p_{\infty} - (Q^2 + \Gamma^2) \rho / 8\pi^2 r^2。$$

$$\text{解：(1) 位于原点的点源的流函数为 } \psi_1 = \frac{Q}{2\pi} \theta$$

$$\text{位于原点的点涡的流函数为 } \psi_2 = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

$$\text{流线方程为：} \psi = \psi_1 + \psi_2 = \frac{Q}{2\pi} \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r = C$$

$$(2) \quad v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{Q}{2\pi r}, \quad v_{\theta} = \frac{-\partial \psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

$$\therefore v^2 = v_r^2 + v_{\theta}^2 = \frac{(Q^2 + \Gamma^2)}{4\pi^2 r^2}$$

由伯努利方程 ($v_{\infty} = 0$)

$$p = p_{\infty} - \frac{1}{2} \rho v^2 = p_{\infty} - \frac{(Q^2 + \Gamma^2) \rho}{8\pi^2 r^2}$$

CP2.5.1 水以均流 $U=10\text{m/s}$ 绕流半径为 $a=0.4\text{m}$ 的二维圆柱体。该圆柱体以 120r/min 的转速逆时针旋转，试求：（1）圆柱面上的环量值 Γ ；（2）圆柱面上驻点的位置 θ_{cr} ；（3）单位长圆柱体的升力 F_L 。

提示：由圆柱表面的线速度直接求速度环量，用茹柯夫斯基定律计算单位长度圆柱体的升力，由驻点位置临界角公式求前后两个驻点的幅角。

答：（1） $\Gamma = 12.6\text{m}^2/\text{s}$ （2） $\theta_{cr} = 194.5^\circ$ 和 345.5° （3）升力 $F_L = 1.008 \times 10^6 \text{N}$

解：（1） $\Gamma = 2\pi a v_{\theta} = 2\pi a^2 \omega = 2\pi \times 0.4^2 \times \frac{120 \times 2\pi}{60} = 12.6\text{m}^2/\text{s}$

（2）取圆柱中心为坐标原点，均流方向为 x 轴

$$\sin \theta_{cr} = -\frac{\Gamma}{4\pi a U} = -\frac{12.6}{4\pi \times 0.4 \times 10} = -0.25$$

$\theta_{cr} = 194.5^\circ$ 和 345.5° 为前后驻点的幅角（参见图 C2.5.3（a））

（3）升力 $F_L = \rho U \Gamma = 10^3 \times 10 \times 12.6 = 1.26 \times 10^5 \text{N}$

CP2.5.2 直径为 $d=1.2\text{m}$ 的二维圆柱体以 $n=90\text{r/min}$ 的转速逆时针旋转，空气以 $U=80\text{km/h}$ 的速度绕流圆柱体。试求（1）圆柱面上的环量值 Γ ；（2）圆柱面上驻点的位置 θ_{cr} ；

（3）单位长圆柱体的升力 F_L 。设空气密度为 $\rho = 1.29\text{kg/m}^3$ 。

提示：由圆柱表面的线速度直接求速度环量，用茹柯夫斯基定律计算单位长度圆柱体的升力，由驻点位置临界角公式求前后两个驻点的幅角。

答： $\Gamma = 21.3\text{m}^2/\text{s}$ ； $\theta_{cr} = 187.3^\circ$ 和 352.7° ； $F_L = 610.6\text{N}$

解：（1） $\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \times 90}{60} = 3\pi \text{ rad/s}$

$$v_{\theta} = \omega r = 3\pi \times 0.6 = 1.8\pi = 5.65\text{m/s}$$

$$\Gamma = v_{\theta} \cdot \pi d = 5.65 \times \pi \times 1.2 = 21.3\text{m}^2/\text{s}$$

（2） $U = \frac{80 \times 10^3}{3600} = 22.22\text{m/s}$

$$\sin \theta_{cr} = -\frac{\Gamma}{4\pi a U} = -\frac{21.3}{4\pi \times 0.6 \times 22.22} = -0.127$$

$\theta_{cr} = 187.3^\circ$ 和 352.7° 为前后驻点的幅角。

$$(3) F_L = \rho U \Gamma = 1.29 \times 22.22 \times 21.3 = 610.6 \text{ N}$$

CP2.5.3 在均流对圆柱绕流流场中叠加一环量 Γ ，使两个驻点重合在圆柱面的同一点上。

设圆柱半径为 a ，来流速度为 U ，密度为 ρ ，试求单位长圆柱的升力 F_L 。

提示：两个驻点重合时，幅角为 90° 。

答： $F_L = 4\pi a \rho U^2$

解：驻点重合在同一点上时，此时 $\theta_{cr} = \frac{\pi}{2}$ ， $\sin \theta_{cr} = 1$ 。环量为 $|\Gamma| = 4\pi a U$

$$F_L = \rho U \Gamma = \rho U \cdot 4\pi a U = 4\pi a \rho U^2$$

CP2.5.4 试按势流理论求空气均匀来流对圆柱绕流柱面上的最高压强与最低压强之差。已知来流速度为 $U = 5 \text{ m/s}$ ，密度为 $\rho = 1.23 \text{ kg/m}^3$ 。

提示：根据压强系数的定义 $C_p = \frac{p_s - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U^2}$ ，最高压强点位于前后驻点， $C_p = 1$ ；最低压

强点位于圆柱顶点， $C_p = -3$ ，然后求两压强之差。

答： $p_0 - p_{\min} = 61.5 \text{ Pa}$

解：最高压强（驻点） $C_p = 1$ ， $p_0 - p_\infty = \frac{1}{2} \rho U^2$

最低压强（顶点） $C_p = -3$ ， $p_{\min} - p_\infty = -\frac{3}{2} \rho U^2$

$$p_0 - p_{\min} = 2\rho U^2 = 2 \times 1.23 \times 25 = 61.5 \text{ Pa}$$

C3 题解

CP3.3.1 如图所示，两平板沿相反方向运动， $U = 2V = 2 \text{ m/s}$ ，若 $p_1 = p_2$ ， $b = 1.5 \text{ mm}$ ，

$\mu = 0.49 \text{ kg/m} \cdot \text{s}$ ，求作用在上、下平板上的切应力 τ 。

提示：求板上切应力需知道流体速度分布，一般由基本方程求解。特殊的流动可根据速度分布特点直接求解，如本题为简单库埃特流，上下板切应力相等。

答： $\tau_{\text{上}} = \tau_{\text{下}} = 980 \text{ Pa}$

解：设 x 轴位于下板面，方向与上板相同， z 轴垂直板面向上。

$p_1 = p_2$ ， $\frac{dp}{dx} = 0$ ，方程 $\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} = 0$ ，流动属简单库埃特流，速度为线性分布

$$u = c_1 z + c_2$$

由边界条件： $z = 0$ 时， $u = V = -1 \text{ m/s}$ ， $c_2 = -1 \text{ m/s}$

$$z = b \text{ 时， } u = U = 2 \text{ m/s， } c_1 = (U - c_2)/b = 3/(1.5 \times 10^{-3}) = 2 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$$

$$\tau = \mu \frac{du}{dz} = \mu c_1 = 0.49 \times 2 \times 10^3 = 980 \text{ N/m}^2$$

$$\therefore \tau_{\text{上}} = \tau_{\text{下}} = 980 \text{ Pa}$$

CP3.3.2 如图所示，无限长平板以匀速 U ，沿间距为 b 的固定平面水平移动，其中为两层不相混的流体所充满，其厚度和粘性系数分别为 b_1 ， b_2 和 μ_1 ， μ_2 ，若运动中无压差，试

求在图示坐标系中流体中的速度分布 u_1 ， u_2 和切应力分布 τ_1 ， τ_2 。

提示：根据流动特点判断两层液体的速度分布类型，由三个边界条件联立求解速度分布表达式，应注意两层液体交界面的边界条件特点（包括速度和切应力），可参见 B3.5 节。

答： $u_1 = \frac{\mu_2 U}{\mu_2 b_1 + \mu_1 b_2} z + \frac{\mu_1 U b_2}{\mu_2 b_1 + \mu_1 b_2}$ ， $u_2 = \frac{\mu_1 U}{\mu_2 b_1 + \mu_1 b_2} z + \frac{\mu_1 U b_2}{\mu_2 b_1 + \mu_1 b_2}$ ；

$$\tau = \tau_1 = \tau_2 = \frac{\mu_1 \mu_2 U}{\mu_2 b_1 + \mu_1 b_2}$$

解：由方程（C3.2.3）可得

$$\frac{d^2 u_1}{dz^2} = 0, \quad \frac{du_1}{dz} = c_1, \quad u_1 = c_1 z + c_2,$$

$$\frac{d^2 u_2}{dz^2} = 0, \quad \frac{du_2}{dz} = c_3, \quad u_2 = c_3 z + c_4,$$

$$\text{上板边界条件为 } z = b_1 \text{ 时， } u_1 = U, \quad U = c_1 b_1 + c_2 \quad (\text{a})$$

$$\text{下板边界条件为 } z = -b_2 \text{ 时， } u_2 = 0, \quad 0 = -c_3 b_2 + c_4 \quad (\text{b})$$

由两层液体交界面上速度连续 $z=0$ 时, $u_1 = u_2$, $\therefore c_2 = c_4$

$$(a)-(b) \text{ 式可得 } U = c_1 b_1 + c_3 b_2 \quad (c)$$

又由两层液体交界面上切应力连续 $\tau_1 = \tau_2$, 即 $\mu_1 \frac{du_1}{dz} = \mu_2 \frac{du_2}{dz}$, 可得

$$\mu_1 c_1 = \mu_2 c_3 \quad (d)$$

$$\text{由(c)、(d)式可解得 } c_1 = \frac{\mu_2 U}{\mu_2 b_1 + \mu_1 b_2}, \quad c_3 = \frac{\mu_1 U}{\mu_2 b_1 + \mu_1 b_2}$$

$$\text{由(b)式可得 } c_4 = c_2 = c_3 b_2 = \frac{\mu_1 U b_2}{\mu_2 b_1 + \mu_1 b_2}$$

$$\text{速度分布式为 } u_1 = \frac{\mu_2 U}{\mu_2 b_1 + \mu_1 b_2} z + \frac{\mu_1 U b_2}{\mu_2 b_1 + \mu_1 b_2},$$

$$u_2 = \frac{\mu_1 U}{\mu_2 b_1 + \mu_1 b_2} z + \frac{\mu_1 U b_2}{\mu_2 b_1 + \mu_1 b_2};$$

$$\text{切应力为常数 } \tau = \tau_1 = \tau_2 = \frac{\mu_1 \mu_2 U}{\mu_2 b_1 + \mu_1 b_2}$$

CP3.3.3 在间距为 $2h$ 的固定平板间的定常压差层流中, 平均流速为 V , 流体粘性系数为 μ 。

试证: 沿流动方向 l 距离上的压差为 $\Delta p = 3\mu l V / h^2$ 。

证明: 在下板上沿流动方向取 x 轴, z 轴垂直向上。参照书中 (C3.3.5a) 式, 速度分布为

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (z^2 - 2hz)$$

$$V = \frac{1}{2h} \int_0^{2h} u dz = \frac{1}{2h} \int_0^{2h} \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (z^2 - 2hz) dz = -\frac{h^2}{3\mu} \frac{dp}{dx}$$

$$dp = -\frac{3\mu V}{h^2} dx, \quad \int_1^2 dp = -\int_0^l \frac{3\mu V}{h^2} dx$$

$$\Delta p = p_2 - p_1 = -\frac{3\mu l V}{h^2}$$

CP3.4.1 已知粘性流体在圆管中作定常层流流动, 圆管截面上速度分布为 $u = C(R^2 - r^2)$,

其中 C 为常数, r 为由圆心的矢径, R 是圆管半径。求: (1) 流量 Q , (2) 平均速度 v ,

(3) 单位长度圆管的沿程损失 h_f / l 。

提示：已知速度分布，壁面切应力可求；利用斯托克斯公式求比压降（单位长度压强降），再求沿程损失。

答： $h_f = 4C\mu / \rho g$

解：(1) 流量 $Q = \int_0^R u \cdot 2\pi r dr = \int_0^R C(R^2 - r^2) \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi C}{2} R^4$

(2) 平均速度 $V = \frac{Q}{A} = \frac{\frac{\pi C}{2} R^4}{\pi R^2} = \frac{CR^2}{2}$

(3) 切应力 $\tau_w = -\mu \frac{du}{dr} \Big|_{r=R} = 2C\mu R$

由斯托克斯公式 $\tau_w = \frac{G}{2} R$

单位长度上的压降为 $G = \frac{\Delta p}{l} = \frac{2\tau_w}{R} = 4C\mu$

单位长度上的沿程损失为 $\frac{h_f}{l} = \frac{G}{\rho g} = \frac{4C\mu}{\rho g}$

CP3.4.2 如图所示，密度为 ρ 、粘度为 μ 的流体，在重力作用下以层流状态流过一倾斜管。

管的半径为 R ，管与水平线倾斜角为 α 。求：(1) 当管内压差 $\Delta p = 0$ 时，写出流动的微分

方程；(2) 管内速度分布函数 $u(r)$ ；(3) 流量 Q 的表达式。

答：(1) $g \sin \alpha + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) = 0$ (2) $u = -\frac{\rho g \sin \alpha}{4\mu} (r^2 - R^2)$

