精讲精练

《新课标高中数学精讲精练》

丛书主编　徐山洪
编　　委　谢柏芳　刘玉泉　谭玉石
王庚儿　李剑夫　廖文胜
马荣林　邓世疆　赵朝贤
陈新权　刘会金　陈远刚
李德明　王振芳　黄全顺
王福山　饶乘凤　关丽琼
潘泽学　匡唐松　宾业河
谢凤仙　余扩益　高建彪
张天良　谢小毛　谢吉权
张梅玲　程松　欧阳文君
饶胜文　周志明　李志敏

本册主编　高建彪
校　　审　李志敏（第一部分）
李八江（第二部分）
李晓莉（第三部分）
质量监督　0760-6853660
意见信箱　zssxzb@163.com
信息反馈　http://sx.zsedu.net/nh
美术编辑　陆镜平

开　　本　890mm×1 240mm　16 开
印　　张　5
字　　数　70 000
印　　数　1 401～3 000 册
版　　次　2008 年 1 月第 2 版
印　　次　2008 年 1 月第 2 次印刷

本册成本　10.0 元

新课标高中数学精讲精练

高考二轮专题复习

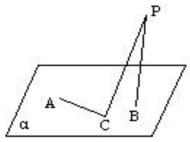
目　　录

第 1 练　数形结合思想

※基础达标

1．函数 $f(x)=|\log_a x|\ \ (a>0且a\neq 1)$ 的单调递增区间是（　　）.

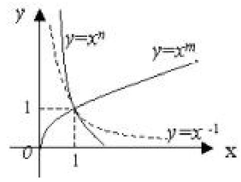
A. $(0,a]$　　B. $(0,+\infty)$　　C. $(0,1]$　　D. $[1,+\infty)$



2．（04 年天津卷.文 8）如图，定点 A 和 B 都在平面 α 内，定点 $P\notin\alpha$，$PB\perp\alpha$，C 是 α 内异于 A 和 B 的动点，且 $PC\perp AC$．那么，动点 C 在平面 α 内的轨迹是（　　）.

A. 一条线段，但要去掉两个点　　B. 一个圆，但要去掉两个点

C. 一个椭圆，但要去掉两个点　　D. 半圆，但要去掉两个点



3．幂函数 $y=x^m$ 与 $y=x^n$ 在第一象限内的图象如图所示，则（　　）.

A．$-1<n<0<m<1$　　B．$n<-1, 0<m<1$

C．$-1<n<0, m>1$　　D．$n<-1, m>1$

4．（04 年全国卷二.理 8）在坐标平面内，与点 $A(1,2)$ 距离为 1，且与点 $B(3,1)$ 距离为 2 的直线共有（　　）.

A．1 条　B．2 条　C．3 条　D．4 条

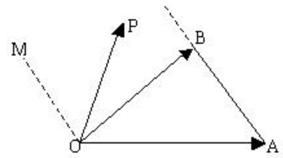
5．（07 年重庆卷.文 8）若直线 $y=kx+1$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相交于 P、Q 两点，且∠POQ＝120°（其中 O 为原点），则 k 的值为（　　）.

A. $-\sqrt{3}或\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $-\sqrt{2}或\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{2}$

6．等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1>0$，$S_4=S_9$，则 S_n 取得最大值时，n=________.

7．（06 年天津卷.文 14）若半径为 1 的圆分别与 y 轴的正半轴和射线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x\ (x\geqslant 0)$ 相切，则这个圆的方程为______________.

8．（06 年北京卷.文 14 理 13）已知点 $P(x,y)$ 的坐标满足条件 $\begin{cases}x+y\le 4\\ y\ge x\\ x\ge 1\end{cases}$，点 O 为坐标原点，那么 $|PO|$ 的最小值等于_________，最大值等于_________.



9．(**理**)（06 年湖南卷.理 15）如图，$OM/\!/AB$，点 P 在由射线 OM、线段 OB 及 AB 的延长线围成的阴影区域内（不含边界）运动，且 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则 x 的取值范围是________；当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，y 的取值范围是___________.

10．求 $\dfrac{\sin\alpha-2}{-3+\cos\alpha}$ 的最大值和最小值.

11．设 $f(x)=x^2-2ax+2$，当 $x\in[-1,+\infty)$ 时，$f(x)>a$ 恒成立，求 a 的取值范围.

※能力提高

12．两人相约 7 点到 8 点在某地会面，先到者等候另一人 20 分钟，过时离去. 求两人能够会面的概率.

13．某纺纱厂生产甲、乙两种棉纱，已知生产甲种棉纱 1 吨需耗一级子棉 2 吨、二级子棉 1 吨；生产乙种棉纱需耗一级子棉 1 吨、二级子棉 2 吨，每 1 吨甲种棉纱的利润是 600 元，每 1 吨乙种棉纱的利润是 900 元，工厂在生产这两种棉纱的计划中要求消耗一级子棉不超过 300 吨、二级子棉不超过 250 吨. 甲、乙两种棉纱应各生产多少吨，能使利润总额最大，并求最大利润.

14．（**理**）已知 $a\cos\alpha+b\sin\alpha=c$，$a\cos\beta+b\sin\beta=c$ ($ab\neq0$，$\alpha-\beta\neq k\pi$，$k\in Z$).

求证：$\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{c^2}{a^2+b^2}$.

※探究创新

15．设 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant a\}$，$B=\{y\mid y=2x+3$，且 $x\in A\}$，$C=\{z\mid z=x^2$，且 $x\in A\}$，若 $C\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

第 2 练　分类讨论思想

※基础达标

1．过点 $C(1,2)$ 作直线，使其在坐标轴上的截距相等，则满足条件的直线的斜率为（　　）.

A．-1　　B．± 1　　C．-1 或 2　　D．± 1 或 2

2．设函数 $f(x)=\begin{cases}-1\,(x>0)\\ 1\,(x<0)\end{cases}$，则 $\dfrac{(a+b)+(a-b)\cdot f(a-b)}{2}\,(a\ne b)$ 的值为（　　）.

A．a　　B．b　　C．a、b 中较小的数　　D．a、b 中较大的数

3．已知椭圆 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{m}=1$ 的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，则 m 的值为（　　）.

A. 3　　B. $\dfrac{25}{3}$ 或 3　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\dfrac{5\sqrt{15}}{3}$ 或 $\sqrt{15}$

4．已知函数 $f(x)=\log_a x$ 在 $[2,\pi]$ 上的最大值比最小值大 1，则 a 等于（　　）.

A. $\dfrac{2}{\pi}$　　B. $\dfrac{\pi}{2}$　　C. $\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{2}{\pi}$　　D. 不同于 A、B、C 的答案

5．（06 年北京卷.理 3）在 $1,2,3,4,5$ 这五个数字组成的没有重复数字的三位数中，各位数字之和为奇数的共有（　　）.

A. 36 个　　B. 24 个　　C. 18 个　　D. 16 个

6．已知线段 AB 在平面 α 外，A、B 两点到平面 α 的距离分别为 1 和 3，则线段 AB 的中点到平面 α 的距离为_______.

7．（07 年北京卷.理 14）已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 分别由下表给出

x	1	2	3
$f(x)$	1	3	1

x	1	2	3
$g(x)$	3	2	1

则 $f[g(1)]$ 的值为_________；满足 $f[g(x)]>g[f(x)]$ 的 x 的值是______.

8. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+(a-1)=0\}$，且 $A\cup B=A$，则 a 的值为_______.

9．（**理**）甲罐中有 5 个黑球、2 个白球、3 个绿球，乙罐中有 3 个黑球、4 个白球、2 个绿球. 现从甲罐中取出一个球放入乙罐中，然后再从乙罐中取出一个球，问这个球是白球的概率是_______.

10. 解关于 x 的不等式：$x^2+a^3<(a+a^2)x\quad(a\in R)$.

11．试讨论方程 $(m-3)x^2+(5-m)y^2=1$ 表示的曲线.

※能力提高

12．已知扇形的圆心角为 60°，半径为 1*cm*，求这个扇形的内接矩形的最大面积.

13.（04 年全国卷一.理 19）已知 $a \in R$，求函数 $f(x)=x^2e^{ax}$ 的单调区间.

14.（**理**）（06 年全国卷Ⅱ.理 19）某产品成箱包装，每箱 5 件. 一用户在购进该批产品前先取出 3 箱，再从每箱中任意抽取 2 件产品进行检验. 设取出的第一、二、三箱中分别有 0 件、1 件、2 件二等品，其余为一等品.（1）用 ξ 表示抽取出的 6 件产品中二等品的件数，求 ξ 的分布列及 ξ 的数学期望；（2）若抽检的 6 件产品中有 2 件或 2 件以上二等品，用户就拒绝购买这批产品，求这批产品被用户拒绝的概率.

※探究创新

15.（06 年江苏卷.20）设 a 为实数，设函数 $f(x)=a\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ 的最大值为 $g(a)$.

（1）设 t＝$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$，求 t 的取值范围，并把 $f(x)$ 表示为 t 的函数 $m(t)$；　（2）求 $g(a)$；

（3）试求满足 $g(a)=g(\frac{1}{a})$ 的所有实数 a.

第 3 练　函数与方程思想

※基础达标

1．（04 年江苏卷.8）若函数 $y=\log_a(x+b)$ $(a>0,a\neq 1)$ 的图象过两点 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$，则（　　）.

A. a=2，b=2　　B. $a=\sqrt{2}$，b=2　　C. a=2，b=1　　D. $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}$

2．当 0≤x≤1 时，函数 $y=ax+a-1$ 的值有正值也有负值，则实数 a 的取值范围是（　　）.

A. $a<\frac{1}{2}$　　B. $a>1$　　C. $a<\frac{1}{2}$ 或 $a>1$　　D. $\frac{1}{2}<a<1$

3.（06年考全国卷Ⅰ.文3理2)已知函数 $y=e^x$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，则(　　).

A．$f(2x)=e^{2x}$ $(x\in R)$　　B．$f(2x)=\ln 2\cdot\ln x$ $(x>0)$

C．$f(2x)=2e^x$ $(x\in R)$　　D．$f(2x)=\ln x+\ln 2$ $(x>0)$

4．（06 年山东卷.文 5）已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$满足 $f(x+2)=-f(x)$，则 $f(6)$ 的值为（　　）.

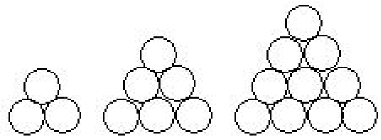
A. －1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

5．（06 年辽宁卷.理 10）直线 $y=2k$ 与曲线 $9k^2x^2+y^2=18k^2|x|$ $(k\in R,且k\neq 0)$ 的公共点的个数为（　　）.

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

6．长方体的共顶点的三个面的面积分别是 12cm^2、8cm^2 和 6cm^2，则它的体积是___________.

7．（06 年广东卷.14）在德国不莱梅举行的第 48 届世乒赛期间，某商场橱窗里用同样的乒乓球堆成若干准“正三棱锥”形的展品，其中第一堆只有一层，就一个乒乓球；第 2、3、4、…堆最底层（第一层）分别按右图所示方式固定摆放. 从第一层开始，每层的小球自然垒放在下一层之上，第 n 堆第 n 层就放一个乒乓球，以 $f(n)$ 表示第 n 堆的乒乓球总数，则 $f(3)=$_____；$f(n)=$____________.（答案用 n 表示）



8．（06 年上海卷.文 7）已知双曲线中心在原点，一个顶点的坐标为 $(3,0)$，且焦距与虚轴长之比为 $5:4$，则双曲线的标准方程是________________.

9．(**理**)（04 年天津卷.文 15 理 14）如果过两点 $A(a,\ 0)$ 和 $B(0,\ a)$ 的直线与抛物线 $y=x^2-2x-3$ 没有交点，那么实数 a 的取值范围是___________.

10．（05 年浙江卷.文 16）已知实数 a,b,c 成等差数列，$a+1,b+1,c+4$ 成等比数列，且 $a+b+c=15$，求 a,b,c.

11．（06 年全国卷Ⅱ.文 18）设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_4=1,S_8=17$，求通项公式 $a_n=$?

※能力提高

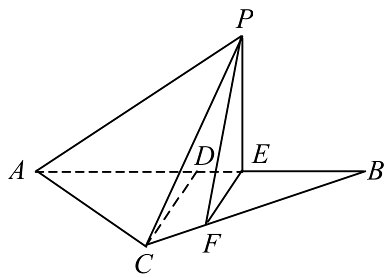
12．（07 年福建卷.文 20）设函数 $f(x)=tx^2+2t^2x+t-1(x\in\mathbf{R}，t>0)$．

（1）求 $f(x)$ 的最小值 $h(t)$；　　（2）若 $h(t)<-2t+m$ 对 $t\in(0,2)$ 恒成立，求实数 m 的取值范围．

13．（07 年广东卷.理 19）如图所示，等腰$\triangle ABC$ 的底边 $AB=6\sqrt{6}$，高 $CD=3$，点 E 是线段 BD 上异于点 $B，D$ 的动点，点 F 在 BC 边上，且 $EF\perp AB$，现沿 EF 将$\triangle BEF$ 折起到$\triangle PEF$ 的位置，使 $PE\perp AE$，记 $BE=x$，$V(x)$ 表示四棱锥 $P-ACFE$ 的体积．

（1）求 $V(x)$ 的表达式；　　（2）当 x 为何值时，$V(x)$ 取得最大值？

（3）当 $V(x)$ 取得最大值时，求异面直线 AC 与 PF 所成角的余弦值．



14．（**理**）（04 年湖南卷.理 18）甲，乙，丙三台机床各自独立加工同一零件，已知甲机床加工的零件是一等品而乙机床加工的零件不是一等品的概率为 $\dfrac{1}{4}$，乙机床加工的零件是一等品而丙机床加工的零件不是一等品的概率为 $\dfrac{1}{12}$，甲，丙两台机床加工的零件都是一等品的概率为 $\dfrac{2}{9}$．（1）分别求甲，乙，丙三台机床各自加工的零件是一等品的概率；（2）从甲，乙，丙加工的零件中各取一个检验，求至少有一个一等品的概率．

※探究创新

15．（06 年上海卷.文 22）已知函数 $y=x+\dfrac{a}{x}$ 有如下性质：如果常数 $a>0$，那么该函数在 $(0,\sqrt{a}]$ 上是减函数，在 $[\sqrt{a},+\infty)$ 上是增函数．

（1）如果函数 $y=x+\dfrac{2^b}{x}\ (x>0)$ 在 $(0,4]$ 上是减函数，在 $[4,+\infty)$ 上是增函数，求 b 的值．

（2）设常数 $c\in[1,4]$，求函数 $f(x)=x+\dfrac{c}{x}\ (1\le x\le 2)$ 的最大值和最小值；

（3）当 n 是正整数时，研究函数 $g(x)=x^n+\dfrac{c}{x^n}\ (c>0)$ 的单调性，并说明理由．

第 4 练　转化与化归思想

※基础达标

1．$f(x)$ 是 R 上的奇函数，$f(x+2)=f(x)$，当 0≤x≤1 时，$f(x)=x$，则 $f(7.5)$ 等于（　　）.

A. 0.5　　B. －0.5　　C.　1.5　　D. －1.5

2．已知 3a－4b＝4 则直线 ax+by=1 过定点（　　）.

A. (3，－4)　　B. (－3，4)　　C. $(-\frac{3}{4}，1)$　　D. $(\frac{3}{4}，-1)$

3.（06 年重庆卷.理 2）在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_4+a_6=12$，S_n是数列的$\{a_n\}$的前 n 项和，则S_9的值为（　　）.

A. 48　　B. 54　　C. 60　　D. 66

4．设椭圆$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$　（a>b>0）的半焦距为 c，直线 l 过(0，a)和(b，0)，原点到 l 的距离等于$\frac{2\sqrt{21}}{7}c$，则椭圆的离心率为（　　）.

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5．已知三棱锥 S-ABC 的三条侧棱两两垂直，SA＝5，SB＝4，SC＝3，D 为 AB 的中点，E 为 AC 的中点，则四棱锥 S-$BCED$ 的体积为（　　）.

A. $\frac{15}{2}$　　B. 10　　C. $\frac{25}{2}$　　D. $\frac{35}{2}$

6．（06 年上海卷.文 6）函数 $y=\sin x\cos x$ 的最小正周期是_________.

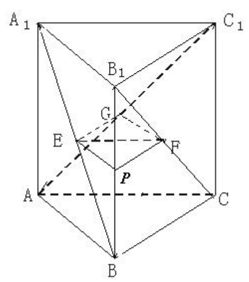
7．已知长方体 $ABCD$-$A'B'C'D'$中，AA'＝AD＝1，AB＝$\sqrt{3}$，则顶点 A 到截面 $A'BD$ 的距离是_______

8．设直线 mx+y+2＝0 与线段 AB 有公共点（不包括端点），且 A（-2，3），B（3，2），则 m 的取值范围是________________.

9.（理）一条路上共有 9 个路灯，为了节约用电，拟关闭其中 3 个，要求两端的路灯不能关闭，任意两个相邻的路灯不能同时关闭，那么关闭路灯的方法总数为_______.

10.（04 年重庆卷.文理 17）求函数 $y=\sin^4 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^4 x$ 的最小正周期和最小值；并写出该函数在$[0,\pi]$的单调递增区间.

11．如图，在正三棱柱 ABC—$A_1B_1C_1$ 中，E、F、G 是侧面对角线上的点，且 $BE=CF=AG$，求证：平面 EFG∥平面 ABC.



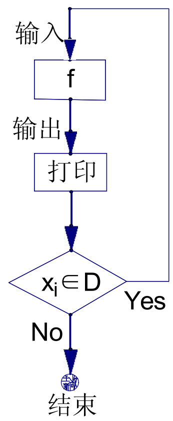
※能力提高

12．已知 a，b，x，$y\in\mathbf{R}$，且 $a+2b+4=0$， $x+2y=1$，求证：$(a+x)^2+(b+y)^2\geq 5$.

13．对任意函数 $f(x)$， $x\in D$，可按图示构造一个数列发生器，其工作原理如下：

① 输入数据 $x_0\in D$，经数列发生器输出 $x_1=f(x_0)$；

② 若 $x_1\notin D$，则数列发生器结束工作；若 $x_1\in D$，则将 x_1 反馈回输入端，再输出 $x_2=f(x_1)$，并依此规律继续下去.



现定义 $f(x)=\dfrac{4x-2}{x+1}$，

（1）若输入 $x_0=\dfrac{49}{65}$，则由数列发生器产生数列 $\{x_n\}$，请写出 $\{x_n\}$ 的所有项；

（2）若要数列发生器产生一个无穷的常数列，试求输入的初始数据 x_0 的值.

14．（理）（03 年全国高考理.19）已知 $c>0$，设

P：函数 $y=c^x$ 在 R 上单调递减；　　　Q：不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 R.

如果 P 和 Q 有且仅有一个正确，求 c 的取值范围.

※探究创新

15．设椭圆 C_1 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$)，曲线 C_2 的方程为 $y=\dfrac{1}{x}$，且曲线 C_1 与 C_2 在第一象限内只有一个公共点 P. （1）试用 a 表示点 P 的坐标；

（2）设 A、B 是椭圆 C_1 的两个焦点，当 a 变化时，求△ABP 的面积函数 $S(a)$的值域；

（3）记 $\min\{y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n\}$为 y_1，y_2，……，y_n 中最小的一个. 设 $g(a)$是以椭圆 C_1 的半焦距为边长的正方形的面积，试求函数 $f(a)=\min\{g(a), S(a)\}$的表达式.

第 5 练　其他数学思想方法

※基础达标

1．已知 $f(x^3)=lgx\ (x>0)$，则 $f(4)$ 的值为（　　）.

A. $2lg2$　　B. $\frac{1}{3}lg2$　　C. $\frac{2}{3}lg2$　　D. $\frac{2}{3}lg4$

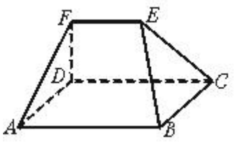
2．设 MP、OM、AT 分别是 46° 角的正弦线、余弦线和正切线，则（　　）.

A. $MP<OM<AT$　　B. $OM<MP<AT$　　C. $AT<OM<MP$　　D. $OM<AT<MP$

3．过抛物线焦点 F 的直线与抛物线相交于 A、B 两点，若 A、B 在抛物线准线上的射影分别为 A_1、B_1，则 $\angle A_1FB_1$ 等于（　　）.

A. 45°　　B. 60°　　C. 90°　　D. 120°

4．如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，已知面 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形，$EF//AB$，$EF=\frac{3}{2}$，EF 与面 AC 的距离为 2，则该多面体的体积是（　　）.



A. $\frac{9}{2}$　　B. 5　　C. 6　　D. $\frac{15}{2}$

5．椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 上的点到直线 $x+2y-\sqrt{2}=0$ 的最大距离是（　　）.

A. 3　　B. $\sqrt{11}$　　C. $\sqrt{10}$　　D. $2\sqrt{2}$

6．在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1\cdot a_5+2a_3\cdot a_5+a_3\cdot a_7=25$，则 $a_3+a_5=$________.

7．（06 年重庆卷.理 14）在数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1=1, a_{n+1}=2a_n+3(n\ge 1)$，则该数列的通项 $a_n=$________.

8．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_0=0$，则有等式 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{19-n}$（$a<19, n<N$）成立，类比上述性质，在等比数列 $\{b_n\}$ 中，$b_9=1$，则有等式________________________________成立.

9．(**理**）在 $(1-x^3)(1+x)^{10}$ 的展开式中，x^5 的系数是_______.

10．已知函数 $f(x)=2\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4})$.

（1）解不等式 $f(x)\ge 1$；　（2）求函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=\sqrt{3}$ 的所有交点坐标.

11．若下列方程：$x^2+4ax-4a+3=0$，$x^2+(a-1)x+a^2=0$，$x^2+2ax-2a=0$ 至少有一个方程有实根.试求实数 a 的取值范围.

※能力提高

12．设方程 $x^2+kx+2=0$ 的两实根为 p、q，若 $(\frac{p}{q})^2+(\frac{q}{p})^2\leqslant 7$ 成立，求实数 k 的取值范围.

13．设 $a>0$，求 $f(x)=2a(\sin x+\cos x)-\sin x\cdot\cos x-2a^2$ 的最大值和最小值.

14．（理）是否存在常数 a、b、c，使得等式 $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+n(n+1)^2=\frac{n(n+1)}{12}(an^2+bn+c)$ 对一切自然数 n 都成立？并证明你的结论.　（89 年全国高考题）

※探究创新

15．如图，一个计算装置有两个数据输入口Ⅰ、Ⅱ与一个运算结果输出口Ⅲ，当Ⅰ、Ⅱ分别输入正整数 m,n 时，输出结果记为 $f(m,n)$，且计算装置运算原理如下：

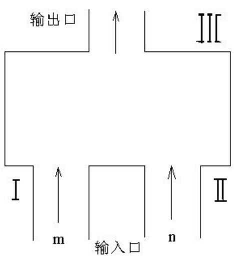
① 若Ⅰ、Ⅱ分别输入 1，则 $f(1,1)=1$；

② 若Ⅰ输入固定的正整数，Ⅱ输入的正整数增大 1，则输出结果比原来增大 3；

③ 若Ⅱ输入 1，Ⅰ输入正整数增大 1，则输出结果为原来 3 倍.

试求：（1）$f(m,1)$ 的表达式 $(m\in N)$；　（2）$f(m,n)$ 的表达式 $(m,n\in N)$；

（3）若Ⅰ、Ⅱ都输入正整数 n，则输出结果 $f(n,n)$ 能否为 2006？若能，求出相应的 n；若不能，则请说明理由.



第 6 练　导数与函数专题

※基础达标

1．（05 年广东卷.6）函数 $f(x)=x^3-3x^2+1$ 是减函数的区间为（　　）.

A. $(2,+\infty)$　　B. $(-\infty,2)$　　C. $(-\infty,0)$　　D. $(0,2)$

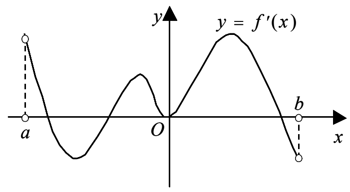
2．（06 年安徽卷.理 7）若曲线 $y=x^4$ 的一条切线 l 与直线 $x+4y-8=0$ 垂直，则 l 的方程为（　　）.

A．$4x-y-3=0$　　B．$x+4y-5=0$　　C．$4x-y+3=0$　　D．$x+4y+3=0$

3．（05 年湖南.6）设 $f_0(x)=sinx$，$f_1(x)=f_0{}'(x)$，$f_2(x)=f_1{}'(x)$，…，$f_{n+1}(x)=f_n{}'(x)$，$n\in\mathbf{N}$，则 $f_{2005}(x)=$（　　）.

A．$sinx$　B．$-sinx$　C．$\cos x$　D．$-cosx$

4．（06年天津卷.理9）函数 $f(x)$ 的定义域为开区间 (a,b)，导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内的图象如图所示，则函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内有极小值点（　　）.



A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

5．若点 P 在曲线 $y=x^3-x+2$ 上移动，经过点 P 的切线的倾斜角为 α，则 α 的取值范围为（　　）.

A.$[0,\frac{\pi}{2}]$　　B.$[0,\frac{\pi}{2})\cup[\frac{3\pi}{4},\pi)$　　C.$[\frac{3\pi}{4},\pi]$　　D.$[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}]$

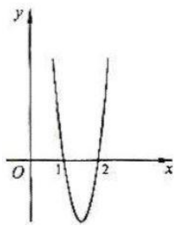
6．（06 年上海春.6）已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数. 当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)=x-x^4$，则当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=$ ______.

7．（05 年江苏卷.17）已知 a,b 为常数，若 $f(x)=x^2+4x+3, f(ax+b)=x^2+10x+24,$ 则 $5a-2b=$______.

8．（01 年天津卷.理 8）函数 $y=1+3x-x^3$ 有极小值________，极大值________.

9．（**理**）有一深为 $20cm$，上底半径为 $10cm$ 的圆锥形容器，以每分钟 $15cm^3$ 的速度向容器内注水，则在水深为 $8cm$ 时液面上升速度为__________.

10．（06 年北京卷.文理 16）已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ 在点 x_0 处取得极大值 5，其导函数 $y=f'(x)$ 的图象经过点 $(1,0)$，$(2,0)$，如图所示. 求：



（1）x_0 的值；（2）a,b,c 的值.

11．（06 年重庆卷.文 19）设函数 $f(x)=x^3-3ax^2+3bx$ 的图像与直线 $12x+y-1=0$ 相切于点 $(1,-11)$.

（1）求 a,b 的值；（2）讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

※能力提高

12．（01年天津卷）设$a>0$，$f(x)=\dfrac{e^x}{a}+\dfrac{a}{e^x}$是$R$上的偶函数.

（1）求a的值；　（2）证明$f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数.

13．（06年福建卷.理19）统计表明，某种型号的汽车在匀速行驶中每小时耗油量y（升）关于行驶速度x（千米/小时）的函数解析式可以表示为：$y=\dfrac{1}{128000}x^3-\dfrac{3}{80}x+8\ (0<x\leqslant 120)$.已知甲、乙两地相距100千米.

（1）当汽车以40千米/小时的速度匀速行驶时，从甲地到乙地要耗油多少升？

（2）当汽车以多大的速度匀速行驶时，从甲地到乙地耗油最少？最少为多少升？

14．（**理**）（07年海南.文19）设函数$f(x)=\ln(2x+3)+x^2$.

（1）讨论$f(x)$的单调性；　（2）求$f(x)$在区间$[-\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{4}]$的最大值和最小值.

※探究创新

15．（06年上海春.21）　设函数$f(x)=\left|x^2-4x-5\right|$.

（1）在区间$[-2,\ 6]$上画出函数$f(x)$的图像；

（2）设集合$A=\left\{x\,\middle|\,f(x)\geq 5\right\}$，$B=(-\infty,\ -2]\cup[0,\ 4]\cup[6,\ +\infty)$．试判断集合$A$和$B$之间的关系，并给出证明；

（3）当$k>2$时，求证：在区间$[-1,\ 5]$上，$y=kx+3k$的图像位于函数$f(x)$图像的上方.

第 7 练　数列与不等式专题

※基础达标

1．(05 年福建卷.文 5）下列结论正确的是（　　）．

A．$当x>0且x\neq 1时,\lg x+\dfrac{1}{\lg x}\geq 2$　　B．$当x>0时,\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\geq 2$

C．$当x\geq 2时,x+\dfrac{1}{x}$ 的最小值为 2　　D．当 $0<x\leq 2时,x-\dfrac{1}{x}$ 无最大值

2．(06 年广东卷.6）已知某等差数列共有 10 项，其奇数项之和为 15，偶数项之和为 30，则其公差为（　　）．

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

3．设 $a<0$，则关于 x 的不等式 $42x^2+ax-a^2<0$ 的解集为（　　）．

A．（$\dfrac{a}{7}$，$-\dfrac{a}{6}$）　　B．（$-\dfrac{a}{6}$，$\dfrac{a}{7}$）　　C．（$\dfrac{a}{7}$，$-\dfrac{2}{7}a$）　　D．Φ

4．(05 年辽宁卷.7）在 **R** 上定义运算 $\otimes: x\otimes y=x(1-y)$．若不等式 $(x-a)\otimes(x+a)<1$ 对任意实数 x 成立，则（　　）．

A．$-1<a<1$　　B．$0<a<2$　　C．$-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{2}$　　D．$-\dfrac{3}{2}<a<\dfrac{1}{2}$

5．(05 全国卷Ⅰ. 8）设 $0<a<1$，函数 $f(x)=\log_a(a^{2x}-2a^x-2)$，则使 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围是（　　）．

A. $(-\infty,0)$　　B. $(0,+\infty)$　　C. $(-\infty,\log_a 3)$　　D. $(\log_a 3,+\infty)$

6．(05 年天津卷.文理 13）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=2$，且 $a_{n+2}-a_n=1+(-1)^n\quad(n\in N^*)$，则 $S_{100}=$________．

7．设 $a>0$，$b>0$，a，b 是常数，则当 $x>0$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{(x+a)(x+b)}{x}$ 的最小值是 _______．

8．(05 年湖北卷.理 15）设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，前 n 项和为 S_n，若 S_{n+1},S_n，S_{n+2} 成等差数列，则 q 的值为 __________．

9．(**理**)（05 年北京卷.文 14）已知 n 次多项式 $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，

如果在一种算法中，计算 $x_0^{\,k}$（k＝2，3，4，…，n）的值需要 k－1 次乘法，计算 $P_3(x_0)$ 的值共需要 9 次运算（6 次乘法，3 次加法），那么计算 $P_n(x_0)$ 的值共需要______________次运算．

下面给出一种减少运算次数的算法：$P_0(x)=a_0,P_{k+1}(x)=xP_k(x)+a_{k+1}$（k＝0，1，2，…，$n$－1）．利用该算法，计算 $P_3(x_0)$ 的值共需要 6 次运算，计算 $P_n(x_0)$ 的值共需要_________次运算.

10．(05 年北京卷.文 17）数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}S_n$，n=1，2，3，……，求

（1）a_2，a_3，a_4 的值及数列$\{a_n\}$的通项公式；（2）$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}$ 的值.

11．(05 年全国卷 II.文 19）已知$\{a_n\}$是各项为不同的正数的等差数列，$\lg a_1$、$\lg a_2$、$\lg a_4$ 成等差数列．又 $b_n=\dfrac{1}{a_{2^n}}$，$n=1,2,3,\cdots$．（1）证明$\{b_n\}$为等比数列；（2）如果数列$\{b_n\}$前 3 项的和等于 $\dfrac{7}{24}$，求数列$\{a_n\}$的首项 a_1 和公差 d．

※能力提高

12．（06年上海卷.文20）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且对任意正整数n，$a_n+S_n=4096$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式;（2）设数列$\{\log_2 a_n\}$的前n项和为T_n,对数列$\{T_n\}$，从第几项起$T_n<-509$？

13．（05年全国卷Ⅰ.理19）设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，前n项和$S_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$.

（1）求q的取值范围;（2）设$b_n=a_{n+2}-\frac{3}{2}a_{n+1}$，记$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$，试比较$S_n$与$T_n$的大小.

14．（**理**）（05年辽宁卷.19）已知函数$f(x)=\frac{x+3}{x+1}\,(x\neq -1)$. 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=f(a_n)$，数列$\{b_n\}$满足$b_n=|a_n-\sqrt{3}|$，$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n\ (n\in N^*)$.

（1）用数学归纳法证明$b_n\le\frac{(\sqrt{3}-1)^n}{2^{n-1}}$；（2）证明 $S_n<\frac{2-\sqrt{3}}{3}$.

※探究创新

15．（05年湖北卷.理22）已知不等式$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}[\log_2 n]$,其中$n$为大于2的整数，$[\log_2 n]$表示不超过$\log_2 n$的最大整数. 设数列$\{a_n\}$的各项为正，且满足$a_1=b(b>0),a_n\le\frac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}},n=2,3,4,\cdots$

（1）证明$a_n<\frac{2b}{2+b[\log_2 n]},n=3,4,5,\cdots$

（2）猜测数列$\{a_n\}$是否有极限？如果有，写出极限的值（不必证明);

（3）试确定一个正整数**N**，使得当$n>N$时，对任意b>0，都有$a_n<\frac{1}{5}$.

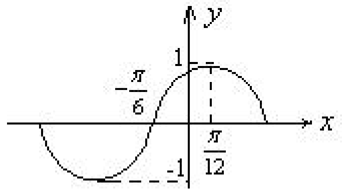
第 8 练　三角与向量专题

※基础达标

1．（06 年湖北卷.文理 3）若 ΔABC 的内角 A 满足 $\sin 2A=\frac{2}{3}$，则 $\sin A+\cos A=$（　　）.

A. $\frac{\sqrt{15}}{3}$　　B. $-\frac{\sqrt{15}}{3}$　　C. $\frac{5}{3}$　　D. $-\frac{5}{3}$

2.（06 年四川卷.文 6 理 5）下列函数中，图象的一部分如右图所示的是（　　）.



A. $y=\sin(x+\frac{\pi}{6})$　　B. $y=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$

C. $y=\cos(4x-\frac{\pi}{3})$　　D. $y=\cos(2x-\frac{\pi}{6})$

3．（06 年湖北卷.理 1）已知向量 $\vec{a}=(\sqrt{3},1)$，$\vec{b}$ 是不平行于 x 轴的单位向量，且 $\vec{a}\bullet\vec{b}=\sqrt{3}$，则 $\vec{b}=$（　　）.

A. （$\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}$）　　B. （$\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}$）　　C. （$\frac{1}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4}$）　　D. （1,0）

4.（05 年山东卷.文 7 理 6）函数 $f(x)=\begin{cases}\sin(\pi x^2),-1<x<0\\ e^{x-1},x\geq 0\end{cases}$，若 $f(1)+f(a)=2$，则 a 的所有可能值为（　　）.

A. 1　　B. $1,-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $1,\frac{\sqrt{2}}{2}$

5.（05 年湖南卷.文 9）P 是△ABC 所在平面上一点，若 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$，则 P 是△ABC 的（　　）.

A．外心　　B．内心　　C．重心　　D．垂心

6．向量 $\vec{a}$ ＝(cos23°，sin23°)，$\vec{b}$ ＝(cos68°，sin68°)，　则 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的值为 _______.

7．（06 年北京卷.文 12）已知向量 $\vec{a}$=(cos α，sin α)，$\vec{b}$=(cos β，sin β)，且 $\vec{a}\neq\pm\vec{b}$，那么 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 的夹角的大小是______________.

8．（05 年上海卷.文理 12）函数 $f(x)=\sin x+2|\sin x|,x\in\left[0,2\pi\right]$ 的图象与直线 $y=k$ 有且仅有两个不同的交点，则 k 的取值范围是__________.

9．（**理**）运用物理中矢量运算及向量坐标表示与运算，我们知道：

（1）若两点等分单位圆时有相应关系式为：$\sin\alpha+\sin(\pi+\alpha)=0,\cos\alpha+\cos(\pi+\alpha)=0,$

（2）四点等分单位圆时有相应关系式为：

$\sin\alpha+\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})+\sin(\alpha+\pi)+\sin(\alpha+\frac{3\pi}{2})=0$，$\cos\alpha+\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})+\cos(\pi+\alpha)+\cos(\alpha+\frac{3\pi}{2})=0$，

由此可以推知三等分单位圆时的相应关系式为________________________________.

10.（06 年辽宁卷.文理 17）已知函数 $f(x)=\sin^2 x+2\sin x\cos x+3\cos^2 x$，$x\in R$.求：

（1）函数 $f(x)$ 的最大值及取得最大值时自变量 x 的集合；　（2）函数 $f(x)$ 的单调增区间.

11．已知 $\vec{a}=(\cos\frac{3}{2}x,\sin\frac{3}{2}x)$，$\vec{b}=(\cos\frac{x}{2},-\sin\frac{x}{2})$，且 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

（1）求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 及 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$；　（2）求函数 $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}-\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\sin x$ 的最小值.

※能力提高

12．（06年上海春.19）已知函数 $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})-2\cos x,\quad x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$.

（1）若 $\sin x=\frac{4}{5}$，求函数 $f(x)$ 的值；　　（2）求函数 $f(x)$ 的值域.

13．（06年湖北卷.文16）设向量 $\vec{a}=(sinx，cosx)$，$\vec{b}=(cosx，cosx)$，$x\in$R，函数 $f(x)=\vec{a}\bullet(\vec{a}+\vec{b})$.

（1）求函数 $f(x)$ 的最大值与最小正周期；　（2）求使不等式 $f(x)\geqslant\frac{3}{2}$ 成立的 x 的取值集合.

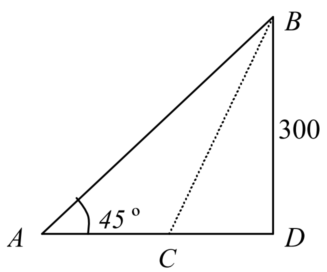
14．（**理**）（06年四川卷.理17）已知 A,B,C 是三角形 ΔABC 三内角，向量 $\vec{m}=(-1,\sqrt{3}),\ \vec{n}=(\cos A,\sin A)$，且 $\vec{m}\cdot\vec{n}=1$.　（1）求角 A；　（2）若 $\frac{1+\sin 2B}{\cos^2 B-\sin^2 B}=-3$，求 $\tan B$.

※探究创新

15．如图，某海滨浴场的岸边可近似地看作直线 a，救生员现在岸边的 A 处，发现海中的 B 处有人求救，救生员没有直接从 A 处游向 B 处，而是沿岸边 A 跑到离 B 最近的 D 处，然后游向 B 处，若救生员在岸边的行进速度为 6 米/秒，在游水中的行进速度为 2 米/秒.

（1）分析救生员的选择是否正确；

（2）在 AD 上找一点 C，使救生员从 A 到 B 的时间为最短，并求出最短时间.



第 9 练　解析几何专题

※基础达标

1．（06 年辽宁卷.文 7 理 4）双曲线 $x^2-y^2=4$ 的两条渐近线与直线 $x=3$ 围成一个三角形区域，表示该区域的不等式组是（　　）.

A. $\begin{cases}x-y\ge 0\\x+y\ge 0\\0\le x\le 3\end{cases}$　B. $\begin{cases}x-y\ge 0\\x+y\le 0\\0\le x\le 3\end{cases}$　C. $\begin{cases}x-y\le 0\\x+y\le 0\\0\le x\le 3\end{cases}$　D. $\begin{cases}x-y\le 0\\x+y\ge 0\\0\le x\le 3\end{cases}$

2．（06 年全国卷Ⅱ.文 11）过点（－1，0）作抛物线 $y=x^2+x+1$ 的切线，则其中一条切线为（　　）.

A. $2x+y+2=0$　B. $3x-y+3=0$　C. $x+y+1=0$　D. $x-y+1=0$

3．（06 年重庆卷.理 3）过坐标原点且与 $x^2+y^2+4x+2y+\frac{5}{2}=0$ 相切的直线的方程为（　　）.

A. $y=-3x$ 或 $y=\frac{1}{3}x$　B. $y=3x$ 或 $y=-\frac{1}{3}x$　C. $y=-3x$ 或 $y=-\frac{1}{3}x$　D. $y=3x$ 或 $y=\frac{1}{3}x$

4．（06 年江西卷.理 4）设 O 为坐标原点，F 为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，A 是抛物线上一点，若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AF}=-4$，则点 A 的坐标是（　　）.

A.（2，$\pm2\sqrt{2}$）　B. (1，±2)　C.（1，2）　D. (2，$2\sqrt{2}$)

5．（06 年湖北卷.文 9 理 7）设过点 $P(x,y)$ 的直线分别与 x 轴的正半轴和 y 轴的正半轴交于 A,B 两点，点 Q 与点 P 关于 y 轴对称，O 为坐标原点，若 $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$ 且 $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AB}=1$，则点 P 的轨迹方程是（　　）.

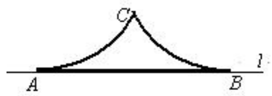
A. $3x^2+\frac{3}{2}y^2=1(x>0,y>0)$　B. $3x^2-\frac{3}{2}y^2=1(x>0,y>0)$

C. $\frac{3}{2}x^2-3y^2=1(x>0,y>0)$　D. $\frac{3}{2}x^2+3y^2=1(x>0,y>0)$

6．（06 年上海卷.文 7）已知双曲线中心在原点，一个顶点的坐标为 $(3,0)$，且焦距与虚轴长之比为 $5:4$，则双曲线的标准方程是_______.

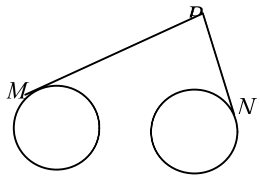
7．（05 年湖南卷.理 13）已知直线 $ax+by+c=0$ 与圆 O：$x^2+y^2=1$ 相交于 A、B 两点，且 $|AB|=\sqrt{3}$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$_________.

8．（07 年上海.文 11）如图，A，B 是直线 l 上的两点，且 $AB=2$．两个半径相等的动圆分别与 l 相切于 A，B 点，C 是这两个圆的公共点，则圆弧 AC，CB 与线段 AB 围成图形面积 S 的取值范围是____________.



9．（**理**）（05 年重庆卷.文 16）已知 $A(-\frac{1}{2},0)$，B 是圆 F：$(x-\frac{1}{2})^2+y^2=4$（F 为圆心）上一动点，线段 AB 的垂直平分线交 BF 于 P，则动点 P 的轨迹方程为 _________________.

10．（05 年江苏卷.19）如图，圆 O_1 与圆 O_2 的半径都是 1，$O_1O_2=4$，过动点 P 分别作圆 O_1、圆 O_2 的切线 PM、PN（M、N 分别为切点），使得 $PM=\sqrt{2}PN$．试建立适当的坐标系，并求动点 P 的轨迹方程.



11．（08 年上海春.18）在平面直角坐标系 xOy 中，A、B 分别为直线 $x+y=2$ 与 x、y 轴的交点，C 为 AB 的中点. 若抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 过点 C，求焦点 F 到直线 AB 的距离.

※能力提高

12．（05 年全国卷 III.文 22）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 两点在抛物线 $y=2x^2$ 上，l 是 AB 的垂直平分线.（1）当且仅当 x_1+x_2 取何值时，直线 l 经过抛物线的焦点 F？证明你的结论；（2）当 $x_1=1,x_2=-3$ 时，求直线 l 的方程.

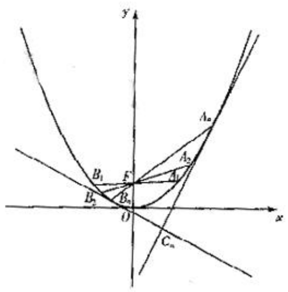
13．（05 年全国卷Ⅰ.文 22 理 21）已知椭圆的中心为坐标原点 O，焦点在 x 轴上，斜率为 1 且过椭圆右焦点 F 的直线交椭圆于 A、B 两点，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 与 $\vec{a}=(3,-1)$ 共线.

（1）求椭圆的离心率；（2）设 M 为椭圆上任意一点，且 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}\ (\lambda,\mu\in R)$，证明 $\lambda^2+\mu^2$ 为定值.

14．（**理**）（06 年重庆卷.文 22）如图，对每个正整数 n，$A_n(x_n,y_n)$ 是抛物线 $x^2=4y$ 上的点，过焦点 F 的直线 FA_n 交抛物线于另一点 $B_n(s_n,t_n)$．

（1）试证：$x_ns_n=-4\ (n\geq 1)$；

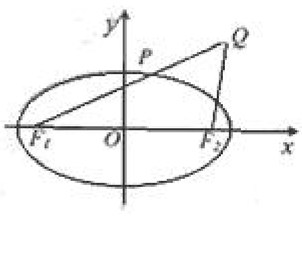
（2）取 $x_n=2^n$，并记 C_n 为抛物线上分别以 A_n 与 B_n 为切点的两条切线的交点. 试证：$|FC_1|+|FC_2|+\cdots+|FC_n|=2^n-2^{-n+1}+1$；



※探究创新

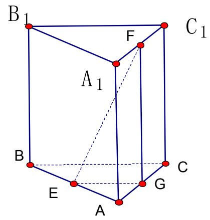
15．（05 年辽宁卷.21）已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1（－c，0）、F_2（c，0），Q 是椭圆外的动点，满足 $|\overrightarrow{F_1Q}|=2a$. 点 P 是线段 F_1Q 与该椭圆的交点，点 T 在线段 F_2Q 上，并且满足 $\overrightarrow{PT}\cdot\overrightarrow{TF_2}=0,|\overrightarrow{TF_2}|\neq 0$.

（1）设 x 为点 P 的横坐标，证明 $|\overrightarrow{F_1P}|=a+\dfrac{c}{a}x$；　（2）求点 T 的轨迹 C 的方程；　（3）试问：在点 T 的轨迹 C 上，是否存在点 M，使△F_1MF_2 的面积 S=b^2. 若存在，求∠F_1MF_2 的正切值；若不存在，请说明理由.



第 10 练　立体几何专题

※基础达标



1.（06 年浙江卷.文 8）如图，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各棱长都 2，E，F 分别是 AB,A_1C_1 的中点，则 EF 的长是（　　）.

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{7}$

2．已知异面直线 a 和 b 所成的角为 50°，P 为空间一定点，则过点 P 且与 a、b 所成角都是 30°的直线有且仅有（　　）.

A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 4 条

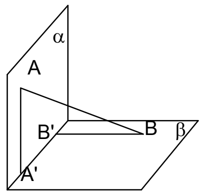
3．（06 年湖北卷.文理 6）关于直线 m,n 与平面 α,β，有以下四个命题：

①若 $m//\alpha,n//\beta$ 且 $\alpha//\beta$，则 $m//n$；②若 $m\perp\alpha,n\perp\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$，则 $m\perp n$；

③若 $m\perp\alpha,n//\beta$ 且 $\alpha//\beta$，则 $m\perp n$；④若 $m//\alpha,n\perp\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$，则 $m//n$；

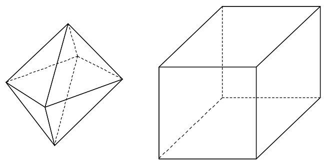
其中真命题的序号是（　　）.

A. ①②　　B. ③④　　C. ①④　　D. ②③



4．（06 年全国 II.理 7）如图，平面 $\alpha\perp$平面 β，$A\in\alpha$，$B\in\beta$，AB 与两平面 α、β 所成的角分别为 $\dfrac{\theta}{4}$ 和 $\dfrac{\theta}{6}$，过 A、B 分别作两平面交线的垂线，垂足为 A'、B'，则 AB∶$A'B'$＝（　　）.

A. 2∶1　　B. 3∶1　　C. 3∶2　　D. 4∶3

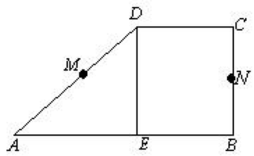


5．（06 年江苏卷.9）两相同的正四棱锥组成如图所示的几何体，可放入棱长为 1 的正方体内，使正四棱锥的底面 ABCD 与正方体的某一个平面平行，且各顶点均在正方体的面上，则这样的几何体体积的可能值有（　　）.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 无穷多个

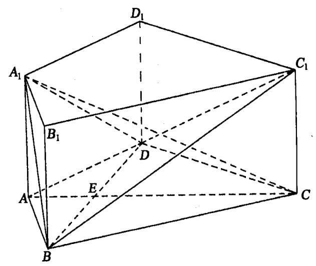
6．（06 年上海春）正四棱锥底面边长为 4，侧棱长为 3，则其体积为_______.

7．（05 年湖南卷.文 15）已知平面 α,β 和直线 m，给出条件：①$m//\alpha$；②$m\perp\alpha$；③$m\subset\alpha$；④$\alpha\perp\beta$；⑤$\alpha//\beta$. 则（i）当满足条件________时，有 $m//\beta$；（ii）当满足条件_______时，有 $m\perp\beta$.



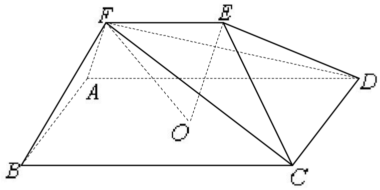
8．（05 年浙江卷.12）设 M、N 是直角梯形 $ABCD$ 两腰的中点，$DE\perp AB$ 于 E(如图). 现将△ADE 沿 DE 折起，使二面角 $A-DE-B$ 为 45°，此时点 A 在平面 $BCDE$ 内的射影恰为点 B，则 M、N 的连线与 AE 所成角的大小等于_________.

9．（**理**）在正方体 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 中，M、N 分别为棱 A_1A 和 B_1B 中点，则异面直线 CM 与 D_1N 所成角的正弦值 ________.



10．（05 年北京卷.理 16）如图，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AD=2$，$DC=2\sqrt{3}$，$AA_1=\sqrt{3}$，$AD\perp DC$，$AC\perp BD$，　垂足为 E.

（1）求证：$BD\perp A_1C$；2）求二面角 A_1-BD-C_1 的大小.



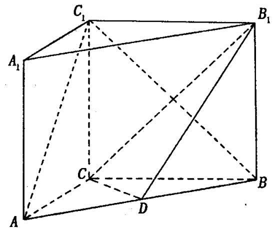
11．（06 年天津卷.文理 19）如图，在五面体 $ABCDEF$ 中，点 O 是矩形 $ABCD$ 的对角线的交点，面 CDE 是等边三角形，棱 $EF\underset{=}{//}\dfrac{1}{2}BC$.

（1）证明 $FO//$平面 CDE；（2）设 $BC=\sqrt{3}CD$，证明 $EO\perp$平面 CDF.

※能力提高

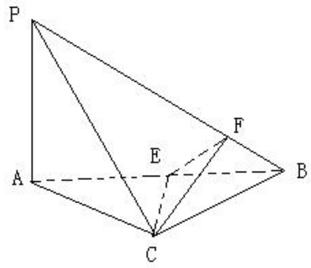
12．如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=3$，$BC=4$，$AA_1=4$，点 D 是 AB 的中点.（1）求证：$AC\perp BC_1$；　（2）求证：AC_1//平面 CDB_1；

（3）求异面直线 AC_1 与 B_1C 所成角的余弦值.



13．（05 年广东卷.16）如图，$PA=BC=6$，$PC=AB=10$，$AC=8$，$PB=2\sqrt{34}$，F 是线段 PB 上一点，$CF=\dfrac{15\sqrt{34}}{17}$，点 E 在线段 AB 上，且 $EF\perp PB$.

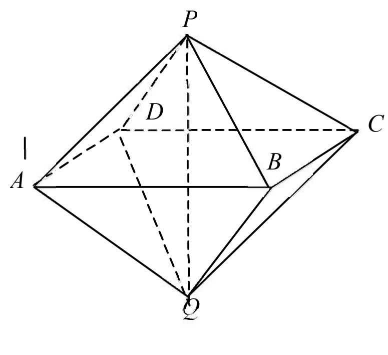
（1）求证：$PB\perp$平面 CEF；（2）求二面角 $B—CE—F$ 的正切值.



14.（**理**）(06 年湖南卷.理 18)如图,已知两个正四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 与 $Q\text{-}ABCD$ 的高分别为 1 和 2，$AB=4$.

（1）证明 $PQ\perp$平面 $ABCD$;（2）求异面直线 AQ 与 PB 所成的角的余弦；

（3）求点 P 到平面 QAD 的距离.

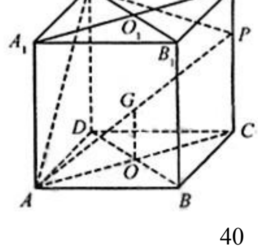


※探究创新

15.（06 年湖北卷.理 18)如图,在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,P 是侧棱 CC_1 上的一点,$CP=m$.

（1）试确定 m，使直线 AP 与平面 BDD_1B_1 所成角的正切值为 $3\sqrt{2}$；

（2）在线段 A_1C_1 上是否存在一个定点 Q，使得对任意的 m，D_1Q 在平面 APD_1 上的射影垂直于 AP，并证明你的结论.