(3) $Q = \frac{\pi}{8\mu} (\rho g \sin \alpha) R^4$

提示：利用柱坐标形式的 N-S 方程，惯性项为零，有体积力，无压强梯度。求解速度分布后沿管截面积分得流量，流量公式应具有泊肃叶公式形式。

解：(1) 由轴对称，建立柱坐标系，管轴为 x 轴，管径为 r 轴。 $V_r = 0$, $V_\theta = 0$, $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$,

$\nabla p = 0$, $u = u(r)$ 。由柱坐标形式 N-S 方程（参见例 C3.4.1）可得

$$\therefore 0 = g \sin \alpha + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) = g \sin \alpha + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right]$$

$$(2) \text{ 移项后积分两次得 } u = -\frac{\rho g \sin \alpha}{4\mu} r^2 + c_1 \ln r + c_2$$

边界条件 $r=0$ 时, u 有限 $\Rightarrow c_1 = 0$

$$r=R \text{ 时, } u=0 \Rightarrow c_2 = \frac{\rho g \sin \alpha}{4\mu} R^2$$

$$\text{速度分布 } u = -\frac{\rho g \sin \alpha}{4\mu} r^2 + \frac{\rho g \sin \alpha}{4\mu} R^2 = -\frac{\rho g \sin \alpha}{4\mu} (r^2 - R^2)$$

$$(3) \quad Q = \int_0^R u \cdot 2\pi r dr = -\frac{\pi \rho g \sin \alpha}{2\mu} \int_0^R (r^3 - R^2 r) dr = \frac{\pi}{8\mu} (\rho g \sin \alpha) R^4$$

这里 $\rho g \sin \alpha$ 相当于泊肃叶公式中的比压降 G 。

CP3.4.3 20°C 的水和 20°C 的空气流过同一光滑管道。如果壁面摩擦系数相等, 求在同一压差下两者的体积流量比。

提示: 本题未指明流态, 无法直接用摩擦因子公式。达西公式适用于任何流态, 反映压差、达西摩擦因子、管道尺寸、流体性质和平均速度之间的关系, 本题应从达西公式出发求流量比。

$$\text{答: } \frac{Q_{\text{水}}}{Q_{\text{空}}} = 0.0347$$

解: 由达西公式

$$h_f = \frac{\Delta p}{\rho g} = \lambda \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g}, \quad V = \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho} \frac{2d}{\lambda l}}$$

同一管道 d 、 l 相同, 现摩擦系数 $C_f = \lambda / 4$ 相等, 压差相同, 水和空气的流量比为

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} = \sqrt{\frac{1.204}{998.2}} = 0.0347$$

CP3.6.1 当 $Re = 10^5$ 时, 直径 d_2 多大的普通镀锌钢管 ($\varepsilon_1 = 0.375\text{mm}$) 的沿程阻力系数与直径为 $d_1 = 30\text{mm}$ 的铸铁管 ($\varepsilon_2 = 0.26\text{mm}$) 的相同?

答: $d_2 = 43.3\text{mm}$

解: 沿程阻力系数表达为 $\lambda = f(\text{Re}, \varepsilon/d)$, 当 $\text{Re}, \varepsilon/d$ 均相等时 λ 才相等, 令

$$\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)_1 = \left(\frac{\varepsilon}{d}\right)_2$$

由表 C3.1 商用铸铁管 $\varepsilon_1 = 0.26\text{mm}$, 镀锌钢管 $\varepsilon_2 = 0.375\text{mm}$

$$d_2 = d_1 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 30 \times \frac{0.375}{0.26} = 43.3\text{mm}$$

CP3.6.2 一根旧的铁管 $\varepsilon = 0.5\text{mm}$, 长 $l = 60\text{m}$, 直径 $d = 20\text{cm}$, 管内水的流量 $Q = 0.2\text{m}^3/\text{s}$, 水的运动粘度取 $\nu = 1.14 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$, 试求沿程损失 h_f 。

答: $h_f = 15.51\text{m}$

解: 管内平均流速 $V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \times 0.2}{\pi \times 0.2^2} = 6.37\text{m/s}$

$$\text{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{6.37 \times 0.2}{1.14 \times 10^{-6}} = 1.12 \times 10^6$$

$$\frac{\varepsilon}{d} = \frac{0.5 \times 10^{-3}}{0.2} = 0.0025$$

查 Moody 图, $\lambda = 0.025$

$$h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g} = 0.025 \times \frac{60}{0.2} \times \frac{6.37^2}{2 \times 9.81} = 15.51\text{m}$$

CP3.6.3 水管直径 $d = 250\text{mm}$, 长度 $l = 300\text{m}$, 绝对粗糙度 $\varepsilon = 0.25\text{mm}$ 。设已知流量 $Q = 0.095\text{m}^3/\text{s}$, 运动粘度 $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$, 求沿程损失 h_f 。

答: $h_f = 4.58\text{m}$

解: $V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \times 0.095}{\pi \times 0.25^2} = 1.935\text{m/s}$

$$\text{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{1.935 \times 0.25}{10^{-6}} = 4.84 \times 10^5$$

$$\varepsilon/d = 0.25/250 = 0.001$$

查 Moody 图, $\lambda = 0.02$

$$h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g} = 0.02 \times \frac{300}{0.25} \frac{1.935^2}{2 \times 9.81} = 4.58\text{m}$$

CP3.6.4 如图所示，油从压力油箱经一输油管输出。输油管的直径为 $d = 6\text{mm}$ ，长度为 $l = 5\text{m}$ 。油的运动粘度为 $\nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$ 。设输油管终端压力等于大气压，不计入口损失，若在保证流量为 $Q = 0.4 \text{cm}^3/\text{s}$ ，试求压力油箱液面所需的位置高度 h 。

提示：油箱中油位的高度既要保证克服输油管中的沿程损失，又要保证达到规定的流量。

答： $h = 0.094\text{m}$

解：

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \times 0.4 \times 10^{-6}}{3.14 \times 0.006^2} = 0.014\text{m/s}$$

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0.014 \times 0.006}{0.000015} = 5.66$$

$Re < 2300$, 属层流区

$$h_f = \frac{64}{Re} \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g} = \frac{64}{5.66} \times \frac{5}{0.006} \times \frac{0.014^2}{2 \times 9.81} = 9423 \times 1.0 \times 10^{-5} = 0.094\text{m}$$

CP3.6.5 15°C 的空气流过直径 $d = 0.5\text{m}$ ，长度 $l = 2000\text{m}$ ，绝对粗糙度 $\varepsilon = 0.2\text{mm}$ 的管道。已知沿程损失为 $h_{f1} = 4\text{cmH}_2\text{O}$ ，试求空气的流量 Q 。

提示：本题要注意流动介质是空气，但沿程损失以水柱形式给出，应将其转成气柱形式才能计算流量。求流量属第二类长管问题，可利用 Moody 图作迭代运算。

答： $Q = 0.556\text{m}^3/\text{s}$

解：查表， 15°C 时空气的密度 $\rho = 1.225\text{kg/m}^3$ ，运动粘度 $\nu = 1.47 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$ ；

水的密度 $\rho_1 = 999.1\text{kg/m}^3$ ；

$$h_f = h_{f1} \frac{\rho_1}{\rho} = 0.04 \times \frac{999.1}{1.225} = 32.62\text{m (Air)}$$

由达西公式可得

$$V = \sqrt{\frac{2gh_f d}{\lambda l}} = \sqrt{\frac{2 \times 9.81 \times 32.62 \times 0.5}{\lambda \times 2000}} = \frac{0.4}{\sqrt{\lambda}} \text{m/s} \quad (\text{a})$$

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0.4 \times 0.5}{\sqrt{\lambda} \times 1.47 \times 10^{-5}} = \frac{1.36 \times 10^4}{\sqrt{\lambda}} \quad (\text{b})$$

管壁相对粗糙度为 $\varepsilon/d = 0.2/500 = 0.0004$ 。查 Moody 图，用迭代法确定摩擦因子：

设 $\lambda_1 = 0.016$ ，由 (b) 式 $Re = 1.075 \times 10^5$ ，再查 Moody 图得 $\lambda'_1 = 0.02$

设 $\lambda_2 = 0.02$ ，由 (b) 式 $Re = 9.62 \times 10^4$ ，再查 Moody 图得 $\lambda''_2 = 0.02 = \lambda_2$

由 (a) 式得
$$V = \frac{0.4}{\sqrt{0.02}} = 2.83 \text{ m/s}$$

流量为
$$Q = V \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 2.83 \times \frac{\pi \times 0.5^2}{4} = 0.556 \text{ m}^3/\text{s}$$

CP3.6.6 一根直径 $d = 30 \text{ cm}$ 的铆接钢管，长 $l = 400 \text{ m}$ ，绝对粗糙度 $\varepsilon = 3 \text{ mm}$ ， 15° 的水流流过该管，已知水头损失 $h_f = 8 \text{ m}$ ，试求水的流量 Q 。

提示：本题属第二类长管问题，可利用 Moody 图作迭代运算。

答： $Q = 0.124 \text{ m}^3/\text{s}$

解： 相对粗糙度 $\frac{\varepsilon}{d} = 0.01$

查 Moody 图完全粗糙区 $\lambda = 0.038$ ，设 $\lambda_1 = 0.038$

$$V = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \left(\frac{2gh_f}{l} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{0.038}} \left(\frac{2 \times 9.81 \times 0.3 \times 8}{400} \right)^{1/2} = 1.76 \text{ m/s}$$

查 15° 的水运动粘度 $\nu = 1.14 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{1.76 \times 0.3}{1.14 \times 10^{-6}} = 4.6 \times 10^5$$

再查 Moody 图 $\lambda_2 = 0.038 = \lambda_1$ ，所求平均速度正确

$$Q = \frac{1}{4} \pi d^2 V = \frac{1}{4} \pi \times 0.3^2 \times 1.76 = 0.124 \text{ m}^3/\text{s}$$

CP3.6.7 温度为 20°C 的水流过直径 $d = 50 \text{ cm}$ 的焊接钢管，绝对粗糙度 $\varepsilon = 0.05 \text{ mm}$ ，设

单位长度上的沿程损失 $h_f/l = 0.006$ ，试求管内流量 Q 。

提示：本题属第二类长管问题，可利用 Moody 图作迭代运算。

答： $Q = 0.414 \text{ m}^3/\text{s}$

解： 相对粗糙度 $\varepsilon/d = 0.05/500 = 0.0001$ ，查 Moody 图完全粗糙区 $\lambda = 0.012$

$$\frac{h_f}{l} = \lambda \frac{1}{d} \frac{V^2}{2g} = 0.006$$

由达西公式

$$V = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{h_f}{l} \times 2gd \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (0.006 \times 2 \times 9.81 \times 0.5)^{1/2} = \frac{0.2426}{\sqrt{\lambda}} \text{ m/s}$$

查 20° 的水运动粘度 $\nu = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{V \times 0.5}{10^{-6}} = 5 \times 10^5 V$$

$$\text{设 } \lambda_1 = 0.012 \quad V_1 = \frac{0.2426}{\sqrt{0.012}} = 2.215 \text{ m/s}$$

$$Re_1 = \frac{V_1 d}{\nu} = 5 \times 10^5 \times 2.215 = 1.1 \times 10^6$$

查 Moody 图 $\lambda_2 = 0.0132$ ，作迭代计算

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \times 0.2426 = \frac{1}{\sqrt{0.0132}} \times 0.2426 = 2.11 \text{ m/s}$$

$$Re_2 = \frac{V_2 d}{\nu} = 5 \times 10^5 \times 2.11 = 1.055 \times 10^6$$

查 Moody 图 $\lambda_3 = \lambda_2 = 0.0132$ ，所求流量为

$$Q = \frac{1}{4} \pi d^2 V_2 = 0.25 \times \pi \times 0.5^2 \times 2.11 = 0.414 \text{ m}^3/\text{s}$$

CP3.6.8 用新铸铁管输送 25℃ 的水，流量 $Q = 300 \text{ L/s}$ ，在 $l = 1000 \text{ m}$ 长的管道上沿程损

失为 $h_f = 2 \text{ mH}_2\text{O}$ ，试求所需管道的直径 d 。

提示：本题属第三类长管问题，可利用 Moody 图作迭代运算。

答： 选管道直径为 0.6 m

解： 由速度与流量关系

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \times 300 \times 10^{-3}}{\pi d^2} = \frac{0.382}{d^2} \text{ m/s}$$

$$\text{由达西公式} \quad h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g} = \lambda \frac{1000 \times 0.382^2}{2 \times 9.81 \times d^5} = \frac{7.44\lambda}{d^5} = 2$$

可得直径与摩擦因子的关系式 $d = \sqrt[5]{3.72\lambda}$

查 25°水的运动粘度为 $\nu = 8.93 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$

直径与雷诺数的关系式为 $Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0.382}{8.93 \times 10^{-7} \times d} = \frac{4.28 \times 10^5}{d}$

查铸铁管粗糙度为 $\varepsilon = 0.26 \text{ mm}$, 相对粗糙度为 $\varepsilon/d = 2.6 \times 10^{-4}/d$