第 11 练　概率与统计专题

※基础达标

1．（05 年浙江卷.文 6）从存放号码分别为 1，2，⋯，10 的卡片的盒子中，有放回地取 100 次，每次取一张卡片并记下号码，统计结果如下：

卡片号码	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
取到的次数	13	8	5	7	6	13	18	10	11	9

则取到号码为奇数的频率是（　　）.

A.　0.53　　B.　0.5　　C.　0.47　　D.　0.37

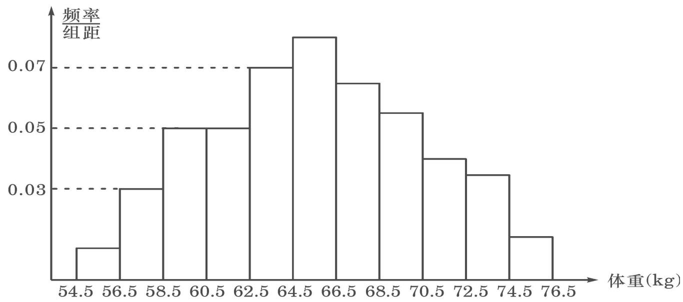
2．（05 年江苏卷.7）在一次歌手大奖赛上，七位评委为歌手打出的分数如下：9.4，8.4，9.4，9.9，9.6，9.4，9.7 去掉一个最高分和一个最低分后,所剩数据的平均值和方差分别为（　　）.

A.　9.4，　0.484　　B.　9.4，　0.016　　C. 9.5，　0.04　　D. 9.5，　0.016

3．（**理**）（04 年辽宁卷.5）甲、乙两人独立地解同一问题，甲解决这个问题的概率是 p_1，乙解决这个问题的概率是 p_2，那么恰好有 1 人解决这个问题的概率是（　　）.

A.　p_1p_2　　B.　$p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1)$　　C.　$1-p_1p_2$　　D.　$1-(1-p_1)(1-p_2)$

4．（06 年重庆卷.理 6）为了了解某地区高三学生的身体发育情况，抽查了该地区 100 名年龄为 17.5 岁－1 8 岁的男生体重(kg) ,得到频率分布直方图如下：



根据上图可得这 100 名学生中体重在〔56.5,64.5〕的学生人数是（　　）.

A. 20　　B. 30
C. 40　　D. 50

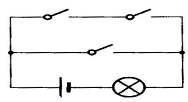
5．（**理**）同时抛掷 4 枚均匀的硬币 80 次，设 4 枚硬币正好出现 2 枚正面向上，2 枚反面向上的次数为 ξ，则 ξ 的数学期望是（　　）.

A.　20　　B. 25　　C.　30　　D.　40

6．（2000 年江西、天津）从含有 500 个个体的总体中一次性地抽取 25 个个体，假定其中每个个体被抽到的概率相等，那么总体中的每个个体被抽取的概率等于__________.

7．（**理**）（05 年春上海卷.6）某班共有 40 名学生，其中只有一对双胞胎，若从中一次随机抽查三位学生的作业，则这对双胞胎的作业同时被抽中的概率是__________.（结果用最简分数表示）

8．（**理**）如图，已知电路中 3 个开关闭合的概率都是 0.5，且是相互独立的，则灯亮的概率为__________.



9．（**理**）（05 年福建卷.理 15）一个均匀小正方体的六个面中，三个面上标以数 0，两个面上标以数 1,一个面上标以数 2，将这个小正方体抛掷 2 次，则向上的数之积的数学期望是 _______.

10．（**理**）（04 年重庆卷.文 18）设甲、已、丙三人每次射击命中目标的概率分别为 0.7、0.6 和 0.5.

（1）三人各向目标射击一次，求至少有一人命中目标的概率及恰有两人命中目标的概率；

（2）若甲单独向目标射击三次，求他恰好命中两次的概率.

11．（**理**）（06 年江西卷.理 18）某商场举行抽奖促销活动，抽奖规则是：从装有 9 个白球，1 个红球的箱子中每次随机地摸出一个球，记下颜色后放回，摸出一个红球可获得奖金 10 元；摸出 2 个红球可获得奖金 50 元，现有甲，乙两位顾客，规定：甲摸一次，乙摸两次，令 ξ 表示甲，乙摸球后获得的奖金总额. 求：

（1）ξ 的分布列；（2）ξ 的数学期望.

※能力提高

12．（07 年湖北卷.理 17）在生产过程中，测得纤维产品的纤度（表示纤维粗细的一种量）共有 100 个数据，将数据分组如右表：

（1）在答题卡上完成频率分布表，并在给定的坐标系中画出频率分布直方图；

（2）估计纤度落在$[1.38,1.50)$中的概率及纤度小于1.40的概率是多少？

（3）统计方法中，同一组数据常用该组区间的中点值（例如区间$[1.30,1.34)$的中点值是1.32）作为代表．据此，估计纤度的期望．

分组	频数
$[1.30,1.34)$	4
$[1.34,1.38)$	25
$[1.38,1.42)$	30
$[1.42,1.46)$	29
$[1.46,1.50)$	10
$[1.50,1.54)$	2
合计	100

13．（**理**）某投资人打算作投资，有两个项目在考虑的范围内．据评估，甲、乙两个项目盈利的可能性分别为 70%和 50%，盈利率分别是 40%和 50%，亏损的可能性分别是 15%和 20%，其相应的亏损率分别为 20%和 15%，其余的情况是不盈不亏．如果投资人在甲、乙两个项目分别投资 10 万元，问期望盈利是多少万元？

14．（**理**）（06 年山东卷.理 20）袋中装着标有数学 1，2，3，4，5 的小球各 2 个，从袋中任取 3 个小球，按 3 个小球上最大数字的 9 倍计分，每个小球被取出的可能性都相等，用ε表示取出的 3 个小球上的最大数字，求：（1）取出的 3 个小球上的数字互不相同的概率；（2）随机变量ε的概率分布和数学期望；　（3）计分介于 20 分到 40 分之间的概率.

※探究创新

15．（04 年湖北卷.理 21）某突发事件，在不采取任何预防措施的情况下发生的概率为 0.3，一旦发生，将造成 400 万元的损失. 现有甲、乙两种相互独立的预防措施可供采用. 单独采用甲、乙预防措施所需的费用分别为 45 万元和 30 万元，采用相应预防措施后此突发事件不发生的概率为 0.9 和 0.85. 若预防方案允许甲、乙两种预防措施单独采用、联合采用或不采用，请确定预防方案使总费用最少.

（总费用=采取预防措施的费用+发生突发事件损失的期望值.）

第 12 练　数学应用问题

※基础达标

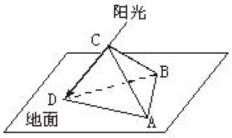
1.（04 年湖南卷）某公司甲、乙、丙、丁四个地区分别有 150 个、120 个、180 个、150 个销售点. 公司为了调查产品销售的情况，需从这 600 个销售点中抽取一个容量为 100 的样本，记这项调查为①；在丙地区中有 20 个特大型销售点，要从中抽取 7 个调查其收入和售后服务等情况，记这项调查为②. 则完成①、②这两项调查宜采用的抽样方法依次是（　　）.

A．分层抽样法，系统抽样法　　B．分层抽样法，简单随机抽样法

C．系统抽样法，分层抽样法　　D．简单随机抽样法，分层抽样法

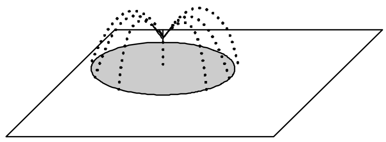
2．两条绳提吊一个物体，如果物体的重量为 $200N$，两条绳的长度相同，且夹角为60°. 则每条绳用力的大小为（　　）.

A. $\dfrac{200\sqrt{3}}{3}N$　　B. 100 N　　C. 200 N　　D. $100\sqrt{2}\,N$



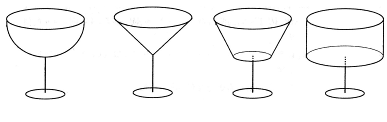
3．如图，△ABC 是简易遮阳棚，A、B 是南北方向上两个定点，正东方向射出的太阳光线与地面成 40° 角，为了使遮阴影面 ABD 面积最大，遮阳棚 ABC 与地面所成的角为（　　）.

A.75°　　B.60°　　C.50°　　D.45°



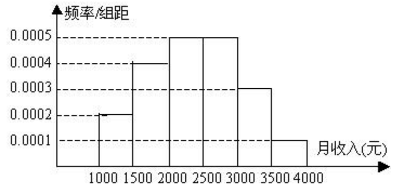
4．（07 年浙江卷.文 5 理 4）要在边长为 16 米的正方形草坪上安装喷水龙头，使整个草坪都能喷洒到水．假设每个喷水龙头的喷洒范围都是半径为 6 米的圆面，则需安装这种喷水龙头的个数最少是（　　）.

A.　6　　B. 5　　C. 4　　D. 3



5．（07 年江西卷.文 11 理 8）四位好朋友在一次聚会上，他们按照各自的爱好选择了形状不同、内空高度相等、杯口半径相等的圆口酒杯，如图所示．盛满酒后他们约定：先各自饮杯中酒的一半．设剩余酒的高度从左到右依次为 h_1，h_2，h_3，h_4，则它们的大小关系正确的是（　　）.

A．$h_2>h_1>h_4$　　B．$h_1>h_2>h_3$　　C．$h_3>h_2>h_4$　　D．$h_2>h_4>h_1$



6．（06 年全国卷Ⅰ.文理 16）一个社会调查机构就某地居民的月收入调查了 10 000 人，并根据所得数据画了样本的频率分布直方图（如下图）．为了分析居民的收入与年龄、学历、职业等方面的关系，要从这 10 000 人中再用分层抽样方法抽出 100 人作进一步调查，则在[2500，3000]（元）月收入段应抽出________人.

7．（03 年北京卷.文）将长度为 1 的铁丝分成两段，分别围成一个正方形和一个圆形，要使正方形与圆的面积之和最小，正方形的周长应为________.

8．（04 年春北京卷.理）据某校环保小组调查，某区垃圾量的年增长率为 b，2003 年产生的垃圾量为 a 吨．由此预测，该区下一年的垃圾量为__________吨，2008 年的垃圾量为________吨.

9．（**理**）（06 年湖北卷.文理 14）某工程队有 6 项工程需要单独完成，其中工程乙必须在工程甲完成后才能进行，工程丙必须在工程乙完成后才能进行，有工程丁必须在工程丙完成后立即进行. 那么安排这 6 项工程的不同排法种数是__________.（用数字作答）

10．某自来水厂的蓄水池存有 400 吨水，水厂每小时可向蓄水池中注水 60 吨，同时蓄水池又向居民小区不间断供水，t 小时内供水总量为$120\sqrt{6t}$ 吨，（$0\le t\le 24$）．（1）从供水开始到第几小时时，蓄水池中的存水量最少？最少水量是多少吨？（2）若蓄水池中水量少于 80 吨时，就会出现供水紧张现象，请问：在一天的 24 小时内，有几小时出现供水紧张现象？

11．（07 年湖北卷.文 18）某商品每件成本 9 元，售价为 30 元，每星期卖出 432 件，如果降低价格，销售量可以增加，且每星期多卖出的商品件数与商品单价的降低值 x（单位：元，$0\le x\le 30$）的平方成正比，已知商品单价降低 2 元时，一星期多卖出 24 件.

（1）将一个星期的商品销售利润表示成 x 的函数；（2）如何定价才能使一个星期的商品销售利润最大？

※能力提高

12．某外商到一开放区投资 72 万美元建起一座蔬菜加工厂，第一年各种经费 12 万美元，以后每年增加 4 万美元，每年销售蔬菜收入 50 万美元．（1）若扣除投资及各种经费，则从第几年开始获取纯利润？

（2）若干年后，外商为开发新项目，有两种处理方案：①年平均利润最大时以 48 万美元出售该厂；②纯利润总和最大时，以 16 万元出售该厂，问哪种方案最合算？

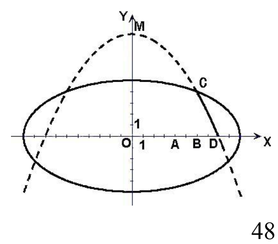
13．某厂使用两种零件 A、B 装配两种产品 P、Q，该厂的生产能力是月产 P 产品最多有 2500 件，月产 Q 产品最多有 1200 件；而且组装一件 P 产品要 4 个 A、2 个 B，组装一件 Q 产品要 6 个 A、8 个 B，该厂在某个月能用的 A 零件最多 14000 个；B 零件最多 12000 个.已知 P 产品每件利润 1000 元，Q 产品每件 2000 元，欲使月利润最大，需要组装 P、Q 产品各多少件？最大利润多少万元.

14．（**理**）（06 年全国卷Ⅰ.理 18）A、B 是治疗同一种疾病的两种药，用若干试验组进行对比试验. 每个试验组由 4 只小白鼠组成，其中 2 只服用 A，另 2 只服用 B，然后观察疗效. 若在一个试验组中，服用 A 有效的小白鼠的只数比服用 B 有效的多，就称该试验组为甲类组. 设每只小白鼠服用 A 有效的概率为 $\frac{2}{3}$，服用 B 有效的概率为 $\frac{1}{2}$.（1）求一个试验组为甲类组的概率；（2）观察 3 个试验组，求这 3 个试验组中至少有一个甲类组的概率.（3）观察 3 个试验组，用 ξ 表示这 3 个试验组中甲类组的个数，求 ξ 的分布列和数学期望.

※探究创新

15．学校科技小组在计算机上模拟航天器变轨返回试验. 设计方案如图：航天器运行（按顺时针方向）的轨迹方程为 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$，变轨（即航天器运行轨迹由椭圆变为抛物线）后返回的轨迹是以 y 轴为对称轴、$M(0,\ \frac{64}{7})$ 为顶点的抛物线的实线部分，降落点为 $D(8,\ 0)$. 观测点 $A(4,\ 0)$、$B(6,\ 0)$ 同时跟踪航天器.

（1）求航天器变轨后的运行轨迹所在的曲线方程；（2）试问：当航天器在 x 轴上方时，观测点 A、B 测得离航天器的距离分别为多少时，应向航天器发出变轨指令？



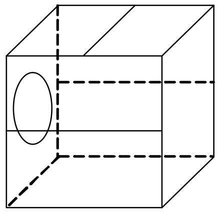
第 13 练　探究创新问题

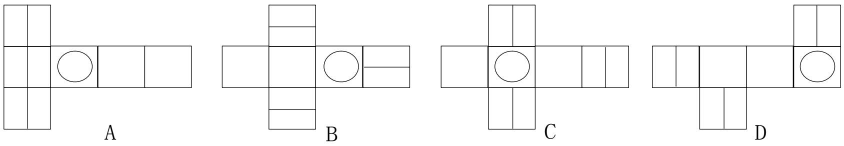
※基础达标

1．计算机是将信息转换成二进制进行处理的. 二进制即“逢二进一”，如 $(1101)_2$ 表示二进制数，将它转换成十进制形式，是 $1\times 2^3+1\times 2^2+0\times 2^1+1\times 2^0=13$，那么将二进制数 $(\underbrace{111\cdots 1}_{16})_2$ 转换成十进制形式是（　　）.

A. $2^{17}-2$　　B. $2^{16}-2$　　C. $2^{16}-1$　　D. $2^{15}-1$

2．正方体的直观图如图所示，则其展开图是（　　）.





3．（06 年上海.文 16）如果一条直线与一个平面垂直，那么，称此直线与平面构成一个“正交线面对”. 在一个正方体中，由两个顶点确定的直线与含有四个顶点的平面构成的“正交线面对”的个数是（　　）.

A. 48　　B. 18　　C. 24　　D. 36

4．（05 年上海高考）设 $f(x)=\dfrac{1}{3^x+\sqrt{3}}$，利用课本中推导等差数列前 n 项和的公式的方法，可求得 $f(-12)+f(-11)+f(-10)+\ldots+f(0)+\ldots+f(11)+f(12)+f(13)$ 的值为（　　）.

A．$\sqrt{3}$　　B．$13\sqrt{3}$　　C．$\dfrac{28\sqrt{3}}{3}$　　D．$\dfrac{13\sqrt{3}}{3}$

5．（05 年高考）新区新建有 5 个住宅小区（A、B、C、D、E），现要铺设连通各小区的自来水管道，如果它们两两之间的线路长如右表：

	A	B	C	D	E
A		5	7	8	5
B			3	5	2
C				5	4
D					4
E					

请问最短的管线长为（　　）.

A. 13　　B.14　　C.15　　D.17

6．若数列$\{a_n\}$是等差数列，数列$\{b_n\}$满足 $b_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}(n\in N^*)$，则$\{b_n\}$也为等差数列.类比上述性质，相应地，若数列$\{c_n\}$是等比数列，且 $c_n>0$，数列$\{d_n\}$满足 d_n=____________，则数列$\{d_n\}$也为等比数列.

7．在平面几何里，有勾股定理：“设△ABC 的两边 AB，AC 互相垂直，则 $AB^2+AC^2=BC^2$”拓展到空间，类比平面几何的勾股定理，研究三棱锥的侧面面积与底面面积间的关系，可以得出的正确结论是：“设三棱锥 A—BCD 的三个侧面 ABC、ACD、ADB 两两相互垂直，则________________________”.

8．观察 $\sin^2 20°+\cos^2 50°+\sin 20°\cos 50°=\dfrac{3}{4}$，$\sin^2 15°+\cos^2 45°+\sin 15°\cos 45°=\dfrac{3}{4}$，写出一个与以上两式规律相同的一个等式________________________.

9．（**理**）（05 年南通.九校联考 16）一项“过关游戏”规则规定：在第 n 关要抛掷一颗骰子 n 次，如果这 n 次抛掷所出现的点数之和大于 n^2，则算过关，那么，连过前二关的概率是__________.

10．（05 年南通市二研.16）已知向量 $\vec{a}=(1,2),\ \vec{b}=(-2,1)$. k,t 为正实数，向量 $\vec{x}=\vec{a}+(t^2+1)\vec{b},\ \vec{y}=-k\vec{a}+\dfrac{1}{t}\vec{b}$.

（1）若 $\vec{x}\perp\vec{y}$，求 k 的最小值；（2）是否存在 k,t，使 $\vec{x}/\!/\vec{y}$？若存在，求 k 的取值范围，否则说明理由.

11．已知数列$\{a_n\}$中，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n,(n\in N),a_n$ 为整数，

（1）写出一个满足上述条件的数列$\{a_n\}$的前 10 项，使它的第四项等于 5；

（2）若数列$\{a_n\}$中某一项是 5 的倍数，试探究它后面是否还会有某些项是 5 的倍数，并证明你的结论.

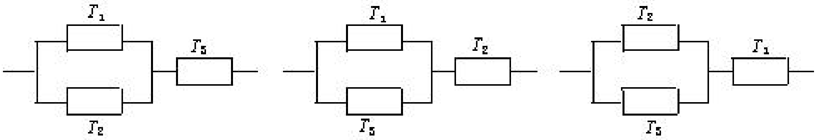
※能力提高

12．设 x_1、$x_2\in\mathrm{R}$，常数 $a>0$，定义运算“$\oplus$”：$x_1\oplus x_2=(x_1+x_2)^2$，定义运算“$\otimes$”：$x_1\otimes x_2=(x_1-x_2)^2$.

（1）若 $x\geqslant 0$，求动点 $P(x,\sqrt{(x\oplus a)-(x\otimes a)})$ 的轨迹方程；　（2）已知直线 $l_1: y=\dfrac{1}{2}x+1$ 与(1)中轨迹 C 交于 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 两点，若 $\sqrt{(x_1\otimes x_2)+(y_1\otimes y_2)}=8\sqrt{15}$，试求 a 的值.

13．设 A、B 是双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ 上的两点，点 $N(1,2)$是线段 AB 的中点，（1）求直线 AB 的方程；（2）如果线段 AB 的垂直平分线与双曲线交于 C、D 两点，那么 A、B、C、D 四点是否共圆？为什么？

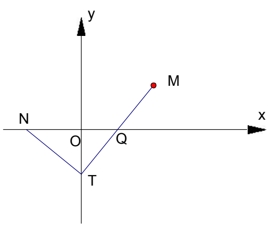
14．（**理**）三个元件 T_1、T_2、T_3 正常工作的概率分别为 0.7、0.8、0.9，将它们的某两个并联再和第三个串联接入电路，如图甲、乙、丙所示，问哪一种接法使电路不发生故障的概率最大？



甲　　乙　　丙

※探究创新

15．如图，已知点 $N(-4,0)$，点 T 在 y 轴上，$\overrightarrow{MT}\cdot\overrightarrow{NT}=0$，$MT$ 交 x 轴于点 Q，且 $\overrightarrow{TM}=2\overrightarrow{QM}$.　（1）当点 T 在 y 轴上移动时，求动点 M 的轨迹 E 的方程；

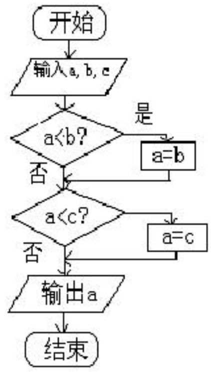


（2）设直线 l 过轨迹 E 的焦点 F, 且与该轨迹交于 A、B 两点，过 A、B 分别作该轨迹的对称轴的垂线，垂足分别为 A_1,A_2, 求证：$\left|\overrightarrow{OF}\right|$ 是 $\left|\overrightarrow{OA_1}\right|$ 和 $\left|\overrightarrow{OA_2}\right|$ 的等比中项；

（3）对于该轨迹 E，设其焦点为 F，能否存在一条不垂直于 x 轴的弦 CD，取该弦 CD 的中点 H，有 $\overrightarrow{FH}\perp\overrightarrow{CD}$？若存在，求出直线 CD 的方程；若不存在，试说明理由.

第 14 练　课标新增内容探讨

※基础达标



1．右图给出一个算法的程序框图，该程序框图的功能是（　　）.

A. 求输出 a,b,c 三数的最大数　　B. 求输出 a,b,c 三数的最小数

C. 将 a,b,c 按从小到大排列　　D. 将 a,b,c 按从大到小排列

2．通过残差来判断模型拟和的效果，判断原始数据中是否存在可疑数据，这种分析工作称为残差分析，那么残差图中的残差点比较均匀地落在较窄的水平的带状区域中，说明（　　）.

A. 模型选用的不合适，模型拟合精度不高，从而回归方程的预报精度不高

B. 模型选用的比较合适，模型拟合精度较高，从而回归方程的预报精度较高

C. 模型选用的合适，模型拟合精度较高，但回归方程的预报精度不高

D. 模型选用的合适，但模型拟合精度不高，从而回归方程的预报精度不高

3．设 $f(x)=3^x+3x-8$，用二分法求方程 $3^x+3x-8=0在x\in(1,2)$ 内近似解的过程中，计算得到 $f(1)<0,\ f(1.5)>0,\ f(1.25)<0,$ 则方程的根落在区间（　　）.

A.（1,1.25）　　B.（1.25,1.5）　　C.（1.5,2）　　D.不能确定

4．（**理**）设函数 $y=f(x)$在区间[0,2]上是连续函数,那么 $\int_0^2 f(x)dx=$（　　）.

A. $\int_0^1 xdx+\int_1^2 f(x)dx$　B. $\int_0^1 f(t)dt+\int_0^2 f(x)dx$　C. $\int_0^1 f(t)dt+\int_1^2 f(x)dx$　D. $\int_0^1 f(x)dx+\int_{0.5}^2 f(x)dx$

5．某学校为了调查喜欢语文学科与性别的关系，随机调查了一些学生情况，具体数据如下表：

性别＼类别	不喜欢语文	喜欢语文
男	13	10
女	7	20

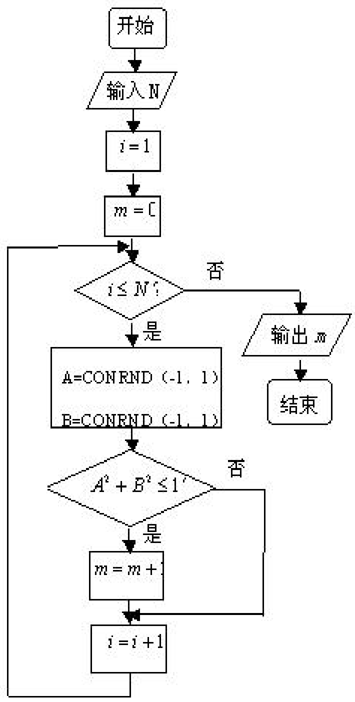
为了判断喜欢语文学科是否与性别有关系，根据表中的数据，得到 $K^2=\dfrac{50\times(13\times20-10\times7)^2}{23\times27\times20\times30}\approx4.844$

因为 $K^2\geq3.841$，根据下表中的参考数据：

$P(k^2>k)$	0.50	0.40	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	0.455	0.708	1.323	2.072	2.706	3.84	5.024	6.635	7.879	10.83

所以判定喜欢语文学科与性别有关系，那么这种判断出错的可能性为（　　）.

A. 97.5%　　B. 2.5%　　C. 95%　　D.　5%



6．在长为 12 ㎝的线段 AB 上任取一点 M，并线段 AM 为边作正方形，则这正方形的面积介于 $36cm^2$ 与 $81cm^2$ 之间的概率为_________.

7．为了科学地比较考试的成绩，有些选拔性考试常常会将考试分数转化为标准分，转化关系为：$Z=\dfrac{x-\bar{x}}{S}$（其中 x 是某位学生考试分数，$\bar{x}$ 是该次考试的平均分，S 是该次考试的标准差，Z 是这位学生的标准分）．转化成标准分后可能出现小数或负值，因此，又常常再将 Z 分数作线性变换转化成其它分数. 例如某次学业选拔考试采用的是 T 分数，线性变换公式是：$T=40Z+60$. 已知在这次考试中某位考生的考试分数是 85，这次考试的平均分是 70，标准差是 25，则该考生的 T 分数为____________.

8．右侧程序框图可用来估计 π 的值（假设函数 $CONRND$（-1,1）是产生随机数的函数，它能随机产生区间(-1,1)内的任何一个实数）．如果输入 1000，输出的结果为 788，则由此可估计 π 的近似值为_________.（保留四位有效数字）

9．（**理**）曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=x+2$ 围成的平面图形的面积为　_______.

10．为考察某种药物预防疾病的效果，进行动物试验，得到如下的列联表：

药物效果试验列联表

	患病	未患病	总计
服用药	10	45	55
没服用药	20	30	50
总计	30	75	105

请问能有多大把握认为药物有效？

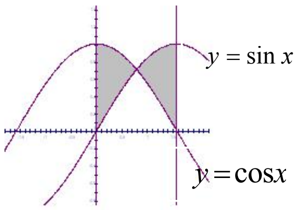
11．试在综合法、分析法、反证法等三种证明方法中，选用两种方法证明下列结论：

已知$0<a<1$，则$\frac{1}{a}+\frac{4}{1-a}\geq 9$.