设 $\lambda = 0.027$, $d = 0.632 \text{ m}$, $\varepsilon/d = 0.00016$, $Re = 6.77 \times 10^5$, 查 Moody 图 $\lambda = 0.015$
设 $\lambda = 0.015$, $d = 0.561 \text{ m}$, $\varepsilon/d = 0.00015$, $Re = 7.63 \times 10^5$, 查 Moody 图 $\lambda = 0.015$
即需管道直径 $d = 0.561 \text{ m}$

CP3.6.9 输油管为焊接钢管 $\varepsilon = 0.046 \text{ mm}$, 管长 $l = 3000 \text{ m}$, 输送流量为 $Q = 0.25 \text{ m}^3/\text{s}$, 允许的沿程损失为 $h_f = 23 \text{ m}$, 设油的运动粘度为 $\nu = 0.093 \text{ cm}^2/\text{s}$, 试设计管径 d 至少应多大?
提示: 本题属第三类长管问题, 建立管径与摩擦系数、相对粗糙度、雷诺数的关系式, 利用 Moody 图作迭代运算。

答: $d = 0.42 \text{ m}$

解: 由达西公式

$$h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{1}{2g} \left(\frac{4Q}{\pi d^2} \right)^2 = 0.0826 \lambda l Q^2 / d^5$$

$$d^5 = 0.0826 \lambda l Q^2 / h_f = 0.0826 \times 3000 \times 0.25^2 \lambda / 23 = 0.673 \lambda$$

$$d = \sqrt[5]{0.673 \lambda} \quad (a)$$

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{4Q}{\pi d^2} \cdot \frac{d}{\nu} = \frac{4Q}{\pi d \nu} = \frac{4 \times 0.25}{\pi \times d \times 0.093 \times 10^{-4}} = 34227 / d \quad (b)$$

设 λ 值, 计算 d , Re , ε/d , 用 Moody 图作迭代计算

设 $\lambda_1 = 0.02$ $d_1 = 0.422 \text{ m}$ $Re_1 = 8.1 \times 10^4$ $\varepsilon/d_1 = 0.0001$ 查图 $\lambda_1' = 0.019$

$\lambda_2 = 0.019$ $d_2 = 0.418 \text{ m}$ $Re_2 = 8.2 \times 10^4$ $\varepsilon/d_2 = 0.0001$ 查图 $\lambda_2' = 0.019$

取 $d = 0.42 \text{ m}$

CP3.7.1 如图所示, 一突然扩大的管道, 其管径由 $d_1 = 50 \text{ mm}$ 突然扩大到 $d_2 = 100 \text{ mm}$,

管中通过流量 $Q = 4.44 \text{ L/s}$ 的水。在截面前后接一差压计, 其中充以四氯化碳

($\rho_m = 1568.9 \text{ kg/m}^3$), 读得的液面高差 $h = 173 \text{ mm}$, 试求管径突然扩大处的局部损失系

数 K , 且把求得的结果与理论计算的结果相比较。

答: $K = 0.5597$

解: $Q = 4.44 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$

$$V_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = \frac{4 \times 4.44 \times 10^{-3}}{\pi \times 0.05^2} = 2.26 \text{ m/s}$$

$$V_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2} = \frac{4 \times 4.44 \times 10^{-3}}{\pi \times 0.1^2} = 0.565 \text{ m/s}$$

$$\frac{\Delta p}{\rho g} = \left(\frac{\rho_m}{\rho} - 1 \right) h = \left(\frac{1568.9}{1000} - 1 \right) 0.173 = 0.0984 \text{ m}$$

$$h_m = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} - \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{2.26^2 - 0.565^2}{2 \times 9.81} - 0.0984 = 0.244 - 0.0984 = 0.1457 \text{ m}$$

$$K = \frac{2gh_m}{V_1^2} = \frac{2 \times 9.81 \times 0.1457}{2.26^2} = 0.5597$$

$$K = \left(1 - \frac{d_1^2}{d_2^2} \right)^2 = 0.5625$$

理论值，误差为 0.5%。

CP3.7.2 如图 CP3.6.4 所示，油从邮箱经一油管到喷雾嘴再喷入大气。油管直径 $d=5\text{mm}$ ，长 $l=1\text{m}$ 。中间装有一个过滤器 ($K_1=25$)，一个阀门 ($K_2=15$)，一个末端喷雾嘴 ($K_3=100$)。

设油的运动粘度为 $\nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ，为保证流量 $Q=0.4\text{m}^3/\text{s}$ ，试求邮箱液位高度 h 。

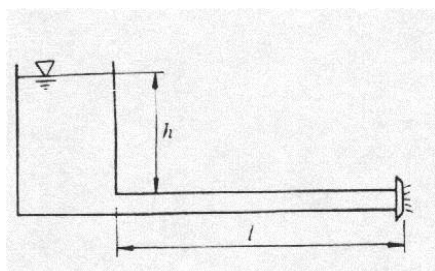


图 C3.6.4

解：

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4(0.4 \times 10^{-6})}{\pi (0.005\text{m})^2} = 0.02 \text{ m/s}$$

$$\text{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0.02 \times 0.005}{0.000015} = 6.67$$

属层流区，沿程损失为

$$h_f = \frac{64lV^2}{\text{Re} \cdot d \cdot 2g} = \frac{64}{6.67} \cdot \frac{1}{0.005} \cdot \frac{(0.02 \text{ m/s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} = 0.039$$

局部损失

$$h_m = (K_1 + K_2 + K_3) \frac{V^2}{2g} = (25 + 15 + 100) \frac{(0.02 \text{ m/s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} = 0.0029 \text{ m}$$

$$h = h_f + h_m = 0.039 + 0.0029 = 0.042 \text{ m}$$

CP3.7.3 如图 CE3.7.2 所示，上下贮水池由直径 $d=2.5\text{cm}$ ，长 $l=10\text{m}$ 新的镀锌钢管连接。中间装有两个 90° 的弯头（螺纹连接），一个球形阀（全开）。入口处为一内伸管，出口处有一个 $\theta=45^\circ$ 的渐扩管连接下贮水池壁。设水的运动粘度为 $\nu=10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ ，为保证流量 $Q=0.002\text{m}^3/\text{s}$ ，试求两水池的水位差 H 。

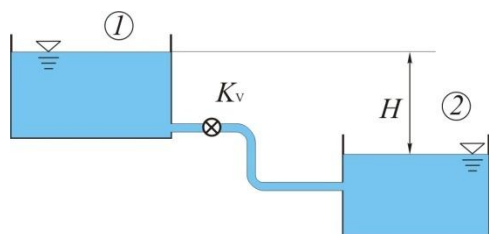


图 CE3.7.2

解：

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4(0.002\text{m}^3/\text{s})}{\pi(0.025\text{m})^2} = 4.07\text{m/s}$$

$$\text{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{(4.07\text{m/s})(0.025\text{m})}{10^{-6}\text{m}^2/\text{s}} = 1 \times 10^5$$

查 $\varepsilon = 0.25$ $\varepsilon/d = 0.25/25 = 0.01$

查图 $\lambda = 0.04$

$$h_f = \lambda \frac{lV^2}{d \cdot 2g} = 0.04 \times \frac{10\text{m}}{0.025\text{m}} \cdot \frac{(4.07\text{m/s})^2}{2(9.81\text{m/s}^2)} = 13.5\text{m}$$

入口 $K_{in}=0.8$ ，弯头查表 C3.7.1 $KD=1.5$

球阀查表 C3.7.2， $K_2=7.2$ ，渐扩管 $K_3=1.0$ ，出口 $K_{out}=1.0$

$$h_m = (K_{in} + 2K_1 + K_2 + K_3 + K_{out}) \frac{V^2}{2g} = (0.8 + 2 \times 1.5 + 7.2 + 1.0 + 1.0) \frac{(4.07\text{m/s})^2}{2(9.81\text{m/s}^2)}$$

$$= 13 \times 0.844 = 11.0\text{m}$$

$$H = h_f + h_m = 13.5 + 11.0 = 24.5\text{m}$$

CP3.8.1 截面为 $b \times h = 23 \times 23\text{cm}^2$ 的方形管，长 $l = 30\text{m}$ ，输送标准状态空气（ $\nu = 1.6 \times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$ ， $\rho = 1.23\text{kg/m}^3$ ），流量为 $Q = 0.675\text{m}^3/\text{s}$ ，设 $\varepsilon = 0.09\text{mm}$ ，试求压强降 Δp 。

提示：计算方形管的水力直径，并计算相应雷诺数和相对粗糙度，按圆管利用 Moody 图查摩擦因子，再用达西公式求沿程损失和压强降。

答： $\Delta p = 222.1\text{Pa}$

解：方形管水力直径 $dh = b = 0.23\text{m}$

平均速度

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.675}{0.23 \times 0.23} = 12.76\text{m/s}$$

$$\text{Re}_{dh} = \frac{Vd_h}{\nu} = \frac{12.76 \times 0.23}{1.6 \times 10^{-5}} = 1.83 \times 10^5$$

$$\frac{\varepsilon}{d_h} = \frac{0.09 \times 10^{-3}}{0.23} = 0.00039$$

查 Moody 图 $\lambda = 0.017$

$$h_f = \lambda \frac{l}{d_h} \frac{V^2}{2g} = 0.017 \times \frac{30}{0.23} \times \frac{12.76^2}{2 \times 9.81} = 18.4 \text{ m}$$

$$\Delta p = \rho g h_f = 1.23 \times 9.81 \times 18.4 = 222.1 \text{ Pa}$$

CP3.9.1 一梯形断面渠道，底宽 $b = 2 \text{ m}$ ，水深 $h = 0.5 \text{ m}$ ，水面宽 $B = 4.5 \text{ m}$ ，长 $l = 100 \text{ m}$ ，通过流量 $Q = 1.02 \text{ m}^3/\text{s}$ ，设曼宁粗糙系数 $n = 0.25$ 试求沿程水头损失 h_f 。

答： $h_f = 0.1 \text{ m}$

解：水的断面面积 $A = (b+B) h / 2 = 1.625 \text{ m}^2$

$$\text{湿周} \quad P = b + 2\sqrt{h^2 + (B-b)^2 / 4} = 4.693 \text{ m}$$

$$\text{水力半径} \quad r_h = \frac{A}{P} = \frac{1.625}{4.693} = 0.346 \text{ m}$$

$$\text{曼宁系数} \quad c = \frac{1}{n} r_h^{1/6} = \frac{1}{0.025} (0.346)^{1/6} = 33.5 \sqrt{\text{m/s}}$$

$$h_f = \frac{Q^2 l}{c^2 A^2 r_h} = \frac{1.02^2 \times 100}{33.5^2 \times 1.025^2 \times 0.346} = 0.1 \text{ m}$$

CP3.9.2 矩形石块铺面渠道 $n = 0.02$ ，长 $l = 50 \text{ m}$ ，要求通过流量 $Q = 2 \text{ m}^3/\text{s}$ 的水，沿程损失不得超过 $h_f = 4.5 \text{ m}$ ，按最佳宽深比 $b/h = 2$ 设计断面尺寸。

答： $b \times h = 0.86 \times 0.43 \text{ m}^2$

解：对矩形截面 $A = bh = 2h^2$

$$\text{湿周} \quad P = b + 2h = 4h$$

$$\text{水力半径} \quad r_h = A/P = 0.5h$$

$$\text{曼宁系数} \quad c = \frac{1}{n} r_h^{1/6} = \frac{1}{0.02} (0.5h)^{1/6} = 44.54 h^{1/6}$$

$$\frac{h_f}{l} c^2 A^2 r_h = Q^2$$

$$\frac{4.5}{50} \times (44.54 h^{1/6})^2 \times (2h^2)^2 \times 0.5h = 4$$

$$h^{16/3} = 0.011, \quad h = 0.43 \text{ m} \quad b = 0.86 \text{ m}$$

截面尺寸为 $b \times h = 0.86 \times 0.43 \text{ m}^2$

CP3.9.3 用三种方法判别 CP3.19 题中的水流流态。

提示：三种方法是（1）临界水深公式，（2）Fr 数公式，（3）断面比能

答：急流

解: (1) 临界水深:
$$h_k = \left(\frac{Q^2}{gb^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{4}{9.81 \times 0.86^2}\right)^{1/3} = 0.82 \text{ m}$$

$$h = 0.43 < h_k$$

(2) Fr 数:
$$Fr = \frac{Q^2}{g(bh)^2 h} = \frac{4}{9.81 \times (0.86 \times 0.43)^2 \times 0.43} = 6.9 > 1$$

(3) 断面比能: 比势能 $E_1 = h = 0.43$; 比动能为

$$E_2 = \frac{Q^2}{(bh)^2 2g} = \frac{4}{(0.86 \times 0.43)^2 \times 2 \times 9.81} = 1.49$$

$E_1 < E_2$ 三种方法均表明水流属急流。

C4 题解

CP4.2.1 来流为均流 U 的平板层流边界层内速度分布用下列函数近似, 试分别计算无量纲位移厚度 δ^*/δ 和动量厚度 θ/δ 。

$$(1) \frac{u}{U} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2; (2) \frac{u}{U} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3; (3) \frac{u}{U} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4$$

答: (1) $\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{3}, \frac{\theta}{\delta} = \frac{2}{15}$; (2) $\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{3}{8}, \frac{\theta}{\delta} = \frac{39}{280}$; (3) $\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{3}{10}, \frac{\theta}{\delta} = \frac{37}{315}$

解: (1) 设 $\eta = \frac{y}{\delta}, \frac{u}{U} = 2\eta - \eta^2$

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^1 (1 - 2\eta + \eta^2) d\eta = \left(\eta - \eta^2 + \frac{1}{3}\eta^3\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{\delta} &= \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^1 (2\eta - \eta^2)(1 - 2\eta + \eta^2) d\eta = \int_0^1 (2\eta - 5\eta^2 + 4\eta^3 - \eta^4) d\eta \\ &= \left(\eta^2 - \frac{5}{3}\eta^3 + \eta^4 - \frac{1}{5}\eta^5\right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{5}{3} + 1 - \frac{1}{5} = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

(2) $\frac{u}{U} = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3$

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta (1 - \frac{u}{U}) dy = \int_0^1 (1 - \frac{3}{2}\eta + \frac{1}{2}\eta^3) d\eta = (\eta - \frac{3}{4}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^4) \Big|_0^1 = \frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{\delta} &= \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \frac{u}{U} (1 - \frac{u}{U}) dy = \int_0^1 (\frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3) (1 - \frac{3}{2}\eta + \frac{1}{2}\eta^3) d\eta \\ &= \int_0^1 (\frac{3}{2}\eta - \frac{9}{4}\eta^2 - \frac{1}{2}\eta^3 + \frac{3}{2}\eta^4 - \frac{1}{4}\eta^6) d\eta \\ &= (\frac{3}{4}\eta^2 - \frac{3}{4}\eta^3 - \frac{1}{8}\eta^4 + \frac{3}{10}\eta^5 - \frac{1}{28}\eta^7) \Big|_0^1 = \frac{39}{280} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \frac{u}{U} = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$$

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta (1 - \frac{u}{U}) dy = \int_0^1 (1 - 2\eta + 2\eta^3 - \eta^4) d\eta = (\eta - \eta^2 + \frac{1}{2}\eta^4 - \frac{1}{5}\eta^5) \Big|_0^1 = \frac{3}{10}$$

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{\delta} &= \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \frac{u}{U} (1 - \frac{u}{U}) dy = \int_0^1 (2\eta - 2\eta^3 + \eta^4) (1 - 2\eta + 2\eta^3 - \eta^4) d\eta \\ &= \int_0^1 (2\eta - 4\eta^2 - 2\eta^3 + 9\eta^4 - 4\eta^5 - 4\eta^6 + 4\eta^7 - \eta^8) d\eta \\ &= (\eta^2 - \frac{4}{3}\eta^3 - \frac{1}{2}\eta^4 + \frac{9}{5}\eta^5 - \frac{2}{3}\eta^6 - \frac{4}{7}\eta^7 + \frac{1}{2}\eta^8 - \frac{1}{9}\eta^9) \Big|_0^1 = \frac{37}{315} \end{aligned}$$

CP4.2.2 平板湍流边界层内速度分布可用 $1/7$ 次律近似: $\frac{u}{U} = (\frac{y}{\delta})^{1/7}$, (1) 试计算无量纲位移厚度 δ^*/δ 和动量厚度 θ/δ ; (2) 将其与层流的抛物线分布 (CP4.2.1(1)) 比较大小。

提示: (2) 中计算 $(\frac{\delta^*}{\delta})_{\text{湍}} / (\frac{\delta^*}{\delta})_{\text{层}}$ 和 $(\frac{\theta}{\delta})_{\text{湍}} / (\frac{\theta}{\delta})_{\text{层}}$ 。

$$\text{答: (1) } \frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{8}, \quad \frac{\theta}{\delta} = \frac{7}{72}; \quad (2) \quad (\frac{\delta^*}{\delta})_{\text{湍}} / (\frac{\delta^*}{\delta})_{\text{层}} = \frac{3}{8}, \quad (\frac{\theta}{\delta})_{\text{湍}} / (\frac{\theta}{\delta})_{\text{层}} = \frac{35}{48}$$

$$\text{解: (1) } \frac{u}{U} = \eta^{1/7}, \quad \frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta (1 - \frac{u}{U}) dy = \int_0^1 (1 - \eta^{1/7}) d\eta = (\eta - \frac{7}{8}\eta^{8/7}) \Big|_0^1 = \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{\delta} &= \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \frac{u}{U} (1 - \frac{u}{U}) dy = \int_0^1 \eta^{1/7} (1 - \eta^{1/7}) d\eta \\ &= \int_0^1 (\eta^{1/7} - \eta^{2/7}) d\eta = (\frac{7}{8}\eta^{8/7} - \frac{7}{9}\eta^{9/7}) \Big|_0^1 = \frac{7}{72} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (\frac{\delta^*}{\delta})_{\text{湍}} / (\frac{\delta^*}{\delta})_{\text{层}} &= \frac{1}{8} / \frac{1}{3} = \frac{3}{8} \\ (\frac{\theta}{\delta})_{\text{湍}} / (\frac{\theta}{\delta})_{\text{层}} &= \frac{7}{72} / \frac{2}{15} = \frac{35}{48} \end{aligned}$$

CP4.3.1 20℃的空气以速度 $U = 3 \text{ m/s}$ 流过 $l = 0.9 \text{ m}$ 的光滑平板，(1) 试判断末端边界层流态；(2) 计算末端边界层厚度 δ_l 。

提示：(1) 边界层临界雷诺数 $Re_{cr} = 3.2 \times 10^5$ ；(2) δ_l 按布拉修斯解计算。

答： $\delta_l = 0.01 \text{ m}$

解：(1) 查 20℃ 空气 $\nu = 1.51 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$,

$$Re_l = \frac{Ul}{\nu} = \frac{(3 \text{ m/s})(0.9 \text{ m})}{1.51 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 1.79 \times 10^5 < 3.2 \times 10^5 \quad \text{层流}$$

$$(2) \quad \delta_l = 5.0 \frac{l}{\sqrt{Re_l}} = 5.0 \frac{0.9 \text{ m}}{\sqrt{1.79 \times 10^5}} = 0.01 \text{ m}$$

CP4.3.2 温度为 5℃ 的水，以 $U = 10 \text{ cm/s}$ 的速度流过光滑平板，试确定离前缘 50cm 处的板面上的切应力 τ_w 。

提示：先判断边界层内流态，再选择计算壁面切应力的公式。

答： $\tau_w = 0.0183 \text{ N/m}^2$

解：查 5℃ 水 $\nu = 1.519 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

$$Re_x = \frac{Ux}{\nu} = \frac{(0.1 \text{ m/s})(0.5 \text{ m})}{1.519 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 0.33 \times 10^5 < 3.2 \times 10^5 \quad \text{层流}$$

按布拉修斯解：

$$\tau_w = \frac{0.332 \rho U^2}{\sqrt{Re_x}} = \frac{0.332 (1000 \text{ kg/m}^3) (0.1 \text{ m/s})^2}{\sqrt{0.33 \times 10^5}} = 0.0183 \text{ N/m}^2$$

CP4.5.1 平板层流附面层内速度分布为四次曲线： $\frac{u}{U} = 2 \frac{y}{\delta} - 2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 + \left(\frac{y}{\delta} \right)^4$ ，试求 (1) 附面层厚度 $\delta(x)$ 与当地雷诺数 Re_x 的关系式；(2) 摩擦阻力系数 C_D 与平板雷诺数 Re_l (l 为板长) 的关系式。

提示：用边界层动量积分方程求解，设速度剖面表达式为 $g(\eta)$ ， $\eta = y/U$ 。

答：(1) $\delta = \frac{5.84x}{\sqrt{Re_x}}$ ；(2) $C_D = \frac{1.37}{\sqrt{Re_l}}$

解：(1) $g(\eta) = \frac{u}{U} = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \int_0^1 g(1-g) d\eta = \int_0^1 (2\eta - 2\eta^3 + \eta^4)(1 - 2\eta + 2\eta^3 - \eta^4) d\eta \\
&= \int_0^1 (2\eta - 4\eta^2 - 2\eta^3 + 9\eta^4 - 4\eta^5 - 4\eta^6 + 4\eta^7 - \eta^8) d\eta \\
&= \left(\eta^2 - \frac{4}{3}\eta^3 - \frac{1}{2}\eta^4 + \frac{9}{5}\eta^5 - \frac{2}{3}\eta^6 - \frac{4}{7}\eta^7 + \frac{1}{2}\eta^8 - \frac{\eta^9}{9} \right) \Big|_0^1 \\
&= 1 - \frac{4}{3} - \frac{1}{2} + \frac{9}{5} - \frac{2}{3} - \frac{4}{7} + \frac{1}{2} - \frac{1}{9} = \frac{37}{315} = 0.1175
\end{aligned}$$

$$\beta = g'(0) = (2 - 6\eta^2 + 4\eta^3) \Big|_{\eta=0} = 2$$

$$\delta = \frac{\sqrt{2\beta/\alpha x}}{\sqrt{Re_x}} = \frac{\sqrt{2 \times 2/0.1175 x}}{\sqrt{Re_x}} = \frac{5.84x}{\sqrt{Re_x}}, \quad Re_x = \frac{Ux}{\nu}$$

$$(2) \quad C_D = \frac{\sqrt{8\alpha\beta}}{\sqrt{Re_l}} = \frac{\sqrt{8 \times 0.1175 \times 2}}{\sqrt{Re_l}} = \frac{1.37}{\sqrt{Re_l}}, \quad Re_l = \frac{Ul}{\nu}$$

CP4.5.2 在相同的雷诺数 Re_l 下，试求 20°C 和 30°C 的空气流过长度为 l 的光滑平板时产生的摩擦阻力之比。

提示：对光滑平板边界层流动，相同的雷诺数具有相同的阻力系数 C_D 。

答：FD 1 / FD 2 = 0.92

$$\text{解：} \quad F_D = C_D \frac{1}{2} \rho U^2 bl$$

对同一光滑平板绕流时，相同雷诺数 Re_l 的阻力系数 C_D 相同。两种空气状态的摩擦阻力之比为 $FD_1 / FD_2 = \rho_1 U_1^2 / \rho_2 U_2^2$

$$\text{由雷诺数相等} \quad \frac{U_1 l}{\nu_1} = \frac{U_2 l}{\nu_2} \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\mu_1 \rho_2}{\mu_2 \rho_1}$$

$$FD_1 / FD_2 = \rho_1 U_1^2 / \rho_2 U_2^2 = \nu_1 \mu_1 / \nu_2 \mu_2$$

$$\text{查 } 20^\circ\text{C} \text{ 空气 } \mu_1 = 1.82 \times 10^{-5} \text{ N}\cdot\text{s/m}^2 \quad \nu_1 = 1.51 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$30^\circ\text{C} \text{ 空气 } \mu_2 = 1.86 \times 10^{-5} \text{ N}\cdot\text{s/m}^2 \quad \nu_2 = 1.60 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$FD_1 / FD_2 = 1.82 \times 1.51 / 1.86 \times 1.60 = 0.92$$

CP4.5.3 一光滑薄平板，长宽各为 1 m ，水平放置在水平均流场中，流速为 0.48 m/s ，水温为 5°C 。(1) 验证平板边界层属层流状态；试求：(2) 平板末端边界层厚度 δ_l ；(3) 用布拉修斯壁面切应力公式推导单面摩擦阻力公式，并求其大小 FD 。

提示：单面摩擦阻力是壁面切应力再平板单面上的积分。

$$\text{答：} \quad \delta_L = 0.009 \text{ m}, \quad F_D = 0.27 \text{ N}$$

解：(1) 查 5°C 的水， $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ， $\mu = 1.519 \times 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{s/m}^2$ ， $\nu = 1.519 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

$$Re_l = \frac{Ul}{\nu} = \frac{(0.48 \text{ m/s})(1 \text{ m})}{1.519 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 3.16 \times 10^5 < 3.2 \times 10^5 \quad \text{为层流边界层}$$

$$(2) \delta_l = 5.0l / \sqrt{Re_l} = 5.0(1\text{m}) / \sqrt{3.16 \times 10^5} = 0.009\text{m}$$

$$(3) F_D = b \int_0^l \tau_w dx = b \int_0^l 0.332U \sqrt{\rho\mu U / x} dx$$

$$= 0.332bU \sqrt{\rho\mu U} \int_0^l x^{-0.5} dx = 0.664bU \sqrt{\rho\mu Ul}$$

$$F_D = 0.664(1\text{m})(0.48\text{m/s}) \sqrt{(10^3 \text{kg/m}^3)(1.519 \times 10^{-3} \text{N} \cdot \text{s/m}^2)(0.48\text{m/s})(1\text{m})}$$

$$= 0.27\text{N}$$

CP4.5.4 20°C 的水以速度 $v = 1\text{m/s}$ 流过 $L = 1\text{m}$ 长的光滑平板, (1) 试判断尾缘边界层流

态; (2) 计算尾缘边界层厚度 δ_L ; (3) 单面摩擦阻力 F_D 。

提示: (1) 边界层临界雷诺数为 $Re_{cr} = 3.2 \times 10^5$;