※能力提高

12．已知函数$f(x)=x^2-5$写出方程$f(x)=0$在$[2,3]$上的近似解（精确到0．001）的算法程序，并画出程序框图.

13．（**理**）求曲线$y=\sin x,\ y=\cos x$与直线$x=0,\ x=\frac{\pi}{2}$所围成的平面图形（阴影部分）的面积.

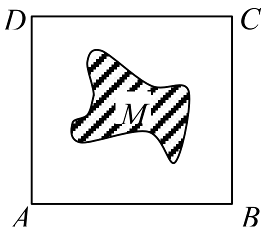


14．（**理**）已知$f(1)=0,\ af(n)-bf(n-1)=1,\ \ n\geq 2, a>0, b>0$.

（1）求$f(3), f(4), f(5)$；　（2）推测$f(n)$的表达式，并用数学归纳法证明.

※探究创新

15．（**理**）（07年海南宁夏卷.理29）如图，面积为S的正方形$ABCD$中有一个不规则的图形M，可按下面方法估计M的面积：在正方形$ABCD$中随机投掷n个点，若n个点中有m个点落入M中，则M的面积的估计值为$\frac{m}{n}S$．假设正方形$ABCD$的边长为2，M的面积为1，并向正方形$ABCD$中随机投掷10000个点，以X表示落入M中的点的数目.



（1）求X的均值EX；　（2）求用以上方法估计M的面积时，M的面积的估计值与实际值之差在区间$(-0.03,0.03)$内的概率.

附表：$P(k)=\sum_{t=0}^{k} C_{10000}^{t}\times 0.25^{t}\times 0.75^{10000-t}$

k	2424	2425	2574	2575
$P(k)$	0.0403	0.0423	0.9570	0.9590

第 15 练　选择、填空题解法

※基础达标

1．已知 F_1、F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 的两焦点，经点 F_2 的的直线交椭圆于点 A、B，若 $|AB|=5$，则 $|AF_1|+|BF_1|$ 等于（　　）.

A．11　　B．10　　C．9　　D．16

2．方程 $2x-x^2=\frac{2}{x}$ 的正根个数为（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3．一个等差数列的前 n 项和为 48，前 $2n$ 项和为 60，则它的前 $3n$ 项和为（　　）.

A．－24　　B．84　　C．72　　D．36

4．我国储蓄存款采取实名制并征收利息税，利息税由各银行储蓄点代扣代收. 某人在 2001 年 9 月存入人民币 1 万元，存期一年，年利率为 2.25%，到期时净得本金和利息共计 10180 元，则利息税的税率是（　　）.

A. 8%　　B. 20%　　C. 32%　　D. 80%

5．把函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 及 $x=b$ 之间的一段图象近似的看作直线，设 $a<c<b$，那么 $f(c)$ 的近似值可以表示为（　　）.

A. $\frac{f(a)+f(b)}{2}$　　B. $\sqrt{f(a)f(b)}$　　C. $f(a)+\frac{c-a}{b-a}[f(b)-f(a)]$　　D. $f(a)-\frac{c-a}{b-a}[f(b)-f(a)]$

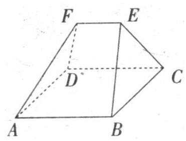
6．如果函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 对于任意实数 t 都有 $f(t+2)=f(2-t)$，那么 $f(1)$、$f(2)$、$f(4)$ 的大小关系是________.

7．若 $\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=1\ (x>0, y>0)$，则 $x+y$ 的最小值是______.

8．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=3n^2+2n+1$，则通项公式 $a_n=$______.

9．（**理**）若 $(2x+\sqrt{3})^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$，则 $(a_0+a_2+a_4)^2-(a_1+a_3)^2$ 的值为________.

10.（1）如图，在多面体 $ABCDFE$ 中，已知面 $ABCD$ 是边长为 3 的正方形，$EF\parallel AB$，$EF=\frac{3}{2}$，EF 与面 $ABCD$ 的距离为 2，则该多面体的体积为（　　）.



A. $\frac{9}{2}$　　B. 5　　C. 6　　D. $\frac{15}{2}$

（2）在 ΔABC 中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，如果 a、b、c 成等差数列，则 $\frac{\cos A+\cos C}{1+\cos A\cos C}=$__________.

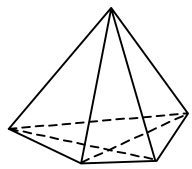
11．（1）在坐标平面内，与点 A（1，2）距离为 1，且与点 B（3，1）距离为 2 的直线共有（　　）.

A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 4 条

（2）已知向量 $\vec{a}=(\cos\theta,\sin\theta)$，向量 $\vec{b}=(\sqrt{3},-1)$，则 $|2\vec{a}-\vec{b}|$ 的最大值是________.

（3）设函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+2bx+c$．若当 $x\in$（0，1）时，$f(x)$ 取得极大值；$x\in$（1，2）时，$f(x)$ 取得极小值，则 $\frac{b-2}{a-1}$ 的取值范围是______________.

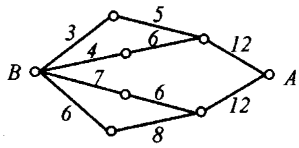
※能力提高



12．（1）由$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+1}$给出的数列$\{a_n\}$的第 34 项是（　　）．

A. $\dfrac{34}{103}$　　B. 100　　C. $\dfrac{1}{104}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

（2）（07 年广东卷.理 12）如果一个凸多面体是n棱锥，那么这个凸多面体的所有顶点所确定的直线共有____条，这些直线中共有$f(n)$对异面直线，则$f(4)=$________；$f(n)=$________．（答案用数字或n的解析式表示）



13．（1）如图，小圆圈表示网络的结点，结点之间的连线表示它们有网线相联，连线标的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量，现从结点A向结点B传送信息，信息可以分开沿不同的路线同时传送，则单位时间内传递的最大信息量为（　　）．

A．26　B．24　C．20　D．19

（2）已知$x\in R, a\in R$，a为常数，且$f(x+a)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$，则函数$f(x)$必有一周期为（　　）．

A. $2a$　　B. $3a$　　C. $4a$　　D. $5a$

14．（**理**）(1)某人射击一次击中目标的概率为 0.6，经过 3 次射击，此人至少有 2 次击中目标的概率为（　　）．

A. $\dfrac{81}{125}$　　B. $\dfrac{54}{125}$　　C. $\dfrac{36}{125}$　　D. $\dfrac{27}{125}$

（2）$(x+2)^{10}(x^2-1)$的展开式中x^{10}的系数为______________________．

※探究创新

15．（1）定义函数$y=f(x), x\in D$，若存在常数 C，对任意的$x_1\in D$，存在唯一的$x_2\in D$，使得$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=C$，则称函数$f(x)$在$D$上的均值为$C$. 已知$f(x)=\lg x, x\in[10,100]$，则函数$f(x)=\lg x$在$x\in[10,100]$上的均值为（　　）．

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $\dfrac{3}{4}$　　C. $\dfrac{7}{10}$　　D. 10

（2）（06 年上海卷.理 12）三个同学对问题“关于x的不等式$x^2+25+|x^3-5x^2|\geqslant ax$在[1，12]上恒成立，求实数$a$的取值范围”提出各自的解题思路．

甲说：“只须不等式左边的最小值不小于右边的最大值”．

乙说：“把不等式变形为左边含变量x的函数，右边仅含常数，求函数的最值”．

丙说：“把不等式两边看成关于x的函数，作出函数图像”．

参考上述解题思路，你认为他们所讨论的问题的正确结论，即a的取值范围是______．

第 16 练　综合题的解法

※基础达标

1．设集合 $A=\{(x,y)\,|\,y=ax+1\}$，$B=\{(x,y)\,|\,y=x+b\}$，且 $A\cap B=\{(2,5)\}$，则（　　）.

A．$a=3,b=2$　　B．$a=2,b=3$　　C．$a=-3,b=-2$　　D．$a=-2,b=-3$

2．若 f（tan$x$）=cos2x，则 $f(-\tan\frac{\pi}{3})$ 的值是（　　）.

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3．若以连续抛掷两次骰子分别得到的点数 m、n 作为点 P 的坐标，则点 P 落在圆 $x^2+y^2=10$ 内（含边界）的概率为（　　）.

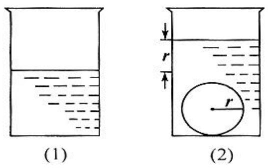
A．$\frac{1}{6}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{2}{9}$　　D．$\frac{7}{36}$

4．已知函数 $f(x)=2x^3-\frac{1}{2}x^2+m$ 的图象上 A 点处的切线与 x 轴平行，则 A 点的横坐标为（　　）.

A．0　　B．$\frac{1}{6}$　　C．0 或$\frac{1}{6}$　　D．1 或$\frac{1}{6}$

5．过抛物线 $y=ax^2\ (a>0)$ 的焦点 F 作一条直线交抛物线于 P、Q 两点，若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p、q，则$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$等于（　　）.

A．$2a$　　B．$\frac{1}{2a}$　　C．$4a$　　D．$\frac{4}{a}$



6．点 $M(a，b)$在直线 3x+4y＝15 上，则 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的最小值为________.

7．如图，一个底面半径为 R 的圆柱形量杯中装有适量的水；若放入一个半径为 r 的实心铁球，水面高度恰好升高 r，则$\frac{R}{r}$＝_______.

8．曲线 $y=x^3+3x^2+6x-10$ 的切线中，斜率最小的切线方程是____________.

9．（**理**）一质点做直线运动，它的瞬时速度 v 和时间 t 的关系是 v=6t+1，则从 t=0 到 t=2 时所经过路程为_________.

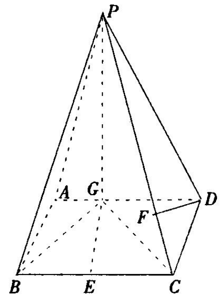
10．（04 年重庆卷.文理 17）求函数 $y=\sin^4x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^4x$ 的最小正周期和最小值；并写出该函数在$[0,\pi]$的单调递增区间.

11．（05 年福建卷.文 20）已知函数 $f(x)=x^3+bx^2+ax+d$ 的图象过点 P（0，2），且在点 $M(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $6x-y+7=0$.　（1）求函数 $y=f(x)$ 的解析式；（2）求函数 $y=f(x)$ 的单调区间.

※能力提高

12．（05 年上海.理 19）点 A、B 分别是椭圆 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ 长轴的左、右端点，点 F 是椭圆的右焦点，点 P 在椭圆上，且位于 x 轴上方，$PA\perp PF$．（1）求点 P 的坐标；（2）设 M 是椭圆长轴 AB 上的一点，M 到直线 AP 的距离等于 $|MB|$，求椭圆上的点到点 M 的距离 d 的最小值.

13．已知，如图四棱锥 $P—ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，$PG\perp$ 平面 $ABCD$，垂足为 G，G 在 AD 上，且 $AG=\frac{1}{3}GD$，$BG\perp GC$，$GB=GC=2$，E 是 BC 的中点，四面体 $P—BCG$ 的体积为 $\frac{8}{3}$.



（1）求异面直线 GE 与 PC 所成角的余弦；

（2）若 F 点是棱 PC 上一点，且 $DF\perp GC$，求 $\frac{PF}{FC}$ 的值.

14．（**理**）甲、乙两名篮球运动员，各自的投篮命中率分别为 0.7 与 0.8，如果每人投篮两次.

（1）求甲比乙多投进一次的概率；（2）若投进一个球得 2 分，未投进得 0 分，求两人得分之和的期望值.

※探究创新

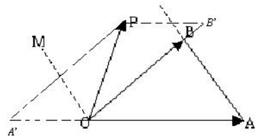
15．（05 年浙江卷.理 20）设点 $A_n(x_n，0)$，$P_n(x_n,2^{n-1})$ 和抛物线 C_n：$y=x^2+a_n x+b_n(n\in\mathbf{N}^*)$，其中 $a_n=-2-4n-\frac{1}{2^{n-1}}$，$x_n$ 由以下方法得到：$x_1=1$，点 $P_2(x_2，2)$在抛物线 C_1：$y=x^2+a_1x+b_1$ 上，点 $A_1(x_1，0)$到 P_2 的距离是 A_1 到 C_1 上点的最短距离，…，点 $P_{n+1}(x_{n+1},2^n)$ 在抛物线 C_n：$y=x^2+a_n x+b_n$ 上，点 $A_n(x_n，0)$到 P_{n+1} 的距离是 A_n 到 C_n 上点的最短距离.

（1）求 x_2 及 C_1 的方程；（2）证明$\{x_n\}$是等差数列.

第 1 练　数形结合思想

【第 1 练】 1～5　DBBBA；　　6.　6 或 7；　　7.　$(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=1$；　　8.　$\sqrt{2}$，$\sqrt{10}$.

9. 解：如右图，过点 P 作 OA、OB 的平行线，分别交直线 OA、OB 于 A'、B'，则 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}$，且 $\overrightarrow{OA'}=x\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=y\overrightarrow{OB}$. 由图可知，点 P 在阴影区域内运动时，x 的取值范围是 $(-\infty,0)$. 当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，　结合图形易得 y 的取值范围是 $(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2})$.

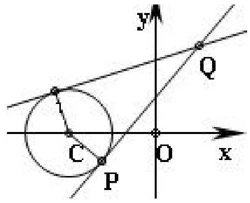


10. 解：设 $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $Q(3,2)$，则点 P 在单位圆 $x^2+y^2=1$ 上运动.

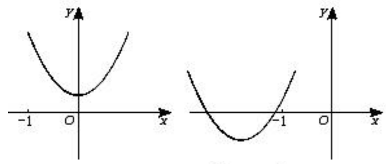
$\dfrac{\sin\alpha-2}{-3+\cos\alpha}$ 的几何意义为：直线 PQ 的斜率.

设 $k=\dfrac{\sin\alpha-2}{-3+\cos\alpha}=\dfrac{y-2}{x-3}$，变形为直线 $PQ: kx-y-3k+2=0$.

$\therefore$ $\dfrac{|2-3k|}{\sqrt{k^2+1}}\le 1$，解得 $\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}\le k\le\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$，即 $\dfrac{\sin\alpha-2}{-3+\cos\alpha}$ 的最大值为 $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$，最小值为 $\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$.



11. 解法一：由 $f(x)>a$，在 $[-1,+\infty)$ 上恒成立 $\Leftrightarrow x^2-2ax+2-a>0$ 在 $[-1,+\infty)$ 上恒成立. 考查函数 $g(x)=x^2-2ax+2-a$ 的图象在 $[-1,+\infty)$ 时位于 x 轴上方. 如图两种情况：



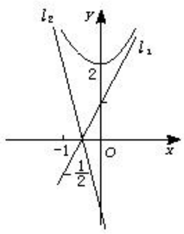
不等式的成立条件是：(1) $\Delta=4a^2-4(2-a)<0\Rightarrow a\in(-2，1)$.

(2) $\begin{cases}\Delta\ge 0\\ a<-1\\ g(-1)>0\end{cases}\Rightarrow a\in(-3，-2]$，综上所述 $a\in(-3，1)$.

解法二：由 $f(x)>a\Leftrightarrow x^2+2>a(2x+1)$，

令 $y_1=x^2+2$，$y_2=a(2x+1)$，在同一坐标系中作出两个函数的图象.

如图满足条件的直线 l 位于 l_1 与 l_2 之间，而直线 l_1、l_2 对应的 a 值（即直线的斜率）分别为 1，-3，故直线 l 对应的 $a\in(-3，1)$.

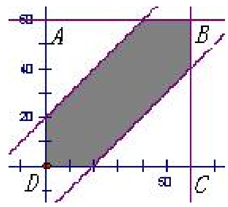


12. 解：设两人到达的时间分别为 7 点到 8 点之间的 x 分钟、y 分钟.

用 (x,y) 表示每次试验的结果，则所有可能结果为 $\Omega=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 60,0\le y\le 60\}$；

记两人能够会面为事件 A，则事件 A 的可能结果为　$A=\{(x,y)\,\|\,y-x|\le 20,0\le x\le 60,0\le y\le 60\}$.

如图所示，试验全部结果构成区域 Ω 为正方形 $ABCD$. 而事件 A 所构成区域是正方形内两条直线 $y-x=20$，$x-y=20$ 所夹中间的阴影部分.



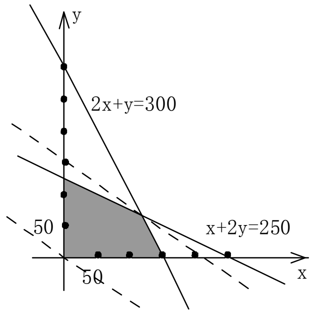
根据几何概型公式，得到 $P(A)=\dfrac{S_{阴影}}{S_{正方形}}=\dfrac{60^2-\dfrac{(60-20)^2}{2}\times 2}{60^2}=\dfrac{5}{9}$.

所以，两人能够会面的概率为 $\dfrac{5}{9}$.

13. 解：将已知数据列成下表：

消耗量　产品 资源	甲种棉纱（1 吨）	乙种棉纱（1 吨）	资源限额（吨）
一级子棉（吨）	2	1	300
二级子棉（吨）	1	2	250
利　润（元）	600	900	

设生产甲、乙两种棉纱分别为 x 吨、y 吨，利润总额为 z 元，则目标函数 $z=600x+900y$.线性约束条件为 $\begin{cases}2x+y\le 300\\ x+2y\le 250\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$.



作出可行域，如右图阴影部分（含边界）.

把 $z=600x+900y$ 变形为平行直线系 $l: y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{z}{900}$.由图可知，当 l 经过可行域上的点 M 时，截距 $\dfrac{z}{900}$ 最大.

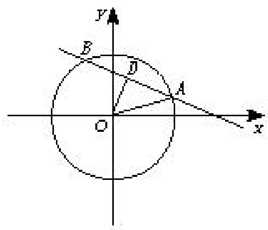
解方程组$\begin{cases}2x+y=300\\x+2y=250\end{cases}$，得 M 的坐标为$(\dfrac{350}{3},\dfrac{200}{3})$.

当 l 过点 $M(\dfrac{350}{3},\dfrac{200}{3})$ 时，$z_{\max}=600\times\dfrac{350}{3}+900\times\dfrac{200}{3}=130000$.

所以，应生产甲种棉纱$\dfrac{350}{3}$吨，乙种棉纱$\dfrac{200}{3}$吨，能使利润总额达最大值 130000 元.

14. 证明：在平面直角坐标系中，点 A（cosα，sinα）与点 B（cosβ，sinβ）是直线 l:$ax+by=c$ 与单位圆 $x^2+y^2=1$ 的两个交点如图.

从而：$|AB|^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=2-2\cos(\alpha-\beta)$

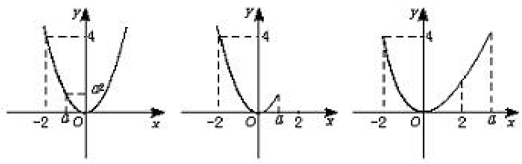


又∵单位圆的圆心到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，由平面几何知识知$|OA|^2-(\dfrac{1}{2}|AB|)^2=d^2$，即$1-\dfrac{2-2\cos(\alpha-\beta)}{4}=d^2=\dfrac{c^2}{a^2+b}$.

$\therefore \cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{c^2}{a^2+b^2}$.

15. 解：∵$y=2x+3$ 在$[-2,\ a]$上是增函数，

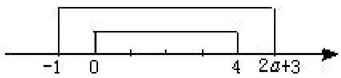
∴$-1\leqslant y\leqslant 2a+3$，即 $B=\{y\,|\,-1\leqslant y\leqslant 2a+3\}$.



作出 $z=x^2$ 的图象，该函数定义域右端点 $x=a$ 有三种不同的位置情况如下：

①当$-2\leqslant a\leqslant 0$ 时，$a^2\leqslant z\leqslant 4$，即 $C=\{z\,|\,z^2\leqslant z\leqslant 4\}$.

要使 $C\subseteq B$，须 $2a+3\geqslant 4$，得 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$，与$-2\leqslant a<0$ 矛盾.



②当 $0\leqslant a\leqslant 2$ 时，$0\leqslant z\leqslant 4$，即 $C=\{z\,|\,0\leqslant z\leqslant 4\}$，要使 $C\subseteq B$，由图可知：

必须且只需$\begin{cases}2a+3\geq 4\\0\leq a\leq 2\end{cases}$，解得$\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant 2$.

③当 $a>2$ 时，$0\leqslant z\leqslant a^2$，即 $C=\{z\,|\,0\leqslant z\leqslant a^2\}$，要使 $C\subseteq B$ 必须且只需$\begin{cases}a^2\leq 2a+3\\a>2\end{cases}$，解得 $2<a\leqslant 3$.

④当 $a<-2$ 时，$A=\varnothing$ 此时 $B=C=\varnothing$，则 $C\subseteq B$ 成立.

综上所述，a 的取值范围是$(-\infty,\ -2)\cup[\dfrac{1}{2},\ 3]$.

第 2 练　分类讨论思想

【第 2 练】 1～5 CCBCB； 6. 1 或 2； 7. 1 ，2； 8. 2 或 3.

9. 解：第一次从甲罐中取出的球有三种情况.

当从甲罐中取出的是黑球时，最后从乙罐中取出白球的概率为$\dfrac{5}{10}\times\dfrac{4}{10}$；

当从甲罐中取出的是白球时，最后从乙罐中取出白球的概率为$\dfrac{2}{10}\times\dfrac{5}{10}$；

当从甲罐中取出的是绿球时，最后从乙罐中取出白球的概率为$\dfrac{3}{10}\times\dfrac{4}{10}$.

所以，最后从乙罐中取出白球的概率是$\dfrac{5}{10}\times\dfrac{4}{10}+\dfrac{2}{10}\times\dfrac{5}{10}+\dfrac{3}{10}\times\dfrac{4}{10}=\dfrac{21}{50}$.

10. 解：原不等式可分解因式为$(x-a)(x-a^2)<0$.

（1）当 $a>a^2$ 即 $0<a<1$ 时，不等式的解为 $x\in(a^2,a)$.

（2）当 $a<a^2$ 即 $a<0$ 或 $a>1$ 时，不等式的解为 $x\in(a,a^2)$.

（3）当 $a=a^2$ 即 $a=0$ 或 $a=1$ 时，不等式的解为 $x\in\phi$.

综上，当 $0<a<1$ 时，$x\in(a^2,a)$；当 $a<0$ 或 $a>1$ 时，$x\in(a,a^2)$；当 $a=0$ 或 $a=1$ 时，$x\in\phi$.

11．解：当$m-3=0$即$m=3$，方程化为$y^2=\frac{1}{2}$，表示与x轴平行的两条直线.

当$5-m=0$即$m=5$，方程化为$x^2=\frac{1}{2}$，表示与y轴平行的两条直线.

当$m-3=5-m$即$m=4$，方程化为$x^2+y^2=1$，表示圆心在原点，半径为1的圆.

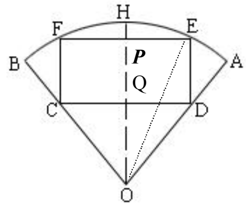
当$m\neq 3,4,5$时，方程化为$\frac{x^2}{\frac{1}{m-3}}+\frac{y^2}{\frac{1}{5-m}}=1$.

可知$3<m<4$时，方程表示中心在原点，焦点在x轴上的椭圆；$4<m<5$时，方程表示中心在原点，焦点在y轴上的椭圆.

$m<3$时，方程表示中心在原点，焦点在y轴上的双曲线；$m>5$时，方程表示中心在原点，焦点在x轴上的双曲线.

12．解：扇形的内接矩形有两种情况，见右图.

（1）如图，内接矩形$CDEF$的一边EF在弧$\overset{\frown}{AB}$上，作$OH\perp EF$.



设$\angle HOE=\theta$，则$CD=EF=2\times(1\times\sin\theta)=2\sin\theta$，$OP=OE\bullet\cos\theta=\cos\theta$，

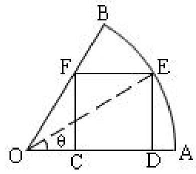
$OQ=\frac{DQ}{\tan 30^\circ}=\frac{\sin\theta}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}\sin\theta$，$DE=OP-OQ=\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$.

$S_{矩形CDEF}=CD\bullet DE=2\sin\theta\bullet(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)=2\sin\theta\cos\theta-2\sqrt{3}\sin^2\theta$

$=\sin 2\theta-\sqrt{3}(1-\cos 2\theta)=\sin 2\theta+\sqrt{3}\cos 2\theta-\sqrt{3}=2\sin(2\theta+60^\circ)-\sqrt{3}$.

当$\theta=15^\circ$时，矩形$CDEF$的面积最大，为$S_1=2-\sqrt{3}$.

（2）如图，内接矩形$CDEF$的一边CD在半径OA上.设$OC=x$，因为$OC<OB\bullet\cos 60^\circ$，



所以$x\in(0,\frac{1}{2})$.$CF=OC\bullet\tan 60^\circ=\sqrt{3}x$，　$DE=CF=\sqrt{3}x$，

$OD=\sqrt{OE^2-DE^2}=\sqrt{1-3x^2}$，$CD=OD-OC=\sqrt{1-3x^2}-x$.

∴ $S_{矩形CDEF}=CD\bullet DE=(\sqrt{1-3x^2}-x)\bullet(\sqrt{3}x)=\sqrt{3}\bullet(\sqrt{x^2-3x^4}-x^2)$.

导数$S'=\sqrt{3}\bullet(\frac{2x-12x^3}{2\sqrt{x^2-3x^4}}-2x)=\sqrt{3}x\bullet(\frac{1-6x^2}{\sqrt{x^2-3x^4}}-2)$，令$S'=0$得$x=\frac{\sqrt{3}}{6}$.　($x=0,-\frac{\sqrt{3}}{6},\pm\frac{1}{2}$都舍去)

当$x=\frac{\sqrt{3}}{6}$时，S_{CDEF}最大值为：$S_2=\sqrt{3}\bullet(\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{6})^2-3(\frac{\sqrt{3}}{6})^4}-(\frac{\sqrt{3}}{6})^2)=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

∵　$S_1-S_2=(2-\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{6}=2-\frac{7\sqrt{3}}{6}=\frac{12-7\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{144}-\sqrt{147}}{6}<0$

∴ 所求扇形的最大内接长方形的面积为$\frac{\sqrt{3}}{6}cm^2$.

13．解：$f(x)$的导数：$f'(x)=(x^2)'e^{ax}+x^2(e^{ax})'=2xe^{ax}+x^2(e^{ax}a)=x(2+ax)e^{ax}$.