(2) 平板摩擦阻力可用壁面切应力积分公式计算, 也可从平板阻力系数曲线查 CD 后计算。

答: $\delta_L = 0.024\text{m}$; $F_D = 2.33\text{N}$

解: (1) 查 20°C 的水 $\rho = 998.2 \text{kg/m}^3$ $\nu = 1.0 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$

$$Re_l = \frac{Ul}{\nu} = \frac{(1\text{m/s})(1\text{m})}{1.0 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}} = 1 \times 10^6 > 3.2 \times 10^5$$

为湍流边界层

(2) 按 (C 4.5.14 b) 式估算末端边层厚度

$$\delta_l = \frac{0.382l}{(Re_l)^{1/5}} = \frac{0.382(1\text{m})}{(10^6)^{1/5}} = 0.024\text{m}$$

(3) 按 (C4.5.17) 式计算平板阻力

$$F_D = 0.037 l b \rho U^2 / Re_l^{1/5} = 0.037(1 \times 1\text{m}^2) (998.2 \text{kg/m}^3) (1\text{m/s})^2 / (1 \times 10^6)^{1/5} = 2.33 \text{N}$$

CP4.5.5 设光滑平板湍流边界层内速度剖面为 1/6 指数律, $u/U = (y/\delta)^{1/6}$, 壁面切应力取

$$\tau_w = 0.0233 \rho U^2 \left(\frac{\mu}{\rho U \delta} \right)^{1/4}$$

试用动量积分方程推导(1)边界层厚度 δ/x , (2)壁面摩擦系数 C_f 的表达式, 并与 1/7 指数律比较。

提示: 先用动量积分方程推导边界层厚度表达式, 再代入壁面切应力公式中求解 C_f 。

答: $\frac{\delta}{x} = \frac{0.352}{Re_x^{1/5}}, C_f = \frac{0.0604}{Re_x^{1/5}}$

$$\theta = \delta \int_0^1 \eta^{1/6} (1 - \eta^{1/6}) d\eta = \delta \left(\frac{6}{7} \eta^{7/6} - \frac{3}{4} \eta^{4/3} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{28} \delta$$

解: (1) 动量厚度

$$\tau_w = 0.0233 \rho U^2 (\mu / \rho U \delta)^{1/4} = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} = \rho U^2 \frac{3}{28} \frac{d\delta}{dx}$$

由动量积分方程

$$\delta^{1/4} d\delta = 0.217 \left(\frac{\mu}{\rho U} \right)^{1/4} dx$$

整理得

$$0.8 \delta^{5/4} = 0.217 \left(\frac{\mu}{\rho U} \right)^{1/4} x + C$$

积分可得

$$\text{在 } x=0 \text{ 处, } \delta=0, C=0$$

$$\delta = 0.352 \left(\frac{\mu}{\rho U} \right)^{1/5} x^{4/5}$$

$$\frac{\delta}{x} = 0.352 \left(\frac{\mu}{\rho U x} \right)^{1/5} = \frac{0.352}{Re_x^{1/5}}$$

或

(2) 将 δ 表达式代入壁面切应力式可得

$$\begin{aligned} \tau_w &= 0.0233 \rho U^2 \left(\frac{\mu}{\rho U x} \right)^{1/4} \left(\frac{x}{\delta} \right)^{1/4} = 0.0233 \rho U^2 \frac{1}{Re_x^{1/4}} \frac{(Re_x^{1/5})^{1/4}}{(0.352)^{1/4}} \\ &= 0.0302 \rho U^2 / Re_x^{1/5} \end{aligned}$$

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{0.0604}{Re_x^{1/5}}$$

即

CP4.5.6 20℃的水以速度 $U = 1 \text{ m/s}$ 流过长宽各为 1 m 的光滑平板, 试用 $1/6$ 指数律速度剖面推导的计算公式, 计算(1) 平板末端边界层厚度 δ_l ; (2) 单面摩擦阻力 F_D , 并与 CP4.5.4 题(按 $1/7$ 指数律计算)相比较。

提示: 利用 CP4.5.5 的壁面切应力公式, 再平板单面上积分求摩擦阻力 F_D 。

$$\text{答: } \delta_L = 0.022 \text{ m}; F_D = 2.38 \text{ N}$$

解: (1) 20℃的水 $\rho = 998.2 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

$$Re_l = \frac{Ul}{\nu} = \frac{(1 \text{ m/s})(1 \text{ m})}{1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 1 \times 10^6$$

由 CP4.5.5 题

$$\delta_l = \frac{0.352l}{Re_l^{1/5}} = \frac{0.352(1 \text{ m})}{(1 \times 10^6)^{1/5}} = 0.022 \text{ m}$$

与 CP4.5.4 题比较误差为 8.3%

(2) 由 CP4.5.5 题 $\tau_w = 0.0302 \rho U^2 / Re_x^{1/5}$

$$\begin{aligned} F_D &= b \int_0^l \tau_w dx = 0.0302 b \rho U^2 \int_0^l \left(\frac{\mu}{\rho U x} \right)^{1/5} dx \\ &= 0.0302 b \rho U^2 \left(\frac{\mu}{\rho U} \right)^{1/5} \left(\frac{5}{4} l^{4/5} \right) = 0.0378 b l \rho U^2 / Re_l^{1/5} \end{aligned}$$

代入数据可得

$$F_D = 0.0378 (1 \times 10^{-2}) (998.2 \text{ kg/m}^3) (1 \text{ m/s})^2 / (1 \times 10^{-6})^{1/5} = 2.38 \text{ N}$$

与 CP 4.5.4 题比较误差为 2.1%

CP4.7.1 一光滑圆球直径为 $d = 40 \text{ mm}$ ，质量为 $m = 50 \text{ g}$ ，将其在 20°C 水中从静止下落，先设阻力系数 $C_D = 0.4$ ，利用圆球阻力曲线(图 C4.7.9)，试求 (1) 末端速度 (达到匀速下降)

V_0 ; (2) 相应的雷诺数 Re_d 。

提示：利用力的平衡关系求末端速度 V_0 与阻力系数 C_D 的关系式，再用迭代法求解。

答： $V_0 = 0.767 \text{ m/s}$; $Re_d = 3.1 \times 10^4$

解： (1) 20°C 的水 $\rho = 998.2 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 。

达到末端速度时圆球绕流阻力 F_D 加浮力 F_b 与圆球重量 mg 平衡

$$F_D = \frac{1}{2} \rho V_0^2 \frac{\pi}{4} d^2 C_D, \quad F_b = \rho g \frac{1}{6} \pi d^3, \quad \text{由 } F_D + F_b = mg$$

$$C_D 0.5 (998.2 \text{ kg/m}^3) V_0^2 \frac{\pi}{4} (0.04 \text{ m})^2 + (998.2 \text{ kg/m}^3) (9.81 \text{ m/s}^2) \frac{\pi}{6} (0.04 \text{ m})^3 \\ = (50 \times 10^{-3} \text{ kg}) (9.81 \text{ m/s}^2)$$

$$C_D \cdot 0.627 V_0^2 + 0.328 = 0.49$$

$$V_0 = \frac{0.51}{\sqrt{C_D}} \text{ m/s}$$

$$\text{设 } C_D = 0.4, \quad V_{01} = 0.804 \text{ m/s}, \quad Re_1 = \frac{V_0 d}{\nu} = \frac{(0.804 \text{ m/s})(0.04 \text{ m})}{1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 3.2 \times 10^4$$

查圆球阻力曲线， $C_D = 0.44$ 作迭代计算

$$V_{02} = 0.767 \text{ m/s}, \quad Re_2 = \frac{(0.767 \text{ m/s})(0.04 \text{ m})}{1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 3.1 \times 10^4$$

查图 $C_D = 0.44$ ，所求末端速度为 $V_0 = 0.767 \text{ m/s}$ 。

CP4.7.2 一光滑圆球 $d = 50 \text{ mm}$ ，比重 $SG = 1.3$ ，在大气中作下落运动，设大气状态为 $T = 20^\circ\text{C}$ ， $p = 101 \text{ kPa (ab)}$ ，利用圆球阻力曲线(图 C4.7.9)，试估算末端速度 V_0 。

提示：利用力的平衡关系求末端速度 V_0 与阻力系数 C_D 的关系式，再用迭代法求解。

答： $V_0 = 37.6 \text{ m/s}$

解：大气参数为 $\rho = 1.204 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 1.51 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ，球的密度 $\rho_1 = 1.3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，由于球的密度远大于空气的密度，空气浮力可忽略不计，达到末端速度时阻力与重量平衡

$$\frac{1}{2} \rho V_0^2 \frac{\pi}{4} d^2 C_D = \rho_1 g \frac{1}{6} \pi d^3$$

$$0.5(1.204 \text{ kg/m}^3) V_0^2 \frac{\pi}{4} (0.05 \text{ m})^2 C_D = (1.3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2) \frac{\pi}{6} (0.05 \text{ m})^3$$

$$1.182 \times 10^{-3} C_D V_0^2 = 0.835$$

$$V_0 = \frac{26.6}{\sqrt{C_D}} \text{ m/s}$$

$$\text{设 } C_D = 0.45, \quad V_{01} = \frac{26.6 \text{ m/s}}{\sqrt{0.45}} = 39.65 \text{ m/s}$$

$$Re_1 = \frac{V_0 d}{\nu} = \frac{(39.65 \text{ m/s})(0.05 \text{ m})}{1.51 \times 10^{-5}} = 1.32 \times 10^5$$

$$\text{查圆球阻力曲线 } C_D = 0.5, \quad V_{02} = \frac{26.6 \text{ m/s}}{\sqrt{0.5}} = 37.6 \text{ m/s}$$

$$Re_2 = \frac{(37.6 \text{ m/s})(0.05 \text{ m})}{1.51 \times 10^{-5}} = 1.25 \times 10^5$$

查圆球阻力曲线 $C_D = 0.5$ ，末端速度为 $V_0 = 37.6 \text{ m/s}$

CP4.7.3 设高尔夫球直径为 $d = 42.7 \text{ mm}$ ，质量为 $m = 45.9 \text{ g}$ 。将其在水中从静止下落，

设 $C_D = 0.5$ ，水的密度为 $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，运动粘度为 $\nu = 1 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ 。试求（1）末端

速度 V_t （匀速下降）；（2）从开始到速度达到 $0.95 V_t$ 时走过的距离 S_1 。

提示：按牛顿第二定律建立速度与距离的微分方程 $F = m \frac{dv}{dt} = mv \frac{dv}{ds}$ ，从速度为零到

$0.95 V_t$ 积分方程可得走过的距离 S_1 。

答： $V_t = 0.373 \text{ m/s}$ ； $S_1 = 0.3 \text{ m}$

解：（1）当球的阻力 $F_D = C_D \frac{1}{2} \rho V_t^2 A$ 与浮力 $F_b = \rho g \frac{\pi}{6} d^3$ 之和与重力 $W = mg$ 达到平衡时

$$C_D \frac{1}{2} \rho V_t^2 A + \rho g \frac{\pi}{6} d^3 = mg \quad (\text{a})$$

$$C_D 0.5 \times 1000 V_t^2 \times \frac{\pi}{4} \times 0.0427^2 + 1000 \times 9.81 \times \frac{\pi}{6} \times 0.0427^3 = 43.9 \times 10^{-3} \times 9.81$$

$$0.716 C_D V_t^2 + 0.4 = 0.45 \quad (\text{b})$$

$$V_t = \frac{0.264}{\sqrt{C_D}} \text{ m/s} \quad (\text{c})$$

$$\text{设 } C_D = 0.5, \quad V_t = 0.373 \text{ m/s}$$

(2) 球的运动方程为

$$W - F_D - F_b = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = mv \frac{dv}{ds} \quad (\text{d})$$

$$\text{由 (b) 式 } (C_D = 0.5)$$

$$W - F_D - F_b = 0.05 - 0.358V^2$$

由 (d) 式积分

$$\int_0^{0.95V_t} \frac{mVdV}{0.05 - 0.358V^2} = \int_0^{S_1} dS$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{-m}{0.358} \ln(0.05 - 0.358V^2) \Big|_0^{0.95V_t} \\ &= \frac{m}{0.358} \ln \frac{0.05}{0.05 - 0.358(0.95V_t)^2} = \frac{m}{0.358} \ln \frac{1}{1 - \frac{0.358V_t^2 \times 0.95^2}{0.05}} \end{aligned}$$

$$\text{由 (b) 式 } \frac{0.358V_t^2}{0.05} = 1$$

$$S_1 = \frac{m}{0.358} \ln \frac{1}{1 - 0.95^2} = \frac{4.59 \times 10^{-3}}{0.358} \times 2.33 = 0.3 \text{ m}$$

CP4.8.1 某圆形射流喷口，直径为 $d_0 = 2r_0 = 0.5 \text{ m}$ ，送风量为 $Q_0 = 6 \text{ m}^3/\text{s}$ 。设射流扩散角公式为 $\tan \theta = \phi \alpha$ ，取 $\alpha = 0.08$ ， $\phi = 3.4$ 。试求 (1) 射流扩散角 θ 和喷口平均速度 u_0 ；(2) 离喷口距离 $x_1 = 3 \text{ m}$ 和 $x_2 = 5 \text{ m}$ 处的射流半径 r_1 和 r_2 ；(3) x_1 和 x_2 处的轴线速度 u_{m1} 和 u_{m2} ；(4) x_1 和 x_2 处的流量增长系数 $k_1 = Q_1/Q_0$ ， $k_2 = Q_2/Q_0$ 。