当$a=0$时，$f'(x)=2xe^{ax}$，由$f'(x)>0$解得$x>0$，由$f'(x)<0$解得$x<0$，则$f(x)$在$(0,+\infty)$递增，$(-\infty,0)$递减.

当$a>0$时，$f'(x)=x(2+ax)e^{ax}$，由$f'(x)>0$解得$x>0$或$x<-\frac{2}{a}$，由$f'(x)<0$解得$-\frac{2}{a}<x<0$，则$f(x)$在$(0,+\infty)$递增，$(-\infty,-\frac{2}{a})$递增，$(-\frac{2}{a},0)$递减.

当$a<0$时，$f'(x)=x(2+ax)e^{ax}$，由$f'(x)>0$解得$0<x<-\frac{2}{a}$，由$f'(x)<0$解得$x<0$或$x>-\frac{2}{a}$，则$f(x)$在$(0,-\frac{2}{a})$递增，$(-\infty,0)$递减，$(-\frac{2}{a},+\infty)$递减.

14．解：（1）由题$\xi=0,1,2,3$.　$P(\xi=0)=\frac{C_5^2C_4^2C_3^2}{C_5^2C_5^2C_5^2}=\frac{C_4^2C_3^2}{C_5^2C_5^2}=\frac{18}{100}=\frac{9}{50}$，

$P(\xi=1)=\dfrac{C_5^2C_4^1C_3^2+C_5^2C_4^2C_2^1C_3^1}{C_5^2C_5^2C_5^2}=\dfrac{C_4^1C_3^2+C_4^2C_2^1C_3^1}{C_5^2C_5^2}=\dfrac{48}{100}=\dfrac{24}{50}$,

$P(\xi=2)=\dfrac{C_5^2C_4^1C_2^1C_3^1+C_5^2C_4^2C_3^2}{C_5^2C_5^2C_5^2}=\dfrac{C_4^1C_2^1C_3^1+C_4^2C_3^2}{C_5^2C_5^2}=\dfrac{30}{100}=\dfrac{15}{50}$,

$P(\xi=3)=\dfrac{C_5^2C_4^1C_3^2}{C_5^2C_5^2C_5^2}=\dfrac{4}{100}=\dfrac{2}{50}$.

∴ ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
p_i	$\dfrac{9}{50}$	$\dfrac{24}{50}=\dfrac{12}{25}$	$\dfrac{15}{50}=\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{2}{50}=\dfrac{1}{25}$

$E\xi=0\times\dfrac{9}{50}+1\times\dfrac{24}{50}+2\times\dfrac{15}{50}+3\times\dfrac{2}{50}=\dfrac{60}{50}=\dfrac{6}{5}$.

（2）用户就拒绝购买这批产品即 $P(\xi\ge2)=P(\xi=2)+P(\xi=3)=\dfrac{15}{50}+\dfrac{2}{50}=\dfrac{17}{50}$.

15. 解：（1）$t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$. 要使有 t 意义，必须 $1+x\geqslant0$ 且 $1-x\geqslant0$，即 $-1\leqslant x\leqslant1$,

∴ $t^2=2+2\sqrt{1-x^2}\in[2,4], t\geqslant0$ ①

t 的取值范围是 $[\sqrt2,2]$. 由①得 $\sqrt{1-x^2}=\dfrac12t^2-1$

∴ $m(t)=a(\dfrac12t^2-1)+t=\dfrac12at^2+t-a, t\in[\sqrt2,2]$

（2）由题意知 $g(a)$ 即为函数 $m(t)=\dfrac12at^2+t-a, t\in[\sqrt2,2]$ 的最大值.

注意到直线 $t=-\dfrac1a$ 是抛物线 $m(t)=\dfrac12at^2+t-a$ 的对称轴，分以下几种情况讨论.

(i)当 $a>0$ 时，函数 $y=m(t)$, $t\in[\sqrt2,2]$ 的图象是开口向上的抛物线的一段，

由 $t=-\dfrac1a<0$ 知 $m(t)$ 在 $[\sqrt2,2]$.上单调递增，∴ $g(a)=m(2)=a+2$

(ii)当 $a=0$ 时，$m(t)=t$, $t\in[\sqrt2,2]$, ∴ $g(a)=2$.

(iii)当 $a<0$ 时,函数 $y=m(t)$, $t\in[\sqrt2,2]$ 的图象是开口向下的抛物线的一段，

若 $t=-\dfrac1a\in[0,\sqrt2]$，即 $a\le-\dfrac{\sqrt2}{2}$，则 $g(a)=m(\sqrt2)=\sqrt2$；

若 $t=-\dfrac1a\in(\sqrt2,2]$，即 $-\dfrac{\sqrt2}{2}<a\le-\dfrac12$；则 $g(a)=m(-\dfrac1a)=-a-\dfrac{1}{2a}$；

若 $t=-\dfrac1a\in(2,+\infty)$，即 $-\dfrac12<a<0$；则 $g(a)=m(2)=a+2$.

综上有 $g(a)=\begin{cases}a+2, & a>-\dfrac12\\ -a-\dfrac{1}{2a}, & -\dfrac{\sqrt2}{2}<a<-\dfrac12\\ \sqrt2, & a\le-\dfrac{\sqrt2}{2}\end{cases}$.

（3）情形 1：当 $a<-2$ 时 $\dfrac1a>-\dfrac12$，此时 $g(a)=\sqrt2$，$g(\dfrac1a)=\dfrac1a+2$，由 $2+\dfrac1a=\sqrt2$ 解得 $a=-1-\dfrac{\sqrt2}{2}$，与 $a<-2$ 矛盾.

情形 2：当 $-2\le a<-\sqrt2$ $-\dfrac{\sqrt2}{2}<\dfrac1a\le-\dfrac12$ 时，此时 $g(a)=\sqrt2$，$g(\dfrac1a)=-\dfrac1a-\dfrac a2$，$\sqrt2=-\dfrac1a-\dfrac a2$ 解得 $a=-\sqrt2$，与 $a<-\sqrt2$ 矛盾.

情形 3：当 $-\sqrt{2}\le a\le -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\sqrt{2}\le \frac{1}{a}\le -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，此时 $g(a)=\sqrt{2}=g(\frac{1}{a})$，所以 $-\sqrt{2}\le a\le -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

情形 4：当 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a\le -\frac{1}{2}$ 时，$-2\le \frac{1}{a}<-\sqrt{2}$，此时 $g(a)=-a-\frac{1}{2a}$，

$g(\frac{1}{a})=\sqrt{2}\ \ -a-\frac{1}{2a}=\sqrt{2}$,解得$a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,与$a>-\frac{\sqrt{2}}{2}$矛盾.

情形 5：当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，$\frac{1}{a}<-2$，此时 $g(a)=a+2$, $g(\frac{1}{a})=\sqrt{2}$，由 $a+2=\sqrt{2}$，解得 $a=\sqrt{2}-2$,与$a>-\frac{1}{2}$矛盾.

情形 6：当 a>0 时，$\frac{1}{a}>0$，此时 $g(a)=a+2$, $g(\frac{1}{a})=\frac{1}{a}+2$，由 $a+2=\frac{1}{a}+2$解得$a=\pm 1$，由 $a>0$ 得 $a=1$.

综上知，满足 $g(a)=g(\frac{1}{a})$ 的所有实数 a 为 $-\sqrt{2}\le a\le -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 或 $a=1$.

第 3 练　函数与方程思想

【第 3 练】 1～5　ADDBD；　6. $24cm^3$；　7. $f(3)=10$，$f(n)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$；　8. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

9. 解：直线 AB 斜率为 $k=\frac{a-0}{0-a}=-1$，直线 AB 方程为 $y=-x+a$，联立方程组，有 $\begin{cases} y=-x+a \\ y=x^2-2x-3 \end{cases}$，消 y 得 $x^2-x-(3+a)=0$，判别式 $\Delta=(-1)^2+4(3+a)<0$，解得 $a<-\frac{13}{4}$.

10. 解：由题中已知，得到方程组 $\begin{cases} a+b+c=15 & (1) \\ a+c=2b & (2) \\ (a+1)(c+4)=(b+1)^2 & (3) \end{cases}$，由(1)(2)两式，解得 b=5.

将 $c=10-a$ 代入(3)，整理得 $a^2-13a+22=0$，解得 $a=2$ 或 $a=11$.

所以，$a=2$，$b=5$，$c=11$ 或 $a=11$，$b=5$，$c=-1$. 经验算，上述两组数符合题意.

11. 解：设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由 $S_4=1, S_8=17$知$q\ne 1$，所以得

$\frac{a_1(q^4-1)}{q-1}=1\cdots\cdots$①；　$\frac{a_1(q^8-1)}{q-1}=17\cdots\cdots$②.

由①、②式，整理得 $\frac{q^8-1}{q^4-1}=17$，解得 $q^4=16$，所以 $q=-2$ 或 $q=2$.

将 $q=2$ 代入①式，得 $a_1=\frac{1}{15}$，所以 $a_n=\frac{2^{n-1}}{15}$.

将 $q=-2$ 代入①式，得 $a_1=-\frac{1}{5}$，所以 $a_n=\frac{(-1)^n\times 2^{n-1}}{5}$.

12. 解：（1）$\because f(x)=t(x+t)^2-t^3+t-1(x\in\mathbf{R}，t>0)$，

∴　当 $x=-t$ 时，$f(x)$ 取最小值 $f(-t)=-t^3+t-1$，

∴　即 $h(t)=-t^3+t-1$.

（2）令 $g(t)=h(t)-(-2t+m)=-t^3+3t-1-m$，

由 $g'(t)=-3t^2+3=0$ 得 $t=1$，$t=-1$（不合题意，舍去）.

当 t 变化时 $g'(t)$，$g(t)$ 的变化情况如下表：

t	$(0,1)$	1	$(1,2)$
$g'(t)$	+	0	−
$g(t)$	递增	极大值$1-m$	递减

$\therefore g(t)$ 在 $(0,2)$ 内有最大值 $g(1)=1-m$.

$h(t)<-2t+m$ 在 $(0,2)$ 内恒成立等价于 $g(t)<0$ 在 $(0,2)$ 内恒成立，

即等价于 $1-m<0$，所以 m 的取值范围为 $m>1$.

13. 解：(1) ∵ $EF\perp AB$，∴ $EF\perp PE$.

又 ∵ $PE\perp AE$，$EF\bigcap AE=E$，且 PE 在平面 $ACFE$ 外，∴ $PE\perp$ 平面 $ACFE$.

∵ $EF\perp AB$，$CD\perp AB$，∴ $EF//CD$，∴ $\dfrac{EF}{CD}=\dfrac{x}{BD}$，得 $EF=\dfrac{CD}{BD}x=\dfrac{x}{\sqrt{6}}$，

所以四边形 $ACFE$ 的面积为

$$S_{ACFE}=S_{\Delta ABC}-S_{\Delta BEF}=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{6}\times 3-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{6}}x^2=9\sqrt{6}-\frac{1}{2\sqrt{6}}x^2,$$

∴ 四棱锥 $P-ACFE$ 的体积为 $V_{P-ACFE}=\dfrac{1}{3}S_{ACFE}\bullet PE=3\sqrt{6}x-\dfrac{1}{6\sqrt{6}}x^3$，

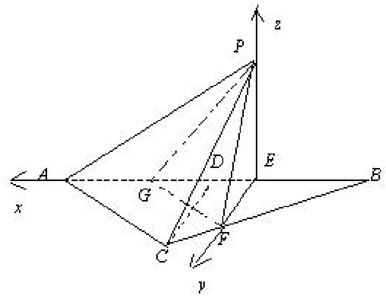
即 $V(x)=3\sqrt{6}x-\dfrac{1}{6\sqrt{6}}x^3\quad(0<x<3\sqrt{6})$.

(2) 由 (1) 知，$V'(x)=3\sqrt{6}-\dfrac{1}{2\sqrt{6}}x^2$. 令 $V'(x)=0$，解得 $x=6$.

当 $0<x<6$ 时，$V'(x)>0$；当 $6<x<3\sqrt{6}$ 时，$V'(x)<0$.

∴ 当 $BE=x=6$ 时，$V(x)$ 有最大值，最大值为 $V(6)=12\sqrt{6}$.

(3) 法一：如图，以点 E 为坐标原点，向量 $\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EP}$ 分别为 x，y，z 轴的正向，建立空间直角坐标系.



则 $E(0,0,0)$，$P(0,0,6)$，$F(0,\sqrt{6},0)$，$A(6\sqrt{6}-6,0,0)$，$C(3\sqrt{6}-6,3,0)$.

于是，$\overrightarrow{AC}=(-3\sqrt{6},3,0)$，$\overrightarrow{PF}=(0,\sqrt{6},-6)$.

AC 与 PF 所成角 θ 的余弦为

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{PF}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{PF}|}=\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{54+9+0}\times\sqrt{0+6+36}}=\frac{1}{7},$$

∴ 异面直线 AC 与 PF 所成角的余弦值为 $\dfrac{1}{7}$.

法二：过点 F 作 $FG//AC$ 交 AE 于点 G，连接 PG，则 $\angle PFG$ 为异面直线 AC 与 PF 所成角.

∵ ΔABC 是等腰三角形，∴ ΔGBF 也是等腰三角形.

于是，$FG=BF=PF=\sqrt{BE^2+EF^2}=\sqrt{42}$，从而 $PC=\sqrt{PE^2+GE^2}=\sqrt{BE^2+BE^2}=6\sqrt{2}$.

在 ΔGPF 中，根据余弦定理得 $\cos\angle PFG=\dfrac{PF^2+FG^2-PG^2}{2PF\bullet FG}=\dfrac{1}{7}$，

故异面直线 AC 与 PF 所成角的余弦值为 $\dfrac{1}{7}$.

14. 解：(1) 记甲、乙、丙三台机床各自独立加工的零件为一等品的事件为 A、B、C. 概率分别为 P_1,P_2,P_3.

由已知可以得到：$\begin{cases}P(A\bullet\overline{B})=P(A)\bullet(1-P(B))=p_1(1-p_2)=\dfrac{1}{4}\\ P(B\bullet\overline{C})=P(B)\bullet(1-P(C))=p_2(1-p_3)=\dfrac{1}{12}\\ P(A\bullet C)=P(A)\bullet P(C)=p_1p_3=\dfrac{2}{9}\end{cases}$，解得 $p_1=\dfrac{1}{3},p_2=\dfrac{1}{4},p_3=\dfrac{2}{3}$.

(2) $P=1-P(\overline{A})\bullet P(\overline{B})\bullet P(\overline{C})=1-(1-\dfrac{1}{3})\times(1-\dfrac{1}{4})\times(1-\dfrac{2}{3})=\dfrac{5}{6}$.

15. 解：(1) 由已知得 $\sqrt{2^b}=4$，∴$b=4$.

(2) ∵ $c\in[1，4]$，∴ $\sqrt{c}\in[1，2]$，于是，当 $x=\sqrt{c}$ 时，函数 $f(x)=x+\dfrac{c}{x}$ 取得最小值 $2\sqrt{c}$.

$f(1)-f(2)=\dfrac{c-2}{2}$，

当 $1\leqslant c\leqslant 2$ 时，函数 $f(x)$ 的最大值是 $f(2)=2+\dfrac{c}{2}$；当 $2\leqslant c\leqslant 4$ 时，函数 $f(x)$ 的最大值是 $f(1)=1+c$.

(3) 设 $0<x_1<x_2$，$g(x_2)-g(x_1)=x_2^n+\dfrac{c}{x_2^n}-x_1^n-\dfrac{c}{x_1^n}=(x_2^n-x_1^n)(1-\dfrac{c}{x_1^nx_2^n})$.

当 $\sqrt[2n]{c}<x_1<x_2$ 时，　$g(x_2)>g(x_1)$，　函数 $g(x)$在[$\sqrt[2n]{c}$，$+\infty$)上是增函数；

当 $0<x_1<x_2<\sqrt[2n]{c}$ 时，　$g(x_2)>g(x_1)$，　函数 $g(x)$在(0，　$\sqrt[2n]{c}$]上是减函数.

当 n 是奇数时，$g(x)$是奇函数，函数 $g(x)$ 在($-\infty$，$-\sqrt[2n]{a}$)上是增函数，在[$-\sqrt[2n]{a}$，0]上是减函数.

当 n 是偶数时，　$g(x)$是偶函数，函数 $g(x)$在($-\infty$，$-\sqrt[2n]{a}$)上是减函数，在[$-\sqrt[2n]{a}$，0]上是增函数.

第 4 练　转化与化归思想

【第 4 练】 1～5　BDBBA；　6. π；　7. $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$　；　8. $m\le\dfrac{4}{3}$ 或 $m\ge\dfrac{5}{2}$.

9. 解：9 个灯中关闭 3 个等价于在 6 个开启的路灯中，选 3 个间隔（不包括两端外边的装置）插入关闭的过程　故有 C_5^3=10 种.

10. 解：$y=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)+2\sqrt{3}\sin x\cos x=-\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x$

$=2(-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x)=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$.

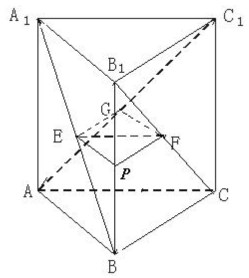
∴ 最小正周期 $T=\pi$，　最小值为－2.

∵ $0\le x\le\pi$，　∴ $-\dfrac{\pi}{6}\le 2x-\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{11\pi}{6}$.

当 $-\dfrac{\pi}{6}\le 2x-\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{\pi}{2}$，或 $\dfrac{3\pi}{2}\le 2x-\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{11\pi}{6}$ 时，正弦函数单调递增.

∴ $0\le x\le\dfrac{\pi}{3}$，或 $\dfrac{5\pi}{6}\le x\le\pi$.　即函数在 $[0,\pi]$ 的单调递增区间为 $[0,\dfrac{\pi}{3}]$、$[\dfrac{5\pi}{6},\pi]$.

11. 证明：作 $EP\perp BB_1$ 于 P，连接 PF.



在正三棱柱 $ABC—A_1B_1C_1$ 的侧面 ABB_1A_1 中，易知 $A_1B_1\perp BB_1$，又 $EP\perp BB_1$，所以 $EP//A_1B_1//AB$. ∴ $\dfrac{BE}{BA}=\dfrac{BP}{BB_1}$，$EP//$平面 ABC.

又∵ $BE=CF$，$BA_1=CB_1$，　∴ $\dfrac{CF}{CB_1}=\dfrac{BP}{BB_1}$，

∴ $PF//BC$，则 $PF//$平面 ABC.

∵ $EP\cap PF=P$，∴ 平面 PEF//平面 ABC.

∵ $EF\subset$平面 PEF，　∴ EF//平面 ABC.

同理，GF//平面 ABC.

∵ $EF\cap GF=F$，∴ 平面 EFG//平面 ABC.

12. 解：所证问题可转化为点（a，b）与（$-x$，$-y$）间的距离，已知点（a，b）在 l_1：$x+2y+4=0$ 上，点（$-x$，$-y$）在 l_2：$x+2y-1=0$ 上，且 $l_1//l_2$，因平行直线上任意两点间的距离不小于这两平行线的距离，$d=\dfrac{|c_1-c_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sqrt{5}$，　∴　$(a+x)^2+(b+y)^2\ge 5$.

13. 解：(1) ∵$f(x)$的定义域 $D=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，

∴ 数列$\{x_n\}$只有三项，$x_1=\dfrac{11}{19},x_2=\dfrac{1}{5},x_3=-1$.

(2) ∵ $f(x)=\dfrac{4x-2}{x+1}=x$，即 $x^2-3x+2=0$，∴$x=1$ 或 $x=2$，即 $x_0=1$ 或 2 时，$x_{n+1}=\dfrac{4x_n-2}{x_n+1}=x_n$.

故当 $x_0=1$ 时，$x_n=1$，当 $x_0=2$ 时，$x_n=2$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

14. 解：函数 $y=c^x$ 在 R 上单调递减 $\Leftrightarrow 0<c<1$.

不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $R\Leftrightarrow$ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 R 上恒大于 1.

∵　$x+|x-2c|=\begin{cases}2x-2c, & x\ge 2c\\ 2c, & x<2c\end{cases}$，　∴ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 R 上的最小值为 $2c$，

即不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $R\Leftrightarrow c>\dfrac{1}{2}$.

如果 P 正确，且 Q 不正确，则 $0<c\le\frac{1}{2}$；如果 Q 正确，且 P 不正确，则 $c\ge 1$.

所以 c 的取值范围为 $(0,\frac{1}{2}]\cup[1,+\infty)$.

15. 解：（1）将 $y=\frac{1}{x}$ 代入椭圆方程，得 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{1}{b^2x^2}=1$，化简得 $b^2x^4-a^2b^2x^2+a^2=0$.

由条件，有 $\Delta=a^4b^4-4a^2b^2=0$，得 $ab=2$，解得 $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 或 $x=-\frac{a}{\sqrt{2}}$（舍去）. 故 P 的坐标为 $(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{2}}{a})$.

（2）∵在△ABP 中，$|AB|=2\sqrt{a^2-b^2}$，高为 $\frac{\sqrt{2}}{a}$，　∴ $S(a)=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a^2-b^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2(1-\frac{4}{a^4})}$.

∵ $a>b>0$，$b=\frac{2}{a}$，∴ $a>\frac{2}{a}$，即 $a>\sqrt{2}$，得 $0<\frac{4}{a^4}<1$.

于是 $0<S(a)<\sqrt{2}$，故△ABP 的面积函数 $S(a)$ 的值域为 $(0,\sqrt{2})$.

（3）$g(a)=c^2=a^2-b^2=a^2-\frac{4}{a^2}$，解不等式 $g(a)\geqslant S(a)$，即 $a^2-\frac{4}{a^2}\geqslant\sqrt{2(1-\frac{4}{a^4})}$，

整理得 $a^8-10a^4+24\geqslant 0$，即 $(a^4-4)(a^4-6)\geqslant 0$，解得 $a\leqslant\sqrt{2}$（舍去）或 $a\geqslant\sqrt[4]{6}$.

故 $f(a)=\min\{g(a),\ S(a)\}=\begin{cases}a^2-\frac{4}{a^2}(\sqrt{2}<a\le\sqrt[4]{6}\\ \sqrt{2(1-\frac{4}{a^4})}(a<\sqrt[4]{6})\end{cases}$.

第 5 练　其他数学思想方法

【第 5 练】 1～5　CBCDC；　6. 5；　7. $2^{n+1}-3$；　8. $b_1b_2\cdots b_n=b_1b_2\cdots b_nb_{n+1}\cdots b_{17-n}$.

9. 解：分析 x^5 的系数由 C_{10}^5 与 $(-1)C_{10}^2$ 两项组成，相加后得 x^5 的系数，答案为 207.

10. 解：（1）由 $2\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4})\ge 1$，得 $\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4})\ge\frac{1}{2}$.

结合正弦曲线（或单位圆中的正弦线），解得

$\frac{\pi}{6}+2k\pi\le\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\le\frac{5\pi}{6}+2k\pi\ (k\in Z)$，即 $-\frac{\pi}{6}+4k\pi\le x\le\frac{7\pi}{6}+4k\pi\ (k\in Z)$.

所以，不等式 $f(x)\ge 1$ 的解集为 $[-\frac{\pi}{6}+4k\pi,\frac{7\pi}{6}+4k\pi]\ (k\in Z)$.

（2）∵ 函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=\sqrt{3}$ 相交，　∴ $2\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{3}$，即 $\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

易得 $\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$　或　$\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$. ∴　$x=\frac{\pi}{6}+4k\pi$　或　$x=\frac{5\pi}{6}+4k\pi,k\in Z$.

所以，函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=\sqrt{3}$ 的所有交点坐标为 $(\frac{\pi}{6}+4k\pi,\sqrt{3})$ 或 $(\frac{5\pi}{6}+4k\pi,\sqrt{3}),k\in Z$.

11. 解：　设三个方程均无实根，则有：

$\begin{cases}\triangle_1=16a^2-4(-4a+3)<0\\ \triangle_2=(a-1)^2-4a^2<0\\ \triangle_2=4a^2-4(-2a)<0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}-\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2}\\ a<-1\text{或}a>\frac{1}{3}\\ -2<a<0\end{cases}$，即 $-\frac{3}{2}<a<-1$.

所以当 $a\geqslant -1$ 或 $a\leqslant -\frac{3}{2}$ 时，三个方程至少有一个方程有实根.

12. 解：方程 $x^2+kx+2=0$ 的两实根为 p、q，由韦达定理得：$p+q=-k$，$pq=2$，

$(\frac{p}{q})^2+(\frac{q}{p})^2=\frac{p^4+q^4}{(pq)^2}=\frac{(p^2+q^2)^2-2p^2q^2}{(pq)^2}=\frac{[(p+q)^2-2pq]^2-2p^2q^2}{(pq)^2}=\frac{(k^2-4)^2-8}{4}\leqslant 7$，

解得 $k\leqslant-\sqrt{10}$ 或 $k\geqslant\sqrt{10}$.

又 ∵p、q 为方程 $x^2+kx+2=0$ 的两实根， ∴ $\triangle=k^2-8\geqslant 0$ 即 $k\geqslant 2\sqrt{2}$ 或 $k\leqslant -2\sqrt{2}$

综合起来，k 的取值范围是：$-\sqrt{10}\leqslant k\leqslant -2\sqrt{2}$ 或者 $2\sqrt{2}\leqslant k\leqslant\sqrt{10}$.

13. 解：设 $\sin x+\cos x=t$，则 $t\in[-\sqrt{2}，\sqrt{2}]$，由 $(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cdot\cos x$ 得：$\sin x\cdot\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

∴ $f(x)=g(t)=-\frac{1}{2}(t-2a)^2+\frac{1}{2}$ （$a>0$），$t\in[-\sqrt{2}，\sqrt{2}]$

$t=-\sqrt{2}$ 时，取最小值：$-2a^2-2\sqrt{2}a-\frac{1}{2}$；

当 $2a\geqslant\sqrt{2}$ 时，$t=\sqrt{2}$，取最大值：$-2a^2+2\sqrt{2}a-\frac{1}{2}$；

当 $0<2a\leqslant\sqrt{2}$ 时，$t=2a$，取最大值：$\frac{1}{2}$.

∴ $f(x)$的最小值为 $-2a^2-2\sqrt{2}a-\frac{1}{2}$，最大值为 $\begin{cases}\frac{1}{2}(0<a<\frac{\sqrt{2}}{2})\\ -2a^2+2\sqrt{2}a-\frac{1}{2}(a\geq\frac{\sqrt{2}}{2})\end{cases}$.