提示：用射流外边界方程求射流半径，按轴对称射流公式计算 u_m 和 Q 。

$$\text{答： } \theta = 15.2^\circ, \quad u_0 = 30.56 \text{ m/s}; \quad r_1 = 0.816 \text{ m}, \quad r_2 = 1.36 \text{ m};$$

$$u_{m1} = 25.58 \text{ m/s}, \quad u_{m2} = 15.35 \text{ m/s}; \quad k_1 = 1.86, \quad k_2 = 3.1$$

解：(1) $\tan \theta = \alpha \phi = 0.08 \times 3.4 = 0.272$, $\theta = 15.2^\circ$

$$u_0 = \frac{4Q}{\pi d_0^2} = \frac{4(6 \text{ m}^3/\text{s})}{\pi (0.5 \text{ m})^2} = 30.56 \text{ m/s}$$

$$(2) r_1 = x_1 \tan \theta = (3 \text{ m}) 0.272 = 0.816 \text{ m}$$

$$r_2 = x_2 \tan \theta = (5 \text{ m}) 0.272 = 1.36 \text{ m}$$

(3) 由 (C4.8.18) 式

$$u_{m1} = \frac{r_0 u_0}{0.366 r_1} = \frac{(0.25\text{m})(30.56\text{m/s})}{0.366(0.816\text{m})} = 25.58\text{m/s}$$

$$u_{m2} = \frac{r_0 u_0}{0.366 r_2} = \frac{(0.25\text{m})(30.56\text{m/s})}{0.366(1.36\text{m})} = 15.35\text{m/s}$$

(4) 由 (C4.8.21) 式 $Q = 0.155 \times Q_0 / r_0$

$$k_1 = \frac{Q_1}{Q_0} = 0.155 x_1 / r_0 = 0.155(3\text{m}) / (0.25\text{m}) = 1.86$$

$$k_2 = \frac{Q_2}{Q_0} = 0.155 x_2 / r_0 = 0.155(5\text{m}) / (0.25\text{m}) = 3.1$$

CP 4.8.2 某平面射流喷嘴, 厚度为 $2b_0 = 0.5\text{m}$ (设宽度为 1), 喷嘴平均速度为 $u_0 = 30.56\text{m/s}$ 。射流扩散角公式为 $\tan \theta = \alpha \Phi$, 取 $\alpha = 0.11$, $\Phi = 2.44$ 。试求 (1) 射流扩散角 θ ; (2) 离喷嘴距离 $x_1 = 3\text{m}$, $x_2 = 5\text{m}$ 处的射流半厚度 b_1 和 b_2 ; (3) x_1 和 x_2 处的轴线速度 u_{m1} 和 u_{m2} ; (4) x_1 和 x_2 处的流量增长系数 $k_1 = Q_1 / Q_0$ 和 $k_2 = Q_2 / Q_0$ (Q_0 为喷嘴流量)。将本题结果与 CP4.8.1 作比较。

提示: 用射流外边界方程求射流半径, 按平面射流公式计算 u_m 和 Q 。

答: $\theta = 15^\circ$; $b_1 = 0.805\text{m}$, $b_2 = 1.342\text{m}$;

$$u_{m1} = 30.30\text{m/s}, \quad u_{m2} = 23.46\text{m/s}; \quad k_1 = 1.3, \quad k_2 = 1.68$$

解: (1) $\tan \theta = \alpha \Phi = 0.11(2.44) = 0.2684$, $\theta = 15^\circ$

$$(2) b_1 = x_1 \tan \theta = (3\text{m}) 0.2684 = 0.805\text{m}$$

$$b_2 = x_2 \tan \theta = (5\text{m}) 0.2684 = 1.342\text{m}$$

(3) 由 (C4.8.13) 式

$$u_{m1} = \frac{u_0}{\sqrt{0.316 b_1 / b_0}} = \frac{30.56\text{m/s}}{\sqrt{0.316(0.805\text{m}) / (0.25\text{m})}} = 30.30\text{m/s}$$

$$u_{m2} = \frac{u_0}{\sqrt{0.316 b_2 / b_0}} = \frac{30.56\text{m/s}}{\sqrt{0.316(1.342\text{m}) / (0.25\text{m})}} = 23.46\text{m/s}$$

(4) 由 (C4.8.16 式)

$$k_1 = Q_1 / Q_0 = 0.375 \sqrt{x_1 / b_0} = 0.375 \sqrt{(3\text{m}) / (0.25\text{m})} = 1.3$$

$$k_2 = Q_2 / Q_0 = 0.375 \sqrt{x_2 / b_0} = 0.375 \sqrt{(5\text{m}) / (0.25\text{m})} = 1.68$$

讨论: 计算表明在相同的喷嘴速度和口径条件下, 平面射流轴线速度的沿程衰减程度比轴对称流小, 而且平面射流沿程流量增长率也比轴对称流小。

CP4.8.3 浓度为 c_0 的废气通过一口径为 $d = 0.1\text{m}$ 的排放口, 以流量 Q_0 喷射到清洁空气中。由于射流的卷吸作用, 随着射流喷射距离的增加, 射流截面上废气浓度逐渐降低。试求 (1) 排放口形状应采用圆形还是方形对降低废气浓度有利? (2) 当射流截面上的浓度降低为 $0.01c_0$ 时, 该截面离喷嘴的距离 x , 忽略初始段长度。

提示：按废气质量不变求不同截面上的流量比，再利用轴对称射流公式计算距离 x 。

答： $x = 32.26\text{m}$

解：设（1）对相同喷口速度和喷口口径条件下圆孔射流的卷吸能力比方孔强，因此应采用圆形喷口。

（2）设射流任一截面的浓度为 c ，由废气质量不变 $c_0 Q_0 = c Q$

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{c_0}{c} = \frac{c_0}{0.01c_0} = 100$$

由（C4.8.21）式

$$\frac{Q}{Q_0} = 0.155x/0.5d$$

$$x = \frac{0.5d}{0.155} \frac{Q}{Q_0} = \frac{(0.05\text{m})100}{0.155} = 32.26\text{m}$$

忽略初始段长度，截面离喷口距离为 32.26m。

C5 题解

CP5.2.1 假定在北极 -50°C 环境中从科学考察船上发出一信号，听到一座冰山的回声时间为 2.5 秒，试估计冰山离船的距离 L 。

提示：听到回声时已经历了来回路程。

答： $L=374.2\text{m}$

解： $\gamma=1.4$, $R=287\text{m}^2/\text{s}^2\cdot\text{K}$, $T=(273-50)\text{K}=223\text{K}$

$$c = \sqrt{\gamma RT} = 299.33\text{m/s}$$

$$L = c \times t / 2 = 374.2\text{m}$$

CP5.2.2 在温带 $T=27^\circ$ 下能飞行 $M_1=2$ 的飞机，若飞到空气温度为 $T=40^\circ\text{C}$ 的赤道上空，

此时的飞行马赫数 M_2 为多大？

提示：飞行速度保持不变。

答： 马赫数降低为 $M_2=1.96$

解： 常温下， $T=273+27=300\text{K}$

$$c_1 = \sqrt{\gamma RT_1} = 347.2\text{m/s}$$

$$V_1 = c_1 M_1 = 694.4\text{m/s}$$

速度保持不变，在 40° 环境下

$$c_2 = \sqrt{\gamma RT} = \sqrt{1.4 \times 287 \times (273 + 40)} = 354.6 \text{ m/s}$$

$$M_2 = V_1 / c_2 = 1.96$$

CP5.2.3 某信号器以声速 c 沿 x 轴自左向右作直线运动，设坐标单位为 cm ，信号器当前位置在点 $(2, 0)$ 。若信号器自 9 秒钟前开始逐秒发出信号“1”，“2”，“3”……直到当前是“10”，试以作图法求 $(4, 0)$ 和 $(0, 4)$ 两点处：(1) 已听到的信号；(2) 以后 3 秒内听到的信号。

提示：(1) 声波右波阵面形成平面马赫数，相切的各球形波阵面的球心和半径均差一个坐标单位；

(2) 分别计算 3 秒内发声点与 $(4, 0)$ 和 $(0, 4)$ 两点的距离。

答：(1) $(4, 0)$ 没听到信号； $(0, 4)$ 已听到“1、2、3、4、5”五个信号。

(2) $(4, 0)$ 听到全部十个信号； $(0, 4)$ 又听到“6、7、8”三个信号。

解：(作图)

$$\frac{\rho_B}{\rho_0}$$

CP5.3.1 已知某机翼表面 A、B 两点的 M 数分别为 0.3, 0.5，试求两点密度变化率 $\frac{\rho_B}{\rho_0}$ 。

题示：可按等熵流公式计算，也可直接查等熵流表。

答：0.9255

解： $M_A = 0.3$, $M_B = 0.5$ ；按等熵流公式

$$\frac{\rho_A}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_A^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} = (1 + 0.2 M_A^2)^{-2.5} = (1 + 0.2 \times 0.3^2)^{-2.5} = 0.95638$$

$$\frac{\rho_B}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_B^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} = (1 + 0.2 M_B^2)^{-2.5} = (1 + 0.2 \times 0.5^2)^{-2.5} = 0.88517$$

$$\frac{\rho_B}{\rho_A} = \frac{0.88517}{0.95638} = 0.9255$$

查附录表 C5.3.1 等熵流气动函数表可得相同结果：

$$M_A = 0.3 \Rightarrow \frac{\rho_A}{\rho_0} = 0.95638; \quad M_B = 0.5 \Rightarrow \frac{\rho_B}{\rho_0} = 0.88517$$

CP5.3.2 在等熵流场中的一条流线上，点 1 的马赫角 $\alpha_1 = 31^\circ$ ，点 2 的马赫角 $\alpha_2 = 36^\circ$ ，

$$\frac{p_1}{p_0}$$

试求两点处压强比 $\frac{p_1}{p_2}$ 。

提示：利用马赫角与马赫数的关系，用等熵流公式或查表求解。

答：0.692

$$M_1 = \frac{1}{\sin \alpha_1} = \frac{1}{\sin 31^\circ} = 1.94$$

解：，查等熵流气动函数表 $p_1 / p_0 = 0.14028$

$$M_2 = \frac{1}{\sin \alpha_2} = \frac{1}{\sin 36^\circ} = 1.70, \text{ 查等熵流气动函数表 } p_2 / p_0 = 0.20259$$

$$p_1 / p_2 = 0.14028 / 0.20259 = 0.692$$

CP5.3.3 用毕托管测量空气流速,测得的静压 $p = 8.11 \times 10^4 \text{ Pa}$, 总静压差为 $2.03 \times 10^4 \text{ Pa}$,

滞止温度为 27°C , (1)求流速 V ; (2)与按不可压缩流体模型计算结果比较。

提示: (1)按等熵流伯努利方程及等熵气体状态方程求解; (2)不可压缩流体为 $\rho = \text{常数}$ 。

答: (1) $V = 193.08 \text{ m/s}$; (2)误差为 3.8% 。

解: $p = 8.11 \times 10^4 \text{ Pa}$, $p_0 = (8.11 + 2.03) \times 10^4 \text{ Pa} = 10.14 \times 10^4 \text{ Pa}$,

$$T_0 = (273 + 27) \text{ K} = 300 \text{ K}$$

$$(1) \text{ 等熵流伯努利方程 } \frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} RT = \frac{\gamma}{\gamma-1} RT_0 \quad (a)$$

$$\text{由等熵气体状态方程 } \frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$T = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_0 = \left(\frac{8.11}{10.14} \right)^{0.4} \times 300 \text{ K} = 281.45 \text{ K}$$

$$\text{由 (a) 式 } V = \sqrt{\frac{2\gamma R}{\gamma-1} (T_0 - T)} = 193.08 \text{ m/s}$$

$$(2) \text{ 按不可压缩流体模型, 本题中空气的密度可由下式确定: } \rho = \frac{p_0}{RT_0} = \text{常数}$$

$$\text{由伯努利方程 } p + \frac{1}{2} \rho V^2 = p_0$$

$$V = \sqrt{2(p_0 - p) \frac{1}{\rho}} = \sqrt{2RT_0 \left(1 - \frac{p}{p_0} \right)} = \sqrt{2 \times 287 \times 300 \left(1 - \frac{8.11}{10.14} \right)} = 185.67 \text{ m/s}$$

$$\text{两者误差为 } \frac{193.08 - 185.67}{193.08} = 0.038$$

CP5.3.4 证明在等熵流场中任一点处:

$$(1) \frac{T}{T^*} = \frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)M^2}; \quad (2) \frac{p}{p^*} = \left(\frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)M^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

提示：由滞止状态参数和临界状态参数表示的等熵流气动函数导出

$$\text{解：(1)} \quad \frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1}; \quad \frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma+1}$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{T/T_0}{T^*/T_0} = \frac{\gamma+1}{2\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)} = \frac{\gamma+1}{2 + (\gamma-1)M^2};$$

$$\text{(2)} \quad \frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{p}{p^*} = \frac{p/p_0}{p^*/p_0} = \left(\frac{\gamma+1}{2 + \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{\gamma+1}{2 + (\gamma-1)M^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

CP5.3.5 有一真空箱从大气吸气,当大气温度为 288K 时,箱中最大理论速度 $V_{\max}$ 为多大?