14.解：假设存在 a、b、c 使得等式成立，令：$n=1$，得 $4=\frac{1}{6}(a+b+c)$；$n=2$，得 $22=\frac{1}{2}(4a+2b+c)$；$n=3$，得 $70=9a+3b+c$. 整理得：

$\begin{cases}a+b+c=24\\4a+2b+c=44\\9a+3b+C=70\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=3\\b=11\\c=10\end{cases}$，

于是对 $n=1$、2、3，等式 $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+n(n+1)^2=\frac{n(n+1)}{12}(3n^2+11n+10)$成立，下面用数学归纳法证明对任意自然数 n，该等式都成立：

假设对 $n=k$ 时等式成立，即 $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+k(k+1)^2=\frac{k(k+1)}{12}(3k^2+11k+10)$；

当 $n=k+1$ 时，$1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+k(k+1)^2+(k+1)(k+2)^2=\frac{k(k+1)}{12}(3k^2+11k+10)+(k+1)(k+2)^2$ $=\frac{k(k+1)}{12}(k+2)(3k+5)+(k+1)(k+2)^2=\frac{(k+1)(k+2)}{12}(3k^2+5k+12k+24)=\frac{(k+1)(k+2)}{12}[3(k+1)^2+11(k+1)+10]$，

也就是说，等式对 $n=k+1$ 也成立.

综上所述，当 $a=8$、$b=11$、$c=10$ 时，题设的等式对一切自然数 n 都成立.

15. 解：（1） $f(m,1)=3f(m-1,1)=3^2f(m-2,1)=\cdots=3^{m-1}f(1,1)=3^{m-1}$.

（2） $f(m,n)=f(m,n-1)+3=f(m,n-2)+3\times 2=\cdots=f(m,1)+3(n-1)=3^{m-1}+3(n-1)$.

（3） $f(n,n)=3^{n-1}+3(n-1)$ ，

∵ $f(7,7)=3^6+18=747<2005$ ， $f(8,8)=3^7+21=2208>2006$

∴ $f(n,n)$ 输出结果不可能为 2006.

第 6 练　导数与函数专题

【第 6 练】 1～5　DACAB；　6. $-x-x^4$；　7. 2；　8. $-1,3$；　9.

10. 解：（1）由图象可知，在（$-\infty$，1）上 $f'(x)>0$，在 $(1,2)$ 上 $f'(x)<0$，在 $(2,+\infty)$ 上 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$，$(2,+\infty)$ 上递增，在 $(1,2)$ 上递减，因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，所以 $x_0=1$.

(2) $f'(x)=3ax^2+2bx+c$, 由 $f'(1)=0, f'(2)=0, f(1)=5$,

得 $\begin{cases}3a+2b+c=0,\\12a+4b+c=0,\\a+b+c=5,\end{cases}$ 解得 $a=2, b=-9, c=12$.

11. 解：（1）求导得 $f'(x)=3x^2-6ax+3b$．由于 $f(x)$ 的图像与直线 $12x+y-1=0$ 相切于点 $(1,-11)$，所以 $f(1)=-11, f'(1)=-12$，即：$\begin{cases}1-3a+3b=-11\\3-6a+3b=-12\end{cases}$，解得 $a=1, b=-3$．

（2）由 $a=1, b=-3$ 得：$f'(x)=3x^2-6ax+3b=3(x^2-2x-3)=3(x+1)(x-3)$

令 $f'(x)>0$，解得 x<-1 或 x>3；又令 $f'(x)<0$，解得 -1<x<3.

故当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f(x)$是增函数；当 $x\in(3,+\infty)$ 时，$f(x)$是增函数；当 $x\in(-1,3)$ 时，$f(x)$是减函数.

12. 解：（1）依题意，对一切 $x\in R$ 有 $f(-x)=f(x)$，即 $\frac{e^{-x}}{a}+\frac{a}{e^{-x}}=\frac{1}{ae^x}+ae^x$，

$\therefore (a-\frac{1}{a})(e^x-\frac{1}{e^x})=0$ 对一切 $x\in R$ 成立，由此得到 $a-\frac{1}{a}=0$，$a^2=1$，又$\because a>0$，$\therefore a=1$.

（2）证明：由 $f(x)=e^x+e^{-x}$，得 $f'(x)=e^x-e^{-x}=e^{-x}(e^{2x}-1)$，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，有 $e^{-x}(e^{2x}-1)>0$，此时 $f'(x)>0$．$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

13. 解：（1）当 $x=40$ 时，汽车从甲地到乙地行驶了 $\frac{100}{40}=2.5$ 小时，

要耗油 $(\frac{1}{128000}\times 40^3-\frac{3}{80}\times 40+8)\times 2.5=17.5$（升）.

答：当汽车以 40 千米/小时的速度匀速行驶时，从甲地到乙地耗油 17.5 升.

（2）当速度为 x 千米/小时时，汽车从甲地到乙地行驶了 $\frac{100}{x}$ 小时，设耗油量为 $h(x)$ 升，

依题意得 $h(x)=(\frac{1}{128000}x^3-\frac{3}{80}x+8).\frac{100}{x}=\frac{1}{1280}x^2+\frac{800}{x}-\frac{15}{4}(0<x\le 120)$,

$h'(x)=\frac{x}{640}-\frac{800}{x^2}=\frac{x^3-80^3}{640x^2}(0<x\le 120)$.　令 $h'(x)=0$, 得 $x=80$.

当 $x\in(0,80)$ 时，$h'(x)<0, h(x)$ 是减函数；当 $x\in(80,120)$ 时，$h'(x)>0, h(x)$ 是增函数.（注：亦可定义法）

$\therefore$ 当 $x=80$ 时，$h(x)$ 取到极小值 $h(80)=11.25$. 因为 $h(x)$ 在 $(0,120]$ 上只有一个极值，所以它是最小值.

答：当汽车以 80 千米/小时的速度匀速行驶时，从甲地到乙地耗油最少，最少为 11.25 升.

14. 解：$f(x)$ 的定义域为 $(-\frac{3}{2},+\infty)$．

（1）$f'(x)=\frac{2}{2x+3}+2x=\frac{4x^2+6x+2}{2x+3}=\frac{2(2x+1)(x+1)}{2x+3}$．

当 $-\frac{3}{2}<x<-1$ 时，$f'(x)>0$；当 $-1<x<-\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>-\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$．

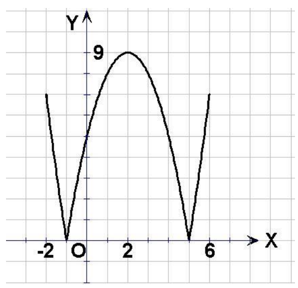
从而，$f(x)$ 分别在区间 $(-\frac{3}{2},-1)$，$(-\frac{1}{2},+\infty)$ 单调增加，在区间 $(-1,-\frac{1}{2})$ 单调减少.

（2）由（1）知 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{3}{4},\frac{1}{4}]$ 的最小值为 $f(-\frac{1}{2})=\ln 2+\frac{1}{4}$．

又 $f(-\frac{3}{4})-f(\frac{1}{4})=\ln\frac{3}{2}+\frac{9}{16}-\ln\frac{7}{2}-\frac{1}{16}=\ln\frac{3}{7}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(1-\ln\frac{49}{9})<0$．

所以 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{3}{4},\frac{1}{4}]$ 的最大值为 $f(\frac{1}{4})=\frac{1}{16}+\ln\frac{7}{2}$．

15. 解：（1）



（2）方程 $f(x)=5$ 的解分别是 $2-\sqrt{14},\ 0,\ 4$ 和 $2+\sqrt{14}$，由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ -1]$ 和 $[2,\ 5]$ 上单调递减，在 $[-1,2]$ 和 $[5,\ +\infty)$ 上单调递增，因此 $A=\left(-\infty,\ 2-\sqrt{14}\ \right]\cup[0,\ 4]\cup\left[\ 2+\sqrt{14},\ +\infty\right)$.

由于 $2+\sqrt{14}<6,\quad 2-\sqrt{14}>-2,\quad \therefore\quad B\subset A$.

（3）[解法一] 当 $x\in[-1,\ 5]$ 时，$f(x)=-x^2+4x+5$.

$$g(x)=k(x+3)-(-x^2+4x+5)=x^2+(k-4)x+(3k-5)=\left(x-\frac{4-k}{2}\right)^2-\frac{k^2-20k+36}{4},$$

$\because\ k>2,\ \therefore\ \dfrac{4-k}{2}<1$. 又 $-1\le x\le 5$，

① 当 $-1\le\dfrac{4-k}{2}<1$，即 $2<k\le 6$ 时，取 $x=\dfrac{4-k}{2}$，$g(x)_{\min}=-\dfrac{k^2-20k+36}{4}=-\dfrac{1}{4}\left[(k-10)^2-64\right]$.

$\because\ 16\le(k-10)^2<64,\ \therefore\ (k-10)^2-64<0$，则 $g(x)_{\min}>0$.

② 当 $\dfrac{4-k}{2}<-1$，即 $k>6$ 时，取 $x=-1$，$g(x)_{\min}=2k>0$.

由 ①、②可知，当 $k>2$ 时，$g(x)>0$，$x\in[-1,\ 5]$.

因此，在区间 $[-1,\ 5]$ 上，$y=k(x+3)$ 的图像位于函数 $f(x)$ 图像的上方.

[解法二] 当 $x\in[-1,\ 5]$ 时，$f(x)=-x^2+4x+5$.

由 $\begin{cases}y=k(x+3),\\ y=-x^2+4x+5,\end{cases}$ 得 $x^2+(k-4)x+(3k-5)=0$，

令 $\Delta=(k-4)^2-4(3k-5)=0$，解得 $k=2$ 或 $k=18$，

在区间 $[-1,\ 5]$ 上，当 $k=2$ 时，$y=2(x+3)$ 的图像与函数 $f(x)$ 的图像只交于一点 $(1,\ 8)$； 当 $k=18$ 时，$y=18(x+3)$ 的图像与函数 $f(x)$ 的图像没有交点.

如图可知，由于直线 $y=k(x+3)$ 过点 $(-3,\ 0)$，当 $k>2$ 时，直线 $y=k(x+3)$ 是由直线 $y=2(x+3)$ 绕点 $(-3,\ 0)$ 逆时针方向旋转得到. 因此，在区间 $[-1,\ 5]$ 上，$y=k(x+3)$ 的图像位于函数 $f(x)$ 图像的上方.

第 7 练　数列与不等式专题

【第 7 练】 1～5　BCACB；　6. 2600；　7. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$；　8. －2；　9. $\frac{1}{2}n(n+3)$，　$2n$.

10. 解：（1）由 a_1=1，$a_{n+1}=\frac{1}{3}S_n$，n=1，2，3，……，得

$a_2=\frac{1}{3}S_1=\frac{1}{3}a_1=\frac{1}{3}$，$a_3=\frac{1}{3}S_2=\frac{1}{3}(a_1+a_2)=\frac{4}{9}$，$a_4=\frac{1}{3}S_3=\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)=\frac{16}{27}$，

由 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{3}(S_n-S_{n-1})=\frac{1}{3}a_n$（n≥2），得 $a_{n+1}=\frac{4}{3}a_n$（n≥2），

又 a_2=$\frac{1}{3}$，所以 a_n=$\frac{1}{3}(\frac{4}{3})^{n-2}$ (n≥2),

∴ 数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\ \frac{1}{3}(\frac{4}{3})^{n-2} & (n\geqslant 2)\end{cases}$.

（2）由（1）可知 $a_2,a_4,\cdots,a_{2n}$ 是首项为 $\frac{1}{3}$，公比为 $(\frac{4}{3})^2$ 项数为 n 的等比数列，

$$\therefore\ a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-(\frac{4}{3})^{2n}}{1-(\frac{4}{3})^2}=\frac{3}{7}[(\frac{4}{3})^{2n}-1].$$

11. 解：（1）证明：∵ $\lg a_1$、$\lg a_2$、$\lg a_4$ 成等差数列，∴ $2\lg a_2=\lg a_1+\lg a_4$，即 $a_2{}^2=a_1a_4$.

又设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则$(a_1-d)^2=a_1(a_1-3d)$，这样 $d^2=a_1d$，从而 $d(d-a_1)$=0.

$\because d\neq 0$，$\therefore d=a_1\neq 0$， $\therefore a_{2^n}=a_1+(2^n-1)d=2^n d b_n=\dfrac{1}{a_{2^n}}=\dfrac{1}{d}\bullet\dfrac{1}{2^n}$.

$\therefore\{b_n\}$ 是首项为 $b_1=\dfrac{1}{2d}$，公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列.

（2）解. $\because b_1+b_2+b_3=\dfrac{1}{2d}(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4})=\dfrac{7}{24}$，$\therefore d=3$， $\therefore a_1=d=3$.

12. 解：（1） $\because a_n+S_n=4096$, $\therefore a_1+S_1=4096$, $a_1=2048$.

当 $n\geqslant 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=(4096-a_n)-(4096-a_{n-1})=a_{n-1}-a_n\dfrac{1}{2}$，

$\therefore\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{1}{2}$， $a_n=2048(\dfrac{1}{2})^{n-1}$.

（2） $\because\log_2 a_n=\log_2[2048(\dfrac{1}{2})^{n-1}]=12-n$， $\therefore T_n=\dfrac{1}{2}(-n^2+23n)$.

由 $T_n<-509$，解得 $n>\dfrac{23+\sqrt{4601}}{2}$，而 n 是正整数，于是 $n\geqslant 46$.

$\therefore$ 从第 46 项起 $T_n<-509$.

13. 解：（1）因为 $\{a_n\}$ 是等比数列， $S_n>0$,可得$a_1=S_1>0,q\neq 0$.

当$q=1$时,$S_n=na_1>0$；

当$q\neq 1$时,$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}>0$,即$\dfrac{1-q^n}{1-q}>0,(n=1,2,\cdots)$

上式等价于不等式组：$\begin{cases}1-q<0,\\1-q^n<0\end{cases},(n=1,2,\cdots)$ ① 或$\begin{cases}1-q>0,\\1-q^n>0\end{cases},(n=1,2,\cdots)$ ②

解①式得 $q>1$；解②，由于 n 可为奇数、可为偶数，得$-1<q<1$.
综上，q 的取值范围是$(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

（2）由$b_n=a_{a+2}-\dfrac{3}{2}a_{n+1}$得$b_n=a_n(q^2-\dfrac{3}{2}q)$, $T_n=(q^2-\dfrac{3}{2}q)S_n$.

于是$T_n-S_n=S_n(q^2-\dfrac{3}{2}q-1)=S_n(q+\dfrac{1}{2})(q-2)$.

又$\because S_n>0$ 且$-1<q<0$ 或 $q>0$

当$-1<q<-\dfrac{1}{2}$或$q>2$时， $T_n-S_n>0$ 即$T_n>S_n$；

当$-\dfrac{1}{2}<q<2$ 且 $q\neq 0$ 时， $T_n-S_n<0$ 即$T_n<S_n$；

当 $q=-\dfrac{1}{2}$ 或 $q=2$ 时， $T_n-S_n=0$ 即 $T_n=S_n$.

14. 证明：（1）当$x\geq 0$时,$f(x)=1+\dfrac{2}{x+1}\geq 1$. 又 $a_1=1$，所以 $a_n\geq 1(n\in N^*)$.

下面用数学归纳法证明不等式$b_n\leq\dfrac{(\sqrt{3}-1)^n}{2^{n-1}}$.

（*i*）当 $n=1$ 时，$b_1=\sqrt{3}-1$，不等式成立；

（*ii*）假设当 $n=k$ 时，不等式成立，即$b_k\leq\dfrac{(\sqrt{3}-1)^k}{2^{k-1}}$.

那么$b_{k+1}=|a_{k+1}-\sqrt{3}|=\dfrac{(\sqrt{3}-1)|a_k-\sqrt{3}|}{1+a_k}\leq\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}b_k\leq\dfrac{(\sqrt{3}-1)^{k+1}}{2^k}$.所以，当 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

根据（*i*）和（*ii*），可知不等式对任意 $n\in N^*$都成立.

（2）由（1）知$b_n\leq\dfrac{(\sqrt{3}-1)^n}{2^{n-1}}$，则$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n\leq(\sqrt{3}-1)+\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}+\cdots+\dfrac{(\sqrt{3}-1)^n}{2^{n-1}}$

$$=(\sqrt{3}-1)\cdot\frac{1-(\frac{\sqrt{3}-1}{2})^n}{1-\frac{\sqrt{3}-1}{2}}<(\sqrt{3}-1)\cdot\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}-1}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$ 所以，对任意 $n\in N^*,S_n<\frac{2}{3}\sqrt{3}.$

15. 解：（1）$\because$ 当 $n\geq 2$ 时, $0<a_n\leq\frac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}},\therefore\frac{1}{a_n}\geq\frac{n+a_{n-1}}{na_{n-1}}=\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{n}$, 即 $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\geq\frac{1}{n}$,

于是有 $\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\geq\frac{1}{2},\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}\geq\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\geq\frac{1}{n}.$

所有不等式两边相加可得 $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_1}\geq\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$

由已知不等式知，当 n≥3 时有，$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_1}>\frac{1}{2}[\log_2 n].$

$\because a_1=b,\therefore\frac{1}{a_n}>\frac{1}{b}+\frac{1}{2}[\log_2 n]=\frac{2+b[\log_2 n]}{2b}.$ $a_n<\frac{2b}{2+b[\log_2 n]}.$

（2）有极限，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0.$

（3）$\because\frac{2b}{2+b[\log_2 n]}<\frac{2}{[\log_2 n]}$, 令 $\frac{2}{[\log_2 n]}<\frac{1}{5}$, 则有 $\log_2 n\geq[\log_2 n]>10,\Rightarrow n>2^{10}=1024,$

故取 N=1024，可使当 $n>N$ 时，都有 $a_n<\frac{1}{5}.$

第 8 练　三角与向量专题

【第 8 练】 1～5　ADBBD；　6. $\frac{\sqrt{2}}{2}$；　7. $\frac{\pi}{2}$；　8. $1<k<3$.

9. $\sin\alpha+\sin(\alpha+\frac{2\pi}{3})+\sin(\alpha+\frac{4\pi}{3})=0$，$\cos\alpha+\cos(\alpha+\frac{2\pi}{3})+\cos(\alpha+\frac{4\pi}{3})=0$.

10. 解：（1）$f(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}+\sin 2x+\frac{3(1+\cos 2x)}{2}=1+\sin 2x+\cos 2x=2+\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$

$\therefore$ 当 $2x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，即 $x=k\pi+\frac{\pi}{8}(k\in Z)$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $2+\sqrt{2}$.

函数 $f(x)$ 的取得最大值的自变量 x 的集合为 $\{x/x\in R,x=k\pi+\frac{\pi}{8}(k\in Z)\}$.

（2）$f(x)=2+\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$，由题意得: $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leq 2x+\frac{\pi}{4}\leq 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$

即：$k\pi-\frac{3\pi}{8}\leq x\leq k\pi+\frac{\pi}{8}(k\in Z)$. 因此函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $[k\pi-\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{\pi}{8}](k\in Z)$.

11. 解：（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos\frac{3}{2}x\cdot\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{3}{2}x\cdot\cos\frac{x}{2}=\cos 2x$，

$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=(\cos\frac{3}{2}x+\cos\frac{x}{2})^2+(\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{x}{2})^2=2+2\cos 2x=4\cos^2 x$，

又 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$\therefore\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=2\cos x$.

（2）$f(x)=\cos 2x-\sin 2x=\sqrt{2}\cos(2x+\frac{\pi}{4})$，

$\because x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$\therefore 2x+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$，$\therefore\cos(2x+\frac{\pi}{4})\in[-1,\frac{\sqrt{2}}{2}]$，$f(x)_{\min}=-\sqrt{2}$.

12. 解：（1）$\because$ $\sin x=\frac{4}{5}$, $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$, $\therefore$ $\cos x=-\frac{3}{5}$，

$f(x)=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x)-2\cos x=\sqrt{3}\sin x-\cos x=\frac{4}{5}\sqrt{3}+\frac{3}{5}$.

（2）$f(x)=2\sin(x-\frac{\pi}{6})$，

$\because\ \frac{\pi}{2}\le x\le\pi$，　$\therefore\ \frac{\pi}{3}\le x-\frac{\pi}{6}\le\frac{5\pi}{6}$，　$\frac{1}{2}\le\sin(x-\frac{\pi}{6})\le 1$，　∴ 函数 $f(x)$ 的值域为 $[1,\ 2]$.

13. 解：（1）$f(x)=\vec{a}\bullet(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\bullet\vec{a}+\vec{a}\bullet\vec{b}=\sin^2x+\cos^2x+\sin x\cos x+\cos^2x$

$=1+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}(\cos 2x+1)=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$.

∴ $f(x)$ 的最大值为 $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$，最小正周期是 $\frac{2\pi}{2}=\pi$.

（2）由（1）知 $f(x)\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow\sin(2x+\frac{\pi}{4})\ge 0$

$\Leftrightarrow 2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{4}\le 2k\pi+\pi\Leftrightarrow k\pi-\frac{\pi}{8}\le x\le k\pi+\frac{3\pi}{8},k\in Z$

即 $f(x)\ge\frac{3}{2}$ 成立的 x 的取值集合是 $\left\{x\,|\,k\pi-\frac{\pi}{8}\le x\le k\pi+\frac{3\pi}{8},k\in Z\right\}$.

14. 解：（1）$\because\ \vec{m}\cdot\vec{n}=1$　$\therefore(-1,\sqrt{3})\bullet(\cos A,\sin A)=1$　即 $\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，

$2(\sin A\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos A\cdot\frac{1}{2})=1$，　$\sin(A-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$

$\because\ 0<A<\pi,-\frac{\pi}{6}<A-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，　$\therefore\ A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，　$\therefore\ A=\frac{\pi}{3}$.

（2）由题知 $\frac{1+2\sin B\cos B}{\cos^2B-\sin^2B}=-3$，整理得 $\sin^2B-\sin B\cos B-2\cos^2B=0$.

$\therefore\cos B\ne 0$，　$\therefore\tan^2B-\tan B-2=0$，　$\therefore\tan B=2$ 或 $\tan B=-1$.

而 $\tan B=-1$ 使 $\cos^2B-\sin^2B=0$，舍去，　$\therefore\tan B=2$.

$\therefore\tan C=\tan\left[\pi-(A+B)\right]=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\frac{2+\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}}=\frac{8+5\sqrt{3}}{11}$.

15. 解：（1）直接从 A 处游向 B 处时间为 $t_1=\frac{AB}{v_{游水}}=\frac{300\sqrt{2}}{2}=150\sqrt{2}$（秒），

从 A 经 D 到 B 处的时间为 $t_2=\frac{AD}{v_{跑}}+\frac{DB}{v_{游水}}=\frac{300}{6}+\frac{300}{2}=200$（秒），

$\because\ 150\sqrt{2}>200$，即 $t_1>t_2$. 所以，救生员的选择“从 A 经 D 到 B 处”是正确的.

（2）设 $\angle CBD=\theta$，则 $\theta\in(0°,45°)$，　$BC=\frac{300}{\cos\theta}$，　$AC=300-300\tan\theta$，

从 A 经 C 到 B 处的时间为 $t_3=\frac{AC}{v_{跑}}+\frac{CB}{v_{游水}}=\frac{300-300\tan\theta}{6}+\frac{300}{2\cos\theta}=50+50\times\frac{3-\sin\theta}{\cos\theta}$

设 $\frac{3-\sin\theta}{\cos\theta}=k$，整理得 $\sin\theta+k\cos\theta=3=\sqrt{k^2+1}\sin(\theta+\varphi)$，即 $\sin(\theta+\varphi)=\frac{3}{\sqrt{k^2+1}}\le 1$

解得 $k\ge 2\sqrt{2}$，所以 $t_3\ge 50+100\sqrt{2}$，即最短时间为 $50+100\sqrt{2}$ 秒.

由 $\sin\theta+2\sqrt{2}\cos\theta=3$，解得 $\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$，所以 $CD=300\tan\theta=75\sqrt{2}$（米）.

第 9 练　解析几何专题

【第 9 练】 1～5　ADABD；　6. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$；　7. $-\frac{1}{2}$；　8. $(0,2-\frac{\pi}{2}]$；　9. $x^2+\frac{4}{3}y^2=1$.

10. 解：如图，以直线 O_1O_2 为 x 轴，线段 O_1O_2 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系，则两圆心分别为 $O_1(-2,0), O_2(2,0)$．设 $P(x,y)$，则 $PM^2=O_1P^2-O_1M^2=(x+2)^2+y^2-1$，同理 $PN^2=(x-2)^2+y^2-1$．

∵ $PM=\sqrt{2}PN$，∴ $(x+2)^2+y^2-1=2[(x-2)^2+y^2-1]$，

即 $x^2-12x+y^2+3=0$，即 $(x-6)^2+y^2=33$．这就是动点 P 的轨迹方程

11. 解：由已知可得 $A(2,\ 0)$, $B(0,\ 2)$, $C(1,\ 1)$，

解得抛物线方程为 $y^2=x$． 于是焦点 $F(\frac{1}{4},\ 0)$．

∴ 点 F 到直线 AB 的距离为 $\dfrac{\left|\frac{1}{4}+0-2\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{7\sqrt{2}}{8}$．

12. 解：（1）∵抛物线 $y=2x^2$，即 $x^2=\frac{y}{2}$,∴ $p=\frac{1}{4}$，∴焦点为 $F(0,\frac{1}{8})$．

（i）直线 l 的斜率不存在时，显然有 $x_1+x_2=0$．

（ii）直线 l 的斜率存在时，设为 k，在 y 轴上的截距为 b，即直线 l：$y=kx+b$.

由已知得：$\begin{cases}\dfrac{y_1+y_2}{2}=k\cdot\dfrac{x_1+x_2}{2}+b\\ \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{1}{k}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{2x_1^2+2x_2^2}{2}=k\cdot\dfrac{x_1+x_2}{2}+b\\ \dfrac{2x_1^2-2x_2^2}{x_1-x_2}=-\dfrac{1}{k}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1^2+x_2^2=k\cdot\dfrac{x_1+x_2}{2}+b\\ x_1+x_2=-\dfrac{1}{2k}\end{cases}$

$\Rightarrow x_1^2+x_2^2=-\frac{1}{4}+b\geq 0\Rightarrow b\geq\frac{1}{4}$，即 l 的斜率存在时，不可能经过焦点 $F(0,\frac{1}{8})$．

所以当且仅当 x_1+x_2=0 时，直线 l 经过抛物线的焦点 F.

（2）当 $x_1=1, x_2=-3$ 时，直线 l 的斜率显然存在，设为 l：$y=kx+b$.

则由（1）得：$\begin{cases}x_1^2+x_2^2=k\cdot\dfrac{x_1+x_2}{2}+b\\ x_1+x_2=-\dfrac{1}{2k}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k\cdot\dfrac{x_1+x_2}{2}+b=10\\ -\dfrac{1}{2k}=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=\dfrac{1}{4}\\ b=\dfrac{41}{4}\end{cases}$．

所以直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{4}x+\frac{41}{4}$.

13. 解：(1) 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0), F(c,0)$，则直线 AB 的方程为 $y=x-c$，代入 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，化简得 $(a^2+b^2)x^2-2a^2cx+a^2c^2-a^2b^2=0$．

令 A（x_1,y_1），$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{2a^2c}{a^2+b^2}, x_1x_2=\dfrac{a^2c^2-a^2b^2}{a^2+b^2}$.

由 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(x_1+x_2,y_1+y_2),\vec{a}=(3,-1),\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 与 $\vec{a}$ 共线，得 $3(y_1+y_2)+(x_1+x_2)=0,$

又 $y_1=x_1-c, y_2=x_2-c$，$\therefore 3(x_1+x_2-2c)+(x_1+x_2)=0,$ $\therefore x_1+x_2=\frac{3}{2}c.$

即 $\dfrac{2a^2c}{a^2+b^2}=\dfrac{3c}{2}$，所以 $a^2=3b^2.$ $\therefore c=\sqrt{a^2-b^2}=\dfrac{\sqrt{6}a}{3}$， 故离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}.$

（2）证明：由（1）知 $a^2=3b^2$，所以椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0),F(c,0)$ 可化为 $x^2+3y^2=3b^2$.

设 $\overrightarrow{OM}=(x,y)$，由已知得 $(x,y)=\lambda(x_1,y_1)+\mu(x_2,y_2),\ \therefore\begin{cases}x=\lambda x_1+\mu x_2,\\ y=\lambda x_1+\mu x_2.\end{cases}$

$\because M(x,y)$ 在椭圆上，$\therefore(\lambda x_1+\mu x_2)^2+3(\lambda y_1+\mu y_2)^2=3b^2.$

即 $\lambda^2(x_1^2+3y_1^2)+\mu^2(x_2^2+3y_2^2)+2\lambda\mu(x_1x_2+3y_1y_2)=3b^2$. ①

由（1）知 $x_1+x_2=\dfrac{3c}{2}, a^2=\dfrac{3}{2}c^2, b^2=\dfrac{1}{2}c^2.$ $x_1x_2=\dfrac{a^2c^2-a^2b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{3}{8}c^2$

$x_1x_2+3y_1y_2=x_1x_2+3(x_1-c)(x_2-c)=4x_1x_2-3(x_1+x_2)c+3c^2=\frac{3}{2}c^2-\frac{9}{2}c^2+3c^2=0$.

又 $x_1^2+3y_1^2=3b^2, x_2^2+3y_2^2=3b^2$，代入①得 $\lambda^2+\mu^2=1$.

故 $\lambda^2+\mu^2$ 为定值，定值为 1.

14. 证明：（1）对任意固定的 $n\ge1$, 因为焦点 F（0，1），所以可设直线 A_nB_n 的方程为 $y-1=k_nx$, 将它与抛物线方程 $x^2=4y$ 联立得: $x^2-4k_nx-4=0$，由一元二次方程根与系数的关系得 $x_ns_n=-4(n\ge1)$.

（2）对任意固定的 $n\ge1$, 利用导数知识易得抛物线 $x^2=4y$ 在 A_n 处的切线的斜率 $k_{A_n}=\frac{x_n}{2}$, 故 $x^2=4y$ 在 A_n 处的切线的方程为： $y-y_n=\frac{x_n}{2}(x-x_n)$，……①

类似地，可求得 $x^2=4y$ 在 B_n 处的切线的方程为： $y-t_n=\frac{s_n}{2}(x-s_n)$，……②

由②－①得： $y_n-t_n=-\frac{x_n-s_n}{2}x+\frac{x_n^2-s_n^2}{2}=\frac{x_n^2}{4}-\frac{s_n^2}{4}$， $\frac{x_n-s_n}{2}x=\frac{x_n^2-s_n^2}{4},\therefore x=\frac{x_n+s_n}{2}$ ……③

将③代入①并注意 $x_ns_n=-4$ 得交点 C_n 的坐标为 $(\frac{x_n+s_n}{2},-1)$.

由两点间的距离公式得： $|FC_n|^2=(\frac{x_n+s_n}{2})^2+4=\frac{x_n^2}{4}+\frac{s_n^2}{4}+2=\frac{x_n^2}{4}+\frac{4}{x_n^2}+2=(\frac{x_n}{2}+\frac{2}{x_n})^2,\Rightarrow|FC_n|=\frac{|x_n|}{2}+\frac{2}{|x_n|}$.

现在 $x_n=2^n$，利用上述已证结论并由等比数列求和公式得：

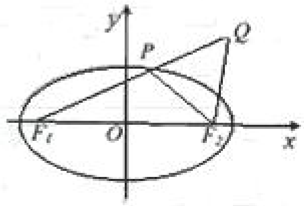
$$|FC_1|+|FC_2|+\cdots+|FC_n|=\frac{1}{2}(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)+2(\frac{1}{|x_1|}+\frac{1}{|x_2|}+\cdots+\frac{1}{|x_n|})$$

$$=\frac{1}{2}(2+2^2+\cdots+2^n)+2(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n})=(2^n-1)+(2-2^{1-n})=2^n-2^{-n+1}+1.$$

15. 解：（1）证明：设点 P 的坐标为 (x,y).

由 $P(x,y)$ 在椭圆上，得 $|\overrightarrow{F_1P}|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}=\sqrt{(a+\frac{c}{a}x)^2}$.

由 $x\ge a$, 知 $a+\frac{c}{a}x\ge -c+a>0$，所以 $|\overrightarrow{F_1P}|=a+\frac{c}{a}x.$



（2）设点 T 的坐标为 (x,y).

当 $|\overrightarrow{PT}|=0$ 时，点（a，0）和点（－a，0）在轨迹上.

当 $|\overrightarrow{PT}|\ne0$ 且 $|\overrightarrow{TF_2}|\ne0$ 时，由 $|\overrightarrow{PT}|\cdot|\overrightarrow{TF_2}|=0$，得 $\overrightarrow{PT}\perp\overrightarrow{TF_2}$.

又 $|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PF_2}|$，所以 T 为线段 F_2Q 的中点.

在△QF_1F_2 中，$|\overrightarrow{OT}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{F_1Q}|=a$，所以有 $x^2+y^2=a^2$.

综上所述，点 T 的轨迹 C 的方程是 $x^2+y^2=a^2$.

（3）C 上存在点 M（x_0,y_0）使 $S=b^2$ 的充要条件是 $\begin{cases}x_0^2+y_0^2=a^2,(3)\\ \frac{1}{2}\cdot2c|y_0|=b^2.(4)\end{cases}$

由③得 $|y_0|\le a$，由④得 $|y_0|\le\frac{b^2}{c}$. 所以，当 $a\ge\frac{b^2}{c}$ 时，存在点 M，使 $S=b^2$；

当 $a<\frac{b^2}{c}$ 时，不存在满足条件的点 M.

当 $a\ge\frac{b^2}{c}$ 时，$\overrightarrow{MF_1}=(-c-x_0,-y_0),\overrightarrow{MF_2}=(c-x_0,-y_0)$，

由 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=x_0^2-c^2+y_0^2=a^2-c^2=b^2$， $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=|\overrightarrow{MF_1}|\cdot|\overrightarrow{MF_2}|\cos\angle F_1MF_2$，

$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{MF_1}|\cdot|\overrightarrow{MF_2}|\sin\angle F_1MF_2=b^2$，得 $\tan\angle F_1MF_2=2$.

第 10 练　立体几何专题

【第 10 练】 1～5　CBDAD；　6. $\frac{16}{3}$；　7. ③⑤，②⑤；　8. 90°；　9. $\frac{4}{9}\sqrt{5}$.

10. 解：（1）证明：在直四棱柱 $ABCD-AB_1C_1D_1$ 中，

∵$AA_1\perp$底面 $ABCD$. ∴ AC 是 A_1C 在平面 $ABCD$ 上的射影.

∵$BD\perp AC$. ∴ $BD\perp A_1C$；

（2）连结 A_1E，C_1E，A_1C_1.

与（1）同理可证 $BD\perp A_1E$，$BD\perp C_1E$，

∴ $\angle A_1EC_1$ 为二面角 A_1-BD-C_1 的平面角.

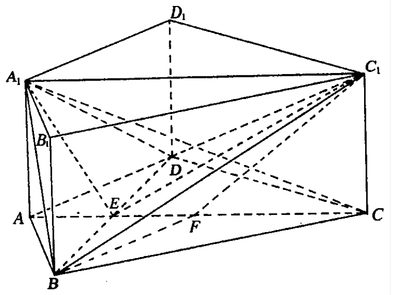
∵ $AD\perp DC$，∴ $\angle A_1D_1C_1=\angle ADC=90°$，

又 $A_1D_1=AD=2$，$D_1C_1=DC=2\sqrt{3}$，$AA_1=\sqrt{3}$ 且 $AC\perp BD$，

∴ $A_1C_1=4$，$AE=1$，$EC=3$，∴ $A_1E=2$，$C_1E=2\sqrt{3}$，

在$\triangle A_1EC_1$ 中，$A_1C_1^2=A_1E^2+C_1E^2$，　∴ $\angle A_1EC_1=90°$，

即二面角 A_1-BD-C_1 的大小为 90°.



11. 证明：（1）取 CD 中点 M，连结 OM.

在矩形 $ABCD$ 中，$OM \underline{\underline{//}} \frac{1}{2}BC$，又 $EF \underline{\underline{//}} \frac{1}{2}BC$，

则 $EF \underline{\underline{//}} OM$，连结 EM，于是四边形 $EFOM$ 为平行四边形. ∴ $FO // EM$

又∵ $FO\not\subset$ 平面 CDE，且 $EM\subset$ 平面 CDE，∵$FO //$ 平面 CDE.

（2）连结 FM，由（1）和已知条件，在等边$\triangle CDE$ 中，$CM=DM, EM\perp CD$ 且 $EM=\frac{\sqrt{3}}{2}CD=\frac{1}{2}BC=EF$.

因此平行四边形 $EFOM$ 为菱形，从而 $EO\perp FM$ 而 $FM\cap CD=M$，∴$CD\perp$平面 EOM，从而 $CD\perp EO$.而 $FM\cap CD=M$，所以 $EO\perp$平面 CDF.

12. 解：（1）证明：直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，底面三边长 $AC=3$，$BC=4$，$AB=5$，

∴ $AC\perp BC$，且 BC_1 在平面 ABC 内的射影为 BC，∴ $AC\perp BC_1$；

（2）证明：设 CB_1 与 C_1B 的交点为 E，连结 DE，

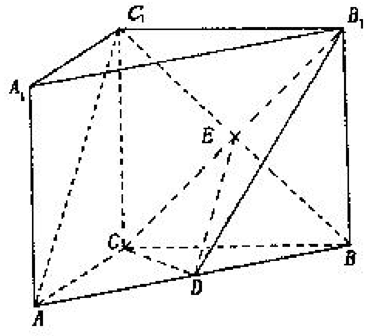
∵ D 是 AB 的中点，E 是 BC_1 的中点，∴ $DE//AC_1$，

∵ $DE\subset$平面 CDB_1，$AC_1\not\subset$平面 CDB_1，∴ $AC_1//$平面 CDB_1；

（3）∵ $DE//AC_1$，∴ $\angle CED$ 为 AC_1 与 B_1C 所成的角，

在$\triangle CED$ 中，$ED=\frac{1}{2}AC_1=\frac{5}{2}$，$CD=\frac{1}{2}AB=\frac{5}{2}$，$CE=\frac{1}{2}CB_1=2\sqrt{2}$，

∴ $\cos\angle CED=\frac{8}{2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{5}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$，



∴ 异面直线 AC_1 与 B_1C 所成角的余弦值$\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

13．解：（1）证明：∵ $PA^2+AC^2=36+64=100=PC^2$，

∴$\triangle PAC$ 是以$\angle PAC$ 为直角的直角三角形，同理可证$\triangle PAB$ 是以$\angle PAB$ 为直角的直角三角形，$\triangle PCB$ 是以$\angle PCB$ 为直角的直角三角形.

故 $PA\perp$平面 ABC.

又∵ $S_{\Delta PBC}=\frac{1}{2}|AC||BC|=\frac{1}{2}\times 10\times 6=30$，而$\frac{1}{2}|PB||CF|=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{34}\times\frac{15\sqrt{34}}{17}=30=S_{\Delta PBC}$，

故 $CF\perp PB$，又已知 $EF\perp PB$，∴$PB\perp$平面 CEF.

（2）由（1）知 $PB\perp CE$，　$PA\perp$平面 ABC，∴AB 是 PB 在平面 ABC 上的射影，故 $AB\perp CE$.

在平面 PAB 内，过 F 作 FF_1 垂直 AB 交 AB 于 F_1，则 $FF_1\perp$平面 ABC，

EF_1 是 EF 在平面 ABC 上的射影，∴$EF\perp EC$，故$\angle FEB$ 是二面角 $B—CE—F$ 的平面角.

$\tan\angle FEB=\cot\angle PBA=\frac{AB}{AP}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$.

14. 解法一：　（1）连结 AC、BD，设 $AC\cap BD=O$.由 $P-ABCD$ 与 $Q-ABCD$ 都是正四棱锥，所以 $PO\perp$平面 $ABCD$，$QO\perp$平面 $ABCD$.从而 P、O、Q 三点在一条直线上，所以 $PQ\perp$平面 $ABCD$.

（2）由题设知，ABCD 是正方形，所以 $AC\perp BD$.

由（1），$PQ\perp$平面$ABCD$，故可以分别以直线 CA、DB、QP 为x轴，y轴，z轴建立空间直角坐标系（如上图），由题设条件，相关各点的坐标分别是$P(0,0,1)$，$Q(0,0,-2)$，$B(0,2\sqrt{2},0)$，

所以$\overrightarrow{AQ}=(-2\sqrt{2},0,-2)$，$\overrightarrow{PB}=(0,2\sqrt{2},-1)$，

于是$\cos<\overrightarrow{AQ},\overrightarrow{PB}>=\dfrac{\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{PB}}{\left|\overrightarrow{AQ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PB}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}.$

（3）由（2），点D的坐标是（0，$-2\sqrt{2}$，0），$\overrightarrow{AD}=(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{PQ}=(0,0,-3)$，

设$\vec{n}=(x,y,z)$是平面QAD的一个法向量，由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AQ}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}\sqrt{2}x+z=0\\ x+y=0\end{cases}$.

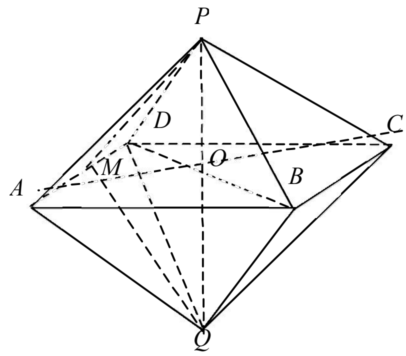
取x=1，得$\vec{n}=(1,-1,-\sqrt{2})$． 所以点P到平面QAD的距离$d=\dfrac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$..

解法二：（1）取AD的中点 M，连结PM，QM. 因为$P-ABCD$与$Q-ABCD$都是正四棱锥，所以$AD\perp PM$，$AD\perp QM$. 从而$AD\perp$平面PQM.

又$PQ\subset$平面PQM，所以$PQ\perp AD$.同理$PQ\perp AB$，所以$PQ\perp$平面$ABCD$.

（2）连结AC、BD设$AC\cap BD=O$，由$PQ\perp$平面$ABCD$及正四棱锥的性质可知O在PQ上，从而P、A、Q、C四点共面.

取OC的中点N，连结PN.



因为$\dfrac{PO}{OQ}=\dfrac{1}{2},\dfrac{NO}{OA}=\dfrac{NO}{OC}=\dfrac{1}{2}$，所以$\dfrac{PO}{OQ}=\dfrac{NO}{OA}$，

从而$AQ\,//\,PN$.$\angle BPN$（或其补角）是异面直线AQ与PB所成的角. 连接BN，

因为$PB=\sqrt{OB^2+OP^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1}=3$，

$PN=\sqrt{ON^2+OP^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1}=\sqrt{3}$，

$BN=\sqrt{OB^2+ON^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{10}$，

所以$\cos\angle BPN=\dfrac{PB^2+PN^2-BN^2}{2PB\cdot PN}=\dfrac{9+3-10}{2\times3\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

（3）由（1）知，$AD\perp$平面PQM，所以平面$PQM\perp$平面QAD. 过P作$PH\perp QM$于H，则$PH\perp$平面QAD，所以PH的长为点P到平面QAD的距离.

连结OM，则$OM=\dfrac{1}{2}AB=2=OQ$.所以$\angle MQP=45^\circ$，

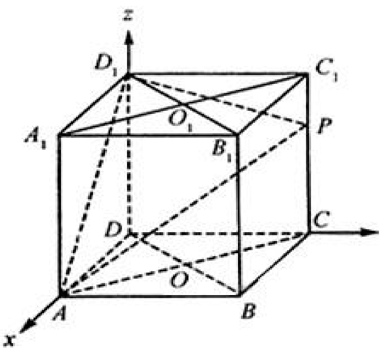
又$PQ=PO+QO=3$，于是$PH=PQ\sin45^\circ=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，即点$P$到平面$QAD$的距离是$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

15. 解法 1：（1）连AC,设$AC\cap BD=O$, AP与面BDD_1B_1交于点G，连OG.

因为$PC\,//$面BDD_1B_1,面$BDD_1B_1\cap$面$APC=OG$，故$OG\,//\,PC$. 所以$OG=\dfrac{1}{2}PC=\dfrac{m}{2}$.

又$AO\perp DB,AO\perp BB_1$,所以$AO\perp$面BDD_1B_1.故$\angle AGO$即为AP与面BDD_1B_1所成的角。

在$Rt\triangle AOG$中,$\tan AGO=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{m}{2}}=3\sqrt{2}$，即$m=\dfrac{1}{3}$.



故当$m=\dfrac{1}{3}$时，直线AP与平面BDD_1B_1所成的角的正切值为$3\sqrt{2}$.

（2 依题意，要在A_1C_1上找一点Q，使得$D_1Q\perp AP$.可推测A_1C_1的中点O_1即为所求的Q点.

因为$D_1O_1\perp A_1C_1$. $D_1O_1\perp AA_1$，所以$D_1Q\perp$面ACC_1A_1.

又$AP\subset$面ACC_1A_1.，故$D_1O_1\perp AP$.

从而D_1O_1在平面AD_1P上的射影与AP垂直。

解法二：（1）建立如图所示的空间直角坐标系，则$A(1，0，0)$，$B(1，1，0)$，$P(0，1，m)$，$C(0，1，0)$，$D(0，0，0)$，$B_1(1，1，1)$，$D_1(0，0，1)$.

所以$\overrightarrow{BD}=(-1,-1,0),\overrightarrow{BB_1}=(0,0,1),\ \overrightarrow{AP}=(-1,1,m),\overrightarrow{AC}=(-1,1,0).$

又由$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0$知$\overrightarrow{AC}$为平面$BB_1D_1D$的一个法向量.

设AP与面BDD_1B_1所成的角为θ，则$\sin\theta=\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+m^2}}$

依题意有：$\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+m^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{1+(3\sqrt{2})^2}}$，解得$m=\frac{1}{3}$.

故当$m=\frac{1}{3}$时，直线AP与平面BDD_1B_1所成的角的正切值为$3\sqrt{2}$.

（2）若在A_1C_1上存在这样的点Q，设此点的横坐标为x，则$Q(x,1-x,1),\overrightarrow{D_1Q}=(x,1-x,0)$.

依题意，对任意的m要使D_1Q在平面APD_1上的射影垂直于AP. 等价于

$\overrightarrow{D_1Q}\perp AP\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{D_1Q}=0\Leftrightarrow x+(1-x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$，即$Q$为$A_1C_1$的中点时，满足题设的要求.

第 11 练　概率与统计专题

【第 11 练】 1～5　ADBCC；　6. 0.05；　7. $\frac{1}{260}$；　8. $\frac{5}{8}$；　9. $\frac{4}{9}$.

10. 解：（1）设$P(A_1)$=0.7，$P(A_2)$=0.6，$P(A_3)$=0.5.

则至少有一人命中目标的概率为：$1-P(\overrightarrow{A_1}\cdot\overrightarrow{A_2}\cdot\overrightarrow{A_3})=1-P(\overrightarrow{A_2})P(\overrightarrow{A_2})P(\overrightarrow{A_3})=0.94$.

恰有两人命中目标的概率为：

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\overrightarrow{A_3}+A_1\cdot\overrightarrow{A_2}\cdot A_3+\overrightarrow{A_1}\cdot A_2\cdot A_3)=P(A_1\cdot A_2\cdot\overrightarrow{A_3})+P(A_1\cdot\overrightarrow{A_2}\cdot A_3)+P(\overrightarrow{A_1}\cdot A_2\cdot A_3)=0.44$$

（2）$P_3(2)=C_3^2\times0.7^2\times(1-0.7)=0.441$.

11. 解：（1）ξ的所有可能的取值为 0,10,20,50,60.

$P(\xi=0)=(\frac{9}{10})^3=\frac{729}{1000}$；$P(\xi=10)=\frac{1}{10}\times(\frac{9}{10})^2+\frac{9}{10}\times\frac{18}{10^2}=\frac{243}{1000}$；

$P(\xi=20)=\frac{1}{10}\times\frac{18}{10^2}=\frac{18}{1000}$；$P(\xi=50)=\frac{9}{10}\times\frac{1}{10^2}=\frac{9}{1000}$；$P(\xi=60)=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000}$；

分布列为

ξ	0	10	20	50	60
P	$\frac{729}{1000}$	$\frac{243}{1000}$	$\frac{18}{1000}$	$\frac{9}{1000}$	$\frac{1}{1000}$

(2)$E\xi=0\times\frac{729}{1000}+10\times\frac{243}{1000}+20\times\frac{18}{1000}+50\times\frac{9}{1000}+60\times\frac{1}{1000}=3.3$(元)

12. 解：（1）略　　（2）纤度落在$[1.38,1.50)$中的概率约为$0.30+0.29+0.10=0.69$，纤度小于 1.40 的概率约为　$0.04+0.25+\frac{1}{2}\times0.30=0.44$.

（3）总体数据的期望约为$1.32\times0.04+1.36\times0.25+1.40\times0.30+1.44\times0.29+1.48\times0.10+1.52\times0.02=1.4088$.

13. 解：将已知条件列表如下:

	盈利可能性	盈利率	亏损可能性	亏损率
甲项目	70%	40%	15%	20%
乙项目	50%	50%	20%	15%

设甲盈利ξ万元，乙盈利η万元. 概率分布列如下所示:

ξ	10×0.4	-10×0.2	0
P	0.7	0.15	0.15

η	10×0.5	-10×0.15	0
P	0.5	0.2	0.3

则甲期望盈利$E\xi=4\times0.7+(-2)\times0.15+0=2.5$（万元），

乙期望盈利 $E\eta = 5\times0.5 + (-1.5)\times0.2 + 0 = 2.2$（万元）.所以，期望盈利是 4.7 万元.

14. 解：（1）“一次取出的 3 个小球上的数字互不相同”的事件记为 A，则 $P(A)=\dfrac{C_5^3\cdot C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1}{C_{10}^3}=\dfrac{2}{3}$

（2）由题意 ε 有可能的取值为：2，3，4，5.

$P(\varepsilon=2)=\dfrac{C_2^2\cdot C_2^1+C_2^1\cdot C_2^2}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{30}$； $P(\varepsilon=3)=\dfrac{C_4^2\cdot C_2^1+C_4^1\cdot C_2^2}{C_{10}^3}=\dfrac{2}{15}$；

$P(\varepsilon=4)=\dfrac{C_6^2\cdot C_2^1+C_6^1\cdot C_2^2}{C_{10}^3}=\dfrac{3}{10}$； $P(\varepsilon=5)=\dfrac{C_8^2\cdot C_2^1+C_8^1\cdot C_2^2}{C_{10}^3}=\dfrac{8}{15}$；

所以随机变量 ε 的概率分布为

ε	2	3	4	5
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{8}{15}$

因此 ε 的数学期望为 $E\varepsilon=2\times\dfrac{1}{30}+3\times\dfrac{2}{15}+4\times\dfrac{3}{10}+5\times\dfrac{8}{15}=\dfrac{13}{3}$

（3）“一次取球所得计分介于 20 分到 40 分之间”的事件记为 C，则

$P(C)=P("\varepsilon=3"或"\varepsilon=4")=P("\varepsilon=3")+P("\varepsilon=4")=\dfrac{2}{15}+\dfrac{3}{10}=\dfrac{13}{30}$.

15. 解①不采取预防措施时，总费用即损失期望为 400×0.3=120（万元）；

②若单独采取措施甲，则预防措施费用为 45 万元，发生突发事件的概率为 1－0.9=0.1，损失期望值为 400×0.1=40（万元），所以总费用为 45+40=85（万元）

③若单独采取预防措施乙，则预防措施费用为 30 万元，发生突发事件的概率为 1－0.85=0.15，损失期望值为 400×0.15=60（万元），所以总费用为 30+60=90（万元）；

④若联合采取甲、乙两种预防措施，则预防措施费用为 45+30=75（万元），发生突发事件的概率为（1－0.9）（1－0.85）=0.015，损失期望值为 400×0.015=6（万元），所以总费用为 75+6=81（万元）.

综合①、②、③、④可知，应选择联合采取甲、乙两种预防措施，可使总费用最少.

第 12 练　数学应用问题

【第 12 练】 1～5　AACCA；　6.　25；　7. $\dfrac{4}{\pi+4}$；　8. $a(1+b)$，　$a(1+b)^5$；　9.　20.

10. 解：（1）设 t 小时后蓄水池中的水量为 y 吨，则 $y=400+60t-120\sqrt{6t}$.

令 $\sqrt{6t}=x$，则 $x^2=6t$，即 $y=400+10x^2-120x=10(x-6)^2+40,\ x\in[0,12]$.

∴ 当 $x=6$，即 $t=6$ 时，$y_{\min}=40$，即从供水开始到第 6 小时时，蓄水池水量最少，只有 40 吨.

（2）依题意得 $400+10x^2-120x<80$，即 $x^2-12x+32<0$，解得 $4<x<8$，即 $4<\sqrt{6t}<8$，$\dfrac{8}{3}<t<\dfrac{32}{3}$.

由 $\dfrac{32}{3}-\dfrac{8}{3}=8$，所以每天约有 8 小时供水紧张.