提示：最大理论速度为温度等熵地降为绝对零度时的速度,这里大气温度是滞止温度。

答：760.78 m/s

解：滞止温度为 $T_0 = 288\text{K}$

由等熵流伯努利方程

$$\frac{V_{\max}^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} RT_0$$

$$V_{\max} = \sqrt{2 \frac{\gamma}{\gamma-1} RT_0} = \sqrt{2 \times \frac{1.4}{0.4} \times 287 \times 288} = 760.78 \text{m/s}$$

CP5.4.1 一贮气罐参数为 $p_0 = 170 \text{ kPa}$, $T_0 = 300 \text{ K}$, 罐内空气通过一收缩管咀流入大气。

设管咀出口截面积 $A_e = 0.015 \text{ m}^2$, 罐外压强为 $p_b = 101 \text{ kPa}$, 不计流动损失, 试求质流量 $\dot{m}$ 。

提示：先检验出口截面是否达到临界状态；若未达到按等熵流计算出口速度,按等熵流状态方程计算密度,再求质流量；或直接按 (C5.4.15) 式计算。

$$\text{解：} \quad \frac{p_b}{p_0} = \frac{101}{170} = 0.594 > \frac{p^*}{p_0} = 0.528 \quad (\gamma = 1.4)$$

说明出口截面未达声速, $p_e = p_b$ 。

由等熵流状态方程

$$\frac{T_e}{T_0} = \left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{101}{170}\right)^{\frac{0.4}{1.4}} = 0.8618$$

由等熵流伯努利方程

$$c_p T_e + \frac{V_e^2}{2} = c_p T_0$$

$$V_e = \sqrt{2c_p(T_0 - T_e)} = \sqrt{2c_p T_0 \left(1 - \frac{T_e}{T_0}\right)}$$

$$= \sqrt{2(1004 \text{ J/kg} \cdot \text{K})(300 \text{ K})(1 - 0.8618)} = 288.5 \text{ m/s}$$

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = \frac{170 \text{ kPa}}{(287 \text{ J/kg} \cdot \text{K})(300 \text{ K})} = 1.974 \text{ kg/m}^3$$

$$\frac{\rho_e}{\rho_0} = \left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{1/\gamma} = \left(\frac{101}{170}\right)^{1/1.4} = 0.6894$$

$$\dot{m} = V_e \rho_e A_e = 0.6894 \rho_0 V_e A_e$$

$$= 0.6894(1.974 \text{ kg/m}^3)(288.5 \text{ m/s})(0.015 \text{ m}^2) = 5.89 \text{ kg/s}$$

解 2:

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = \frac{170 \text{ kPa}}{(287 \text{ J/kg} \cdot \text{K})(300 \text{ K})} = 1.974 \text{ kg/m}^3$$

按 (C5.4.15) 式

$$\dot{m} = \rho_0 A \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[\left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right] \right\}^{1/2}$$

$$= 1.974 \times 0.015 \left\{ 7 \times \frac{170 \times 10^3}{1.974} \left[\left(\frac{101}{170}\right)^{2/1.4} - \left(\frac{101}{170}\right)^{2.4/1.4} \right] \right\}^{1/2}$$

$$= 1.974 \times 0.015 \{ 602.84 \times 10^3 (0.4753 - 0.4096) \}^{1/2}$$

$$= 1.974 \times 0.015 \times 199.0 = 5.89 \text{ kg/s}$$

CP5.4.2 某风洞收缩喷管，出口面积 $A_e = 0.03 \text{ m}^2$ 。风洞内总压强 $p_0 = 1.8 \times 10^5 \text{ Pa}$ ， $T_0 = 330 \text{ K}$ ，喷管外的压强 $p_b = 90 \text{ kPa}$ ，若不计流动损失，试计算 (1) 喷管出口气流速度 V_e (2)

通过喷管的空气质流量 $\dot{m}$ 。

提示：先检验出口截面是否达到临界状态，若达到临界状态外背压下降不再影响喷管内流动，质流量达最大值；若未达到临界状态，则按等熵流计算。

解：

$$\frac{p_b}{p_0} = \frac{90}{180} = 0.5 < \frac{p^*}{p_0} = 0.528 \quad (\gamma = 1.4) \text{ 说明出口已达临界状态。}$$

由 (C5.3.14a) 式 $\frac{T^*}{T_0} = 0.833$, $T^* = 0.833(330 \text{ K}) = 274.9 \text{ K}$

$$V_e = c^* = \sqrt{\gamma RT^*} = \sqrt{1.4(287 \text{ J/kg} \cdot \text{K})(274.9 \text{ K})} = 332.5 \text{ m/s}$$

(2)

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = \frac{180 \text{ kPa}}{(287 \text{ J/kg} \cdot \text{K})(330 \text{ K})} = 1.9 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{由 (C5.3.14c) 式 } \frac{\rho^*}{\rho_0} = 0.634, \quad \rho^* = 0.634(1.9 \text{ kg/m}^3) = 1.205 \text{ kg/m}^3$$

$$\dot{m} = \rho^* c^* A^* = (1.205 \text{ kg/m}^3)(332.5 \text{ m/s})(0.03 \text{ m}^2) = 12.02 \text{ kg/s}$$

解 2: (1) 直接按 (C5.4.15) 式

$$V_e = 18.3\sqrt{T_0} = 18.3 \times \sqrt{330} = 332.4 \text{ m/s}$$

(2) 按 (C5.4.15) 式

$$\dot{m} = 0.6847\sqrt{p_0 \rho_0} A_e = 0.6847\sqrt{1.8 \times 10^5 \times 1.9} \times 0.03 = 12.01 \text{ kg/s}$$

CP5.4.3 有一超声速喷管, 其出口面积是喉部面积的 2.5 倍, 试按 p_b/p_0 满足下列条件时, 判断管内外的流动情况。

06; (2) 0.9725; (3) 0.6; (4) 0.528; (5) 0.3。

提示: 按该拉伐尔喷管的面积比, 计算特征压强比 $p_c/p_0, p_j/p_0$ 然后再作判断。

解: 查等熵流气动函数表, 相应于 $A/A^* = 2.5$ 有两个 M 数, 及两套参数:

$$M_1 = 0.24, \quad p_c/p_0 = 0.96070$$

$$M_2 = 2.444, \quad p_g/p_0 = 0.06462$$

(1) $p_b/p_0 = 0.06 < 0.06462$, 表示喉部前为亚声速, 喉部后为超声速, 出口仍为超声速, 继续膨胀加速;

(2) $p_b/p_0 = 0.9725 > 0.96070$, 表示全段均为亚声速;

(3) $p_b/p_0 = 0.6 < 0.96070$ 但 > 0.06462 , 喉部达到声速, 进入扩张段后先是超声速, 然后形成激波, 通过激波降为亚声速, 直至出口外。

(4) $p_b/p_0 = 0.528$, 情况与 (3) 相似, 只是激波位置更靠近出口。

(5) $p_b/p_0 = 0.3$, 情况仍与 (3) 相似, 但激波可能移至出口外。

CP5.5.1 直径为 $d = 150 \text{ mm}$ 的等截面绝热园管, 空气从进口处流入时参数为 $T_1 = 473 \text{ K}$, $p_1 = 2.0 \text{ MPa}$, $V_1 = 141 \text{ m/s}$ 。若测得出口处 $p_2 = 1.26 \text{ MPa}$, 试求 (1) 出口处 M_2 , (2) 温度 T_2 ; (3) 流速 V_2 。

提示: 本题未注明不计流动损失, 因此出口处的状态参数不能用等熵公式计算, 而要用范诺流气动函数公式或附录中范诺图计算。

$$\text{解: (1)} \quad M_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{V_1}{\sqrt{\gamma RT_1}} = \frac{141 \text{ m/s}}{\sqrt{1.4(287 \text{ J/kg} \cdot \text{K})(473 \text{ K})}} = 0.323$$

$$\text{查范诺图, 对应于 } M_1 = 0.323 \text{ 的 } \frac{p_1}{p^*} = 3.5 \quad p^* = \frac{2.0 \text{ MPa}}{3.5} = 0.57 \text{ MPa}$$

$$\text{出口处 } \frac{p_2}{p^*} = \frac{1.26}{0.57} = 2.2, \quad \text{查范诺图对应的 } M_2 = 0.47$$

$$\text{由 } M_1 = 0.323 \text{ 查范诺图 } \frac{T_1}{T^*} = 1.18, \quad T^* = \frac{473 \text{ K}}{1.18} = 404.3 \text{ K}$$

$$\text{由 } M_2 = 0.47 \text{ 查范诺图 } \frac{T_2}{T^*} = 1.14, \quad T_2 = 1.14(404.3 \text{ K}) = 461 \text{ K}$$

$$(3) \quad V_2 = M_2 c_2 = M_2 \sqrt{\gamma RT_2} = 0.47 \sqrt{1.4(287 \text{ J/kg} \cdot \text{K})(461 \text{ K})} = 202 \text{ m/s}$$

CP5.5.2 空气流过一直径为 $d = 0.2 \text{ m}$ 的绝热管道, 在截面 1 上流速为 $V_1 = 200 \text{ m/s}$, 状态参数为 $T_1 = 150^\circ\text{C}$, $p_1 = 1.5 \times 10^6 \text{ Pa (ab)}$; 当沿管流动到截面 2 时温度下降到 $T_2 = 130^\circ\text{C}$ 。试求 (1) 截面 2 上的压强 p_2 ; (2) 若管壁粗糙度为 $\varepsilon = 0.08 \text{ mm}$, 两截面间的距离 L_{12} 。

提示: 本题属绝热摩擦管流, 应运用范诺气动函数图求解。若属亚声速, 可直接查穆迪图确定平均摩擦因子 $\bar{\lambda}$, 用范诺图确定两截面相应的最大管长, 再求两截面的距离。

$$\text{解: (1)} \quad M_1 = \frac{V_1}{c_1} = \frac{V_1}{\sqrt{\gamma RT_1}} = \frac{200 \text{ m/s}}{\sqrt{1.4(287 \text{ J/kg} \cdot \text{K})(273+150 \text{ K})}} = 0.485 \quad \text{属亚声速}$$

查范诺图: 与 M_1 对应的值为

$$\frac{T_1}{T^*} = 1.16, \quad \frac{p_1}{p^*} = 2.2, \quad \frac{\bar{\lambda} L_{\max}}{d} = 1.16$$

$$T^* = \frac{T_1}{1.16} = \frac{423 \text{ K}}{1.16} = 364.7 \text{ K} \quad p^* = \frac{p_1}{2.2} = \frac{1.5 \times 10^6 \text{ Pa}}{2.2} = 0.682 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$\text{由 } \frac{T_2}{T^*} = \frac{(273+130) \text{ K}}{364.7 \text{ K}} = \frac{403 \text{ K}}{364.7 \text{ K}} = 1.1, \quad \text{查范诺图}$$

$$M_2 = 0.7 \quad \frac{p_2}{p^*} = 1.45, \quad \frac{\bar{\lambda} L_{\max}}{d} = 0.2$$

$$\text{可得} \quad p_2 = 1.45 p^* = 1.45 (0.682 \times 10^6 \text{ Pa}) = 9.9 \times 10^5 \text{ Pa (ab)}$$

$$(2) \quad \text{由状态方程} \quad \rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{1.5 \times 10^6 \text{ Pa}}{(287 \text{ J/kg} \cdot \text{K})(423 \text{ K})} = 12.36 \text{ kg/m}^3$$

用苏士兰公式计算 150°C 时空气粘度

$$\mu = \frac{(1.458 \times 10^{-6} \text{ kg/ms } \sqrt{\text{K}})(423 \text{ K})^{3/2}}{(110 \text{ K} + 423 \text{ K})} = 2.38 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$Re = \frac{\rho_1 V_1 d}{\mu_1} = \frac{(12.36 \text{ kg/m}^3)(200 \text{ m/s})(0.2 \text{ m})}{2.38 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}} = 2.1 \times 10^7$$

$$\frac{\varepsilon}{d} = \frac{0.08}{200} = 0.0004, \quad \text{查穆迪图, } \bar{\lambda} = 0.016$$

$$\frac{\bar{\lambda} L_{12}}{d} = \left(\frac{\bar{\lambda} L_{\max}}{d} \right)_1 - \left(\frac{\bar{\lambda} L_{\max}}{d} \right)_2 = 1.16 - 0.2 = 0.96$$

$$L_{12} = \frac{0.96d}{\bar{\lambda}} = \frac{0.96(0.2 \text{ m})}{0.016} = 12 \text{ m}$$

CP5.5.3 空气在等截面加热管中，作无摩擦流动。在截面 1， $M_1 = 0.5$ ， $p_1 = 1.1 \text{ MPa (ab)}$ ，

$T_{01} = 333 \text{ K}$ ；在截面 2， $M_2 = 0.9$ ， $T_{02} = 478 \text{ K}$ 。若质流量为 $\dot{m} = 1 \text{ kg/s}$ ，试求（1）在该

管段中的热交换率 $\dot{Q}$ ；（2）压强差 $p_1 - p_2$ 。

提示：本题给出每一截面上的马赫数和滞止温度。由于滞止温度定义为气体从当地状态等熵地减速至零时具有的温度，因此可用等熵关系直接求截面上当地温度，再确定当地流速，用动量方程求压强差。也可用瑞利气动函数图由马赫数确定 p_2 ，再求压强差。

解：（1）由无机机械功能量方程（参见 B4.6.11 式）

$$\dot{Q} = \dot{m} \left(c_p T_2 + \frac{V_2^2}{2} - c_p T_1 - \frac{V_1^2}{2} \right) = \dot{m} (c_p T_{02} - c_p T_{01})$$

$$= (1 \text{ kg/s}) (1004 \text{ J/kg} \cdot \text{K}) (478 \text{ K} - 333 \text{ K}) = 1.46 \times 10^5 \text{ J/s} = 146 \text{ k J/s}$$

（2）用等熵流气动函数表求解：

$$M_1 = 0.5, \quad T_1 / T_{01} = 0.95238, \quad T_1 = 0.95238 (333 \text{ K}) = 317.14 \text{ K}$$

$$M_2 = 0.9, \quad T_2 / T_{02} = 0.86058, \quad T_2 = 0.86058 (478 \text{ K}) = 411.36 \text{ K}$$

$$V_1 = M_1 \sqrt{\gamma R T_1} = 0.5 [1.4 (287 \text{ J/kg} \cdot \text{K}) (317.14 \text{ K})]^{1/2} = 178.6 \text{ m/s}$$

$$V_2 = M_2 \sqrt{\gamma R T_2} = 0.9 [1.4 (287 \text{ J/kg} \cdot \text{K}) (411.36 \text{ K})]^{1/2} = 365.9 \text{ m/s}$$

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R T_1} = \frac{1.1 \times 10^6 \text{ Pa}}{(287 \text{ J/kg} \cdot \text{K}) (317.14 \text{ K})} = 12.1 \text{ kg/m}^3$$

由动量定理（等截面管）

$$p_1 - p_2 = \rho_1 V_1 (V_2 - V_1) = (12.1 \text{ kg/m}^3) (178.6 \text{ m/s}) (365.9 - 178.6) \text{ m/s} = 405 \text{ kPa}$$

（3）用瑞利流气动函数图求解：

$$M_1 = 0.5, \quad \text{查得 } p_1 / p^* = 1.78, \quad p^* = p_1 / 1.78 = 1.1 \text{ MPa} / 1.78 = 0.618 \text{ MPa}$$

$$M_2 = 0.9, \quad \text{查得 } p_2 / p^* = 1.13, \quad p_2 = 1.13 p^* = 1.13 (0.618 \text{ MPa}) = 0.698 \text{ MPa}$$

$$p_1 - p_2 = (1.1 - 0.698) \text{ MPa} = 402 \text{ kPa}$$

CP5.5.4 空气在等截面加热管中作无摩擦流动。在截面 1， $M_1 = 0.4$ ， $\rho_1 = 2.0 \text{ kg/m}^3$ ， $T_1 =$

300 K; 在截面 2, $M_2 = 0.6$ 。试确定 (1) 从截面 1 到截面 2 的熵增 Δs ; (2) 单位质量空气加热量 dQ/dm 。

提示: 求熵增需知道两截面上的状态参数, 可利用瑞利流气动函数图确定; 求热量变化需知道两截面上的滞止温度变化, 可利用等熵流气动函数表由当地温度确定。

解: (1) 查瑞利流气动函数图 (图 C5.5.5)

$$M_1 = 0.4, \text{ 查得 } \rho^* / \rho_1 = 0.3, \quad \rho^* = 0.3\rho_1 = 0.3(2.0\text{kg/m}^3) = 0.6\text{kg/m}^3$$

$$T_1 / T^* = 0.6 \quad T^* = T_1 / 0.6 = 300 \text{ K} / 0.6 = 500 \text{ K}$$

$$M_2 = 0.6, \text{ 查得 } \rho^* / \rho_2 = 0.57, \quad \rho_2 = \rho^* / 0.57 = (0.6\text{kg/m}^3) / 0.57 = 1.05\text{kg/m}^3$$

$$T_2 / T^* = 0.92, \quad T_2 = 0.92 T^* = 0.92 (500 \text{ K}) = 460 \text{ K}$$

由熵增公式 (C5.1.18a)

$$\Delta s = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} = (717.4\text{J/kg} \cdot \text{K}) \ln \frac{460}{300} + (287\text{J/kg} \cdot \text{K}) \ln \frac{2.0}{1.05}$$

$$= (306.65 + 184.93) \text{ J/kg} \cdot \text{K} = 491.58 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

(2) 由等熵流气动函数表确定截面上的滞止温度

$$M_1 = 0.4, \quad T_1 / T_{01} = 0.96899, \quad T_{01} = T_1 / 0.96899 = 300 \text{ K} / 0.96899 = 309.6 \text{ K}$$

$$M_2 = 0.6, \quad T_2 / T_{02} = 0.93284, \quad T_{02} = T_2 / 0.93284 = 460 / 0.93284 = 493.1 \text{ K}$$

由一维流动无摩擦功能量方程 (C5.5.29c) 可得

$$\frac{dQ}{dm} = c_p (T_{02} - T_{01}) = (1004\text{J/kg} \cdot \text{K})(493.1 - 309.6)\text{K} = 184.3\text{kJ/kg}$$

CP5.6.1 空气在通过正激波前的状态参数为 $M_1 = 2.2$, $p_1 = 120 \text{ kPa}$, $T_{01} = 450\text{K}$, 试求通过激波前后 (1) p_{01} , p_{02} ; (2) V_2 ; (3) c_2 。

提示: 利用超声波激波气动函数表 (C5.6.2) 和等熵流气动函数表 (表 5.3.1) 配合求解。

解: (1) 由激波气动函数表 $M_1 = 2.2$, 查得 $M_2 = 0.54706$, 及

$$p_{02} / p_1 = 6.7163, \quad p_{02} = 6.7163 p_1 = 6.7163 (120 \text{ kPa}) = 805.96 \text{ kPa}$$

$$p_{02} / p_{01} = 0.62812, \quad p_{01} = p_{02} / 0.62812 = 805.96 \text{ kPa} / 0.62812 = 1283.12 \text{ kPa}$$

(2) 由等熵流气动函数表 $M_1 = 2.2$, 查得 $T_1 / T_{01} = 0.50813$

$$T_1 = 0.50813 T_{01} = 0.50813 (450\text{K}) = 228.66 \text{ K}$$

再查激波气动函数表, $T_2 / T_1 = 1.8569$

$$T_2 = 1.8569 T_1 = 1.8569 (228.66 \text{ K}) = 424.60 \text{ K}$$

$$c_2 = \sqrt{\gamma R T_2} = \sqrt{1.4(287\text{J/kg} \cdot \text{K})(424.60\text{K})} = 413.0\text{m/s}$$

$$V_2 = c_2 M_2 = (413.0 \text{ m/s}) 0.54706 = 226.0 \text{ m/s}$$

CP5.6.2 空气通过正激波前的速度为 $V_1 = 550 \text{ m/s}$, 状态参数为 $p_1 = 150 \text{ kPa}$, $T_1 = 288 \text{ K}$; 试求 (1) 激波后的参数 V_2 , p_2 , T_2 (2) 验证滞止温度不变: $T_{01} = T_{02}$ 。

$$\text{解: (1) } c_1 = \sqrt{\gamma R T_1} = \sqrt{1.4(287\text{J/kg} \cdot \text{K})(288\text{K})} = 340.17\text{m/s}$$

$$M_1 = V_1 / c_1 = 550 \text{ m/s} / 340.17 \text{ m/s} = 1.62$$

查激波气动函数表可得

$$M_2 = 0.66251, \quad p_2 / p_1 = 2.8951, \quad T_2 / T_1 = 1.4018$$

$$p_2 = 2.8951 p_1 = 2.8951 (150 \text{ kPa}) = 434.27 \text{ kPa}$$

$$T_2 = 1.4018 T_1 = 1.4018 (288 \text{ K}) = 403.72 \text{ K}$$

$$c_2 = \sqrt{\gamma RT_2} = \sqrt{1.4(287\text{J/kg} \cdot \text{K})(403.72\text{K})} = 402.76\text{m/s}$$

$$V_2 = M_2 c_2 = 0.66251 (402.76\text{ m/s}) = 266.83\text{ m/s}$$

(2) 查等熵流气动函数表

$$M_1 = 1.62, T_1/T_0 = 0.65579, T_0 = T_1/0.65579 = 288\text{ K}/0.65579 = 439.16\text{ K}$$

$$M_2 = 0.66, T_2/T_0 = 0.91986, T_0 = T_2/0.91986 = 403.72\text{ K}/0.91986 = 439.0\text{ K}$$

CP5.6.3 有一球形爆震波在静止大气中推进，其行进马赫数为 $M_s = 2.0$ ，并已知大气状态参数为 $p = 0.1\text{ MPa}$ ， $T = 300\text{ K}$ ，试求 (1) 波后压强 p_2 ；(2) 波后空气绝对速度 V 。

提示：课文中正激波前后参数关系式及激波气动函数表均指相对激波的定常流，气流流向激波的一侧称为波前，离开激波的一侧称为波后。本题中波后是指爆震波波阵面相反的一侧，即爆炸中心一侧，应化为定常流动后求解。

解：将坐标系固结在激波上，则来流马赫数 $M_1 = M_s = 2.0$ ，激波前状态 $p_1 = 0.1\text{ MPa}$ ， $T_1 = 300\text{ K}$ 。查激波气动函数表（表 C5.6.2）：

$$M_2 = 0.57735, p_2/p_1 = 4.50, T_2/T_1 = 1.6875$$

$$p_2 = 4.50 p_1 = 4.50 (0.1\text{MPa}) = 0.45\text{ MPa}$$

$$T_2 = 1.6875 T_1 = 1.6875 (300\text{ K}) = 506.25\text{K}$$

$$c_2 = \sqrt{\gamma RT_2} = \sqrt{1.4(287\text{J/kg} \cdot \text{K})(506.25\text{K})} = 451.01\text{ m/s}$$

$$c_1 = \sqrt{\gamma RT_1} = \sqrt{1.4(287\text{J/kg} \cdot \text{K})(300\text{K})} = 347.19\text{m/s}$$

$$V = M_1 c_1 - M_2 c_2 = 2.0 (347.19\text{ m/s}) - 0.57735 (451.01\text{ m/s})$$

$$= 694.38\text{ m/s} - 260.39\text{ m/s} = 434.0\text{ m/s}$$

该速度即爆炸产生的气流绝对速度。

CP5.6.4 有一运动正激波在静止空气中推进，激波的推进压强即波后压强 $p_2 = 0.2\text{ MPa}$ ，设空气的状态参数为 $p = 0.1\text{ MPa}$ ， $T = 300\text{ K}$ ，试求 (1) 激波的运动速度 V_s ；(2) 激波后空气绝对速度（即产生激波的气流速度） V 。

解：(1) 将坐标系固结于激波上，则来流参数 $p_1 = 0.1\text{ MPa}$ ， $T_1 = 300\text{ K}$ 。

由 $p_2/p_1 = 0.2/0.1 = 2.0$ 查激波气动函数表（表 C5.6.2）可得

$$M_1 = 1.363, M_2 = 0.7558 \text{ (内插法)}$$

$$c_1 = \sqrt{\gamma RT_1} = \sqrt{1.4(287\text{J/kg} \cdot \text{K})(300\text{K})} = 347.19\text{m/s}$$

$$V_s = V_1 = M_1 c_1 = 1.363 (347.19\text{ m/s}) = 473.22\text{ m/s}$$

(2) 由激波气动函数表，相应于 $p_2/p_1 = 2.0$ 的 $T_2/T_1 = 1.23$

$$T_2 = 1.23 T_1 = 1.23 (300\text{ K}) = 369\text{ K}$$

$$c_2 = \sqrt{\gamma RT_2} = \sqrt{1.4(287\text{J/kg} \cdot \text{K})(369\text{K})} = 385.1\text{m/s}$$

$$V_2 = M_2 c_2 = 0.7558 (385.1\text{ m/s}) = 291.02\text{ m/s}$$

$$V = V_s - V_2 = (473.22 - 291.02)\text{ m/s} = 182.2\text{ m/s}$$

CP5.6.5 设一道爆震波通过静止空气后，使空气的温度从 280 K 上升到 320 K ，试求该爆震波的运动速度 V_s

解：将坐标系固结于爆震波上， $T_1 = 280\text{ K}$ ， $T_2 = 320\text{ K}$

$T_2/T_1 = 1.1429$ ，查激波气动函数表（表 C5.6.2）可得

$$M_1 = 1.22, c_1 = \sqrt{\gamma RT_1} = \sqrt{1.4(287\text{J/kg} \cdot \text{K})(280\text{K})} = 335.42\text{m/s}$$

$$V_s = V_1 = M_1 c_1 = 1.22 (335.42 \text{ m/s}) = 409.21 \text{ m/s}$$