11. 解：（1）设商品降价 x 元，则多卖的商品数为 kx^2，若记商品在一个星期的获利为 $f(x)$，则依题意有 $f(x)=(30-x-9)(432+kx^2)=(21-x)(432+kx^2)$，又由已知条件有，$24=k\bullet2^2$，解得 $k=6$.

所以 $f(x)=-6x^3+126x^2-432x+9072,\ x\in[0,30]$.

（2）求导 $f'(x)=-18x^2+252x-432=-18(x-2)(x-12)$. 令 $f'(x)=0$，解得 $x=2$ 或 $x=12$.

x、$f'(x)$、$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$[0,2)$	2	$(2,12)$	12	$(12,30]$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	极小	↗	极大	↘

故 $x=12$ 时，$f(x)$ 达到极大值. 因为 $f(0)=9072$，$f(12)=11264$，所以定价为 $30-12=18$ 元能使一个星期的商品销售利润最大.

12. 解：由题意知，每年的经费是以 12 为首项，4 为公差的等差数列，设纯利润与年数的关系为 $f(n)$,

则 $f(n)=50n-[12n+\frac{n(n-1)}{2}\times 4]-72=-2n^2+40n-72$.

（1）获纯利润就是要求 $f(n)>0$, ∴ $-2n^2+40n-72>0$，解得 $2<n<18$. 由 $n\in\mathbf{N}$ 知从第三年开始获利.

（2）①年平均利润=$\frac{f(n)}{n}=40-2(n+\frac{36}{n})\leqslant 16$. 当且仅当 $n=6$ 时取等号. 故此方案先获利 6×16+48=144（万美元），此时 $n=6$,②$f(n)=-2(n-10)^2+128$.

当 $n=10$ 时，$f(n)|_{max}=128$.故第②种方案共获利 128+16=144（万美元）.

比较两种方案,获利都是 144 万美元，但第①种方案只需 6 年，而第②种方案需 10 年，故选择第①种方案.

13. 解：设分别生产 P、Q 产品 x 件、y 件，则有

$\begin{cases}0\le x\le 2500\\0\le y\le 1200\end{cases}$，依题意有 $\begin{cases}4x+6y\le 14000\\2x+8y\le 12000\end{cases}$，则有 $\begin{cases}2x+3y\le 7000\\x+4y\le 6000\end{cases}$.

设利润 $S=1000x+2000y=1000(x+2y)$，要使利润 S 最大，只需求 $x+2y$ 的最大值.

$x+2y=m(2x+3y)+n(x+4y)=x(2m+n)+y(3m+4n)$，∴ $\begin{cases}2m+n=1\\3m+4n=2\end{cases}$，∴ $\begin{cases}m=\frac{2}{5}\\n=\frac{1}{5}\end{cases}$.

有 $x+2y=\frac{2}{5}(2x+3y)+\frac{1}{5}(x+4y)\leqslant\frac{2}{5}\times 7000+\frac{2}{5}\times 6000$.

当且仅当 $\begin{cases}2x+3y=7000\\x+4y=6000\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=2000\\y=1000\end{cases}$ 时取等号，此时最大利润 $S_{max}=1000(x+2y)=4000000=400$(万元).

注：此题可运用“线性规划模型”解决.

14. 解：（1）设 A_i 表示事件“一个试验组中，服用 A 有效的小鼠有 i 只", $i=0,1,2$,

B_i 表示事件“一个试验组中，服用 B 有效的小鼠有 i 只", $i=0,1,2$,

依题意有：$P(A_1)=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$, $P(A_2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$. $P(B_0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, $P(B_1)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

所求概率为：$P=P(B_0\cdot A_1)+P(B_0\cdot A_2)+P(B_1\cdot A_2)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{9}$.

（2）所求概率为: $P=1-(1-\frac{4}{9})^3=\frac{604}{729}$.

（3）ξ 的可能值为 0,1,2,3 且 $\xi\sim B(3,\frac{4}{9})$. $P(\xi=0)=(\frac{5}{9})^3=\frac{125}{729}$, $P(\xi=1)=C_3^1\times\frac{4}{9}\times(\frac{5}{9})^2=\frac{100}{243}$,

$P(\xi=2)=C_3^2\times(\frac{4}{9})^2\times\frac{5}{9}=\frac{80}{243}$, $P(\xi=3)=(\frac{4}{9})^3=\frac{64}{729}$.

ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{125}{729}$	$\frac{100}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{64}{729}$

数学期望: $E\xi=3\times\frac{4}{9}=\frac{4}{3}$.

15. 解：（1）设曲线方程为 $y=ax^2+\frac{64}{7}$，由题意可知，$0=a\cdot 64+\frac{64}{7}$，解得 $a=-\frac{1}{7}$.

∴ 曲线方程为 $y=-\frac{1}{7}x^2+\frac{64}{7}$.

（2）设变轨点为 $C(x,\ y)$，根据题意可知

$\begin{cases}\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1, & (1)\\ y=-\frac{1}{7}x^2+\frac{64}{7}, & (2)\end{cases}$，得 $4y^2-7y-36=0$，解得 $y=4$ 或 $y=-\frac{9}{4}$（不合题意，舍去）.

∴ $y=4$，解得 $x=6$ 或 $x=-6$（不合题意，舍去）.

∴ C 点的坐标为 $(6,\ 4)$，$|AC|=2\sqrt{5},\ |BC|=4$.

答：当观测点 A、B 测得 AC、BC 距离分别为 $2\sqrt{5}$、4 时，应向航天器发出变轨指令.

第 13 练 探究创新问题

【第 13 练】 1～5 CDDDB； 6. $d_n=\sqrt[n]{c_1c_2\cdots c_n}$ （$n\in N^*$）； 7. $S_{\Delta ABC}^2+S_{\Delta ACD}^2+S_{\Delta ADB}^2=S_{\Delta BCD}^2$；

8. $\sin^2\alpha+\cos^2(\alpha+30°)+\sin\alpha\cos(\alpha+30°)=\dfrac{3}{4}$； 9. $\dfrac{25}{36}$.

10. 解：（1）由已知，得 $\vec{x}=(1,2)+(-2t^2-2,t^2+1)=(-2t^2-1,t^2+3)$，

$\vec{y}=(-k,-2k)+(\frac{-2}{t},\frac{1}{t})=(-k-\frac{2}{t},-2k+\frac{1}{t})$.

∵ $\vec{x}\perp\vec{y}$， ∴ $(-2t^2-1)(-k-\frac{2}{t})+(t^2+3)(-2k+\frac{1}{t})=0$. 化简，整理得 $k=\dfrac{t^2+1}{t}$.

由基本不等式求得 k 的最小值为 2.

（2）假设存在正实数 k，t，使得 $\vec{x}//\vec{y}$，则 $(-2t^2-1)(-2k+\frac{1}{t})=(t^2+3)(-k-\frac{2}{t})$.

整理，得 $tk(t^2+1)+1=0$. 所以，满足上述等式的正实数 k，t 不存在.

11. 解：（1） $a_4=a_3+a_2=2a_2+a_1=5, \because a_n为整数, \therefore 取 a_1=1,a_2=2$

即 $\begin{cases}a_1=1,a_2=2\\a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\end{cases}$， $(1,2,3,5,8,13,21,34,55,\cdots)$

（2）设 $a_k=5t(t\in Z)$，∵ $a_{k+5}=a_{k+4}+a_{k+3}=2a_{k+3}+a_{k+2}=3a_{k+2}+2a_{k+1}=5a_{k+1}+3a_k=5(a_{k+1}+3t)$

∴ a_{k+5} 是 5 的倍数，即若数列 $\{a_n\}$ 中某一项是 5 的倍数，它后面还会有某些项是 5 的倍数.

12. 解：（1）设 $y=\sqrt{(x\oplus a)-(x\otimes a)}$ ，则 $y^2=(x\oplus a)-(x\otimes a)=(x+a)^2-(x-a)^2=4ax$ ，

又由 $y=\sqrt{(x\oplus a)-(x\otimes a)}\geqslant 0$，得 $P(x,\sqrt{(x\oplus a)-(x\otimes a)})$ 的轨迹方程为 $y^2=4ax\quad(y\ge 0)$.

（2）由已知可得 $\begin{cases}y^2=4ax\\y=\frac{1}{2}x+1\end{cases}$， 整理得 $x^2+(4-16a)x+4=0$，

由 $\Delta=(4-16a)^2-16=16^2a^2-8\times16a\ge0$ ，得 $a\ge\frac{1}{2}$ 或 $a\le0$. ∵ $a>0$，∴ $a\ge\frac{1}{2}$.

∴ $\sqrt{(x_1\otimes x_2)+(y_1\otimes y_2)}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\frac{\sqrt5}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt5}{2}\sqrt{(4-16a)^2-16}=8\sqrt{15}$，解得 $a=2$.

13. 解：（1）设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)+2$，代入 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$，得

$(2-k^2)x^2-2k(2-k)x-(2-k)^2-2=0$ ①，记 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 x_1,x_2 是方程①的两个不同的根，所以 $2-k^2\ne0$，且 $x_1+x_2=\dfrac{2k(2-k)}{2-k^2}$，由 $N(1,2)$ 是 AB 的中点，得 $k=1$. 故直线 AB 的方程为 $y=x+1$.

（2）将 $k=1$ 代入方程①，得 $A(-1,0)$、$B(3,4)$，由 CD 垂直平分 AB，得直线 CD 的方程为 $y=3-x$，代入双曲线方程，得 $x^2+6x-11=0$ ②，记 $C(x_3,y_3)$、$D(x_4,y_4)$，以及 CD 的中点为 $M(x_0,y_0)$，则 x_3,x_4 是方程②的两个根，故 $x_3+x_4=-6$， $x_3x_4=-11$，从而 $x_0=\frac{1}{2}(x_3+x_4)=-3$， $y_0=3-x_0=6$，从而

$|CD|=\sqrt2|x_3-x_4|=\sqrt2\sqrt{(x_3+x_4)^2-4x_3x_4}=4\sqrt{10}$，$\therefore|MC|=|MD|=\frac{1}{2}|CD|=2\sqrt{10}$.

又 $|MA|=|MB|=\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2}=\sqrt{4+36}=2\sqrt{10}$.

即 A、B、C、D 四点到点 M 的距离相等，所以 A、B、C、D 四点共圆.

14. 解：设元件 T_1、T_2、T_3 能正常工作的事件为 A_1、A_2、A_3，电路不发生故障的事件为 A，则 $P(A_1)=0.7$，$P(A_2)=0.8$，$P(A_3)=0.9$.

（1）按图甲的接法求 $P(A)$：$A=(A_1+A_2)\cdot A_3$，由 A_1+A_2 与 A_3 相互独立，则 $P(A)=P(A_1+A_2)\cdot P(A_3)$

又 $P(A_1+A_2)=1-P(\overline{A_1+A_2})=1-P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2})$ 由 A_1 与 A_2 相互独立知 $\overline{A_1}$ 与 $\overline{A_2}$ 相互独立，得：

$P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2})=P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})=[1-P(A_1)]\cdot[1-P(A_2)]=(1-0.7)\times(1-0.8)=0.06$，

$\therefore P(A_1+A_2)=1-P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2})=1-0.06=0.94$， $\therefore P(A)=0.94\times0.9=0.846$.

(2)按图乙的接法求 P（A）：A=（A_1+A_3）•A_2 且 A_1+A_3 与 A_2 相互独立，则 P（A）=P（A_1+A_3）•P（A_2），用另一种算法求 P（A_1+A_3）.∵A_1 与 A_3 彼此不互斥，根据容斥原理

P（A_1+A_3）=P（A_1）+P（A_3）－P（A_1A_3），

∵A_1 与 A_3 相互独立，则 P（A_1•A_3）=P（A_1）•P（A_3）=0.7×0.9=0.63,$P(A_1+A_3)$=0.7+0.9－0.63=0.97.

∴$P(A)=P(A_1+A_3)\cdot P(A_2)$=0.97×0.8=0.776.

(3)按图丙的接法求 P（A），用第三种算法. A=（A_2+A_3）A_1=A_2A_1+A_3A_1,

∵A_2A_1 与 A_3A_1 彼此不互斥，据容斥原理，则 P（A）=P（A_1A_2）+P（A_1A_3）－P（$A_1A_2A_3$），

又由 A_1、A_2、A_3 相互独立，得 P（A_1•A_2）=P（A_1）P（A_2）=0.8×0.7=0.56,

$P(A_3A_1)=P(A_3)\cdot P(A_1)$=0.9×0.7=0.63,　$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)$=0.7×0.8×0.9=0.504,

∴$P(A)$=0.56+0.63－0.504=0.686.

综合（1）、（2）、（3）得，图甲、乙、丙三种接法电路不发生故障的概率值分别为 0.846,0.776,0.686.

故图甲的接法电路不发生故障的概率最大.

15 解：（1）设$\overrightarrow{OM}=(x,y),\overrightarrow{OT}=(0,a),\overrightarrow{OQ}=(b,0)$，∵ $NT\perp TQ$，　$\therefore b\geq 0$，

则$\overrightarrow{NT}=(4,a),\overrightarrow{TQ}=(b,-a)$, 又$\overrightarrow{NT}\cdot\overrightarrow{TQ}=0,\ \therefore a^2=4b$ ①

又$\because \overrightarrow{QM}=(x-b,y),\overrightarrow{TM}=(x,y-a),\ \overrightarrow{TM}=2\overrightarrow{QM}$　$\therefore\begin{cases}x=2b\\y=-a\end{cases}$ ②.　由①②，得 $y^2=2x\ (x\geq 0)$.

（2）证明：若直线 l 与 x 轴不垂直，设其斜率为 k，则直线 l 的方程为 $y=k(x-\frac{1}{2})$，

设 $A(x_1,y_1)$，B（x_2,y_2）则$|\overrightarrow{OA_1}|=x_1,|\overrightarrow{OA_2}|=x_2$，　∵ $F(\frac{1}{2},0)$ ∴$|\overrightarrow{OF}|=\frac{1}{2}$，

由$\begin{cases}y=k(x-\frac{1}{2})\\y^2=2x\end{cases}$，消去 y 得 $k^2x^2-(k^2+2)x+\frac{k^2}{4}=0$　∴ $x_1x_2=\frac{1}{4}$，　∴$|\overrightarrow{OF}|^2=|\overrightarrow{OA_1}|\cdot|\overrightarrow{OA_2}|$.

若直线 l 与 x 轴垂直，则 A_1、A_2 与 F 重合，　这时 $x_1=x_2=\frac{1}{2}$，也有$|\overrightarrow{OF}|^2=|\overrightarrow{OA_1}|\cdot|\overrightarrow{OA_2}|=\frac{1}{4}$.

综上知$\left|\overrightarrow{OF}\right|$是$\left|\overrightarrow{OA_1}\right|$和$\left|\overrightarrow{OA_2}\right|$的等比中项.

（3）假设对于该抛物线，存在一条不垂直于 x 轴的弦 CD，取该弦 CD 的中点 H，有 $\overrightarrow{FH}\perp\overrightarrow{CD}$.

设 $C(\frac{c^2}{2},c),D(\frac{d^2}{2},d)\ (c\neq d)$，则 C、D 中点 H 的坐标为 $(\frac{c^2+d^2}{4},\frac{c+d}{2})$，

故 $\overrightarrow{FH}=(\frac{c^2+d^2}{4}-\frac{1}{2},\frac{c+d}{2})$，$\overrightarrow{DC}=(\frac{c^2-d^2}{2},c-d)$.

由 $\overrightarrow{FH}\perp\overrightarrow{CD}$，有 $\overrightarrow{FH}\bullet\overrightarrow{DC}=(\frac{c^2+d^2}{4}-\frac{1}{2})\frac{c^2-d^2}{2}+\frac{c^2-d^2}{2}=0$，则 $\frac{c^2+d^2}{4}+\frac{1}{2}=0$，明显不成立.

所以,假设不成立,故对于该抛物线,不存在一条不垂直于 x 轴的弦 CD,取该弦 CD 的中点 H,有 $\overrightarrow{FH}\perp\overrightarrow{CD}$.

第 14 练　课标新增内容探讨

【第 14 练】 1～5　ABBCD;　6. $\frac{1}{4}$;

7. 84;　8. 3.152.

9. 解：由联立方程组$\begin{cases}y=x^2\\y=x+2\end{cases}$，求得交点坐标为（－1，1）及（2，4).

$\therefore A=\int_{-1}^{2}[(x+2)-x^2]dx=[\frac{1}{2}(x+2)^2-\frac{x^3}{3}]|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$

10. 解：$K^2=\frac{105\times(10\times 30-20\times 45)^2}{55\times 50\times 30\times 75}.\approx 6.109>5.024$，而 $P(K^2\geq 5.024)\approx 0.025$，

所以有约 97.5%以上的把握认为药物有效

11. 解：【分析法】：$\frac{1}{a}+\frac{4}{1-a}\geq 9\Leftarrow\frac{1+3a}{a(1-a)}\geq 9\Leftarrow\begin{cases}0<a<1\\1+3a\geq 9a(1-a)\Leftarrow(3a-1)^2\geq 0\end{cases}$

【反证法】：假设 $\frac{1}{a}+\frac{4}{1-a}<9$，通分得 $\frac{1+3a}{a(1-a)}<9$.

∵ $0<a<1$， ∴ $1+3a<9a(1-a)$， 整理得 $(3a-1)^2<0$，这与平方数不小于 0 矛盾.

∴ 假设不成立， 则 $\frac{1}{a}+\frac{4}{1-a}\geq 9$.

【综合法】：由 $(3a-1)^2\geq 0$，变形得 $1+3a\geq 9a(1-a)$.

∵ $0<a<1$， ∴ $\frac{1+3a}{a(1-a)}\geq 9$， 即 $\frac{1}{a}+\frac{4}{1-a}\geq 9$

12. 解：本题可用二分法解决，$x_1=2, x_2=3, m=\frac{x_1+x_2}{2}$. 步骤如下：

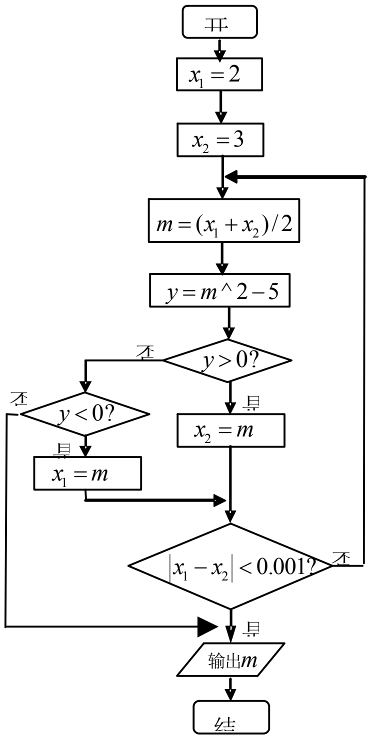
第一步：$x_1=2, x_2=3;$

第二步：$m=\frac{x_1+x_2}{2}$；

第三步：计算 $f(m)=0$，如果 $f(m)=0$，则输出 m；如果大于 0，则 $x_2=m$，否则 $x_1=m$；

第四步：判断 $|x_2-x_1|<0.001或f(m)=0$，如果不成立，则转到第二步.

程序框图如图所示：

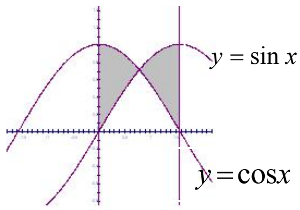


13. 解：解方程组：$\begin{cases} y=\sin x \\ y=\cos x \end{cases}$， 得： $x=k\pi+\frac{\pi}{4}\ (k\in Z)$.

又 ∵ $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$， ∴ $x=\frac{\pi}{4}$.

∴ $S=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx=2(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos xdx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin xdx)$

$=2[\sin x|_0^{\frac{\pi}{4}}-(-\cos x|_0^{\frac{\pi}{4}})]=2\sqrt{2}-1$.



14. 解：（1）n=2 时，由 $af(2)-bf(1)=1$ 及 $f(1)=0$，解得 $f(2)=\frac{1}{a}$.

当 n=3 时，由 $af(3)-bf(2)=1$ 及 $f(2)=\frac{1}{a}$，解得 $f(3)=\frac{a+b}{a^2}$.

当 n=4 时，由 $af(4)-bf(3)=1$ 及 $f(3)=\frac{a+b}{a^2}$，解得 $f(4)=\frac{a^2+ab+b^2}{a^3}$.

当 n=5 时，由 $af(5)-bf(4)=1$ 及 $f(4)=\frac{a^2+ab+b^2}{a^3}$，解得 $f(5)=\frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{a^4}$.

（2）猜测 $f(n)=\frac{a^{n-2}+a^{n-3}b+\cdots+ab^{n-3}+b^{n-2}}{a^{n-1}}\quad(n\geq 2)$.

Ⅰ 当 n=2 时，由上可知猜测成立.

Ⅱ 假设当 $n=k\ (k\geqslant 2)$猜测成立，即 $f(k)=\frac{a^{k-2}+a^{k-3}b+\cdots+ab^{k-3}+b^{k-2}}{a^{k-1}}$.

当 $n=k+1$ 时， $af(k+1)-bf(k)=1$.

则 $f(k+1)=\frac{1}{a}[bf(k)+1]=\frac{1}{a}[\frac{a^{k-2}b+a^{k-3}b^2+\cdots+ab^{k-2}+b^{k-1}}{a^{k-1}}+1]=\frac{a^{k-1}+a^{k-2}b+a^{k-3}b^2+\cdots+ab^{k-2}+b^{k-1}}{a^k}$.

∴ 当 $n=k+1$ 时，猜测成立.

综上所述，当 $n\geq 2$ 时， $f(n)=\frac{a^{n-2}+a^{n-3}b+\cdots+ab^{n-3}+b^{n-2}}{a^{n-1}}$.

15. 解：每个点落入 M 中的概率均为 $p=\frac{1}{4}$. 依题意知 $X\sim B\left(10000,\frac{1}{4}\right)$.

（1） $EX=10000\times\frac{1}{4}=2500$.

（2）依题意所求概率为 $P\left(-0.03<\dfrac{X}{10000}\times 4-1<0.03\right)$，

$$P\left(-0.03<\frac{X}{10000}\times 4-1<0.03\right)=P(2425<X<2575)=\sum_{t=2426}^{2574}C_{10000}^{t}\times 0.25^{t}\times 0.75^{10000-t}$$

$$=\sum_{t=2426}^{2574}C_{10000}^{t}\times 0.25^{t}\times 0.75^{10000-t}-\sum_{t=0}^{2425}C_{10000}^{t}\times 0.25^{t}\times 0.75^{10000-1}=0.9570-0.0423=0.9147.$$

第 15 练　选择、填空题解法

【第 15 练】 1～5　AADBC；　　6. $f(2)<f(10)<f(4)$；　7. 16；　8. $a_n=\begin{cases}6(n=1),\\ 6n-1(n\geq 2).\end{cases}$

9．解：二项式中含有 $\sqrt{3}$，似乎增加了计算量和难度，但如果设 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=a=(2+\sqrt{3})^4$，$a_0-a_1+a_2-a_3+a_4=b=(2-\sqrt{3})^4$，则待求式子 $=ab=[(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})]^4=1$.

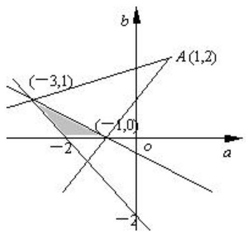
10. 解：（1）依题意可计算 $V_{E-ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}\cdot h=\dfrac{1}{3}\times 3\times 3\times 2=6$，而 $V_{ABCDEF}>V_{E-ABCD}$＝6，故选 D.

（2）法一：取特殊值 a＝3, b＝4, c＝5 ,则 cosA＝$\dfrac{4}{5}$, cosC＝0, $\dfrac{\cos A+\cos C}{1+\cos A\cos C}=\dfrac{4}{5}$.

法二：取特殊角 $A=B=C=60^0$　$\cos A=\cos C=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\cos A+\cos C}{1+\cos A\cos C}=\dfrac{4}{5}$.

11. 解：（1）选项暗示我们，只要判断出直线的条数就行，无须具体求出直线方程. 以 A（1，2）为圆心，1 为半径作圆 A，以 B（3，1）为圆心，2 为半径作圆 B. 由平面几何知识易知，满足题意的直线是两圆的公切线，而两圆的位置关系是相交，只有两条公切线. 故选 B.

（2）因 $|2\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，故向量 $2\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 所对应的点 A、B 都在以原点为圆心，2 为半径的圆上，从而 $|2\vec{a}-\vec{b}|$ 的几何意义即表示弦 AB 的长，故 $|2\vec{a}-\vec{b}|$ 的最大值为 4.



（3）$f'(x)=x^2+ax+2b$，令 $f'(x)=0$，由条件知，上述方程应满足：一根在（0，1）之间，另一根在（1，2）之间，∴ $f'(1)<0, f'(0)>0, f'(2)>0$，得 $a+2b+1<0, b>0, a+b+2>0$，在 aOb 坐标系中，作出上述区域如图所示，而 $\dfrac{b-2}{a-1}$ 的几何意义是过两点 $P(a，b)$与 $A(1,2)$的直线斜率，而 $P(a，b)$在区域内，由图易知 $k_{PA}\in(\dfrac{1}{4},1)$.

12. 解：(1)对已知递推式两边取倒数，得 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{3a_n+1}{a_n}$，即 $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=3$．这说明数列 $\{\dfrac{1}{a_n}\}$ 是以 $\dfrac{1}{a_1}=1$ 为首项, 3 为公差的等差数列，从而有 $\dfrac{1}{a_{34}}=\dfrac{1}{a_1}+33d=100$，即 $a_{34}=\dfrac{1}{100}$，故应选 B.

（2）凸多面体是 n 棱锥，共有 $(n+1)$ 个顶点，所以可以确定的直线有 $C_{n+1}^2=(n+1)n/2$ 条.在这些直线中，每条侧棱与底面上不过此侧棱的端点直线异面，所以 $f(4)=4\times C_{4-1}^2=12$，$f(n)=n\times C_{n-1}^2=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2}$.

13. 解：（1）题设中数字所标最大通信量是限制条件，每一支要以最小值来计算，否则无法同时传送，则总数为 3+4+6+6=19，故选 D.

（2）由于 $\tan(x+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$，从而函数 $f(x)$ 的一个背景为正切函数 tanx，取 $a=\dfrac{\pi}{4}$，可得必有一周期为 $4a$．故选 C.

14. 解：（1）某人每次射中的概率为 0.6，3 次射击至少射中两次属独立重复实验.

$C_3^2\times(\dfrac{6}{10})^2\times\dfrac{4}{10}+C_3^3\times(\dfrac{6}{10})^3=\dfrac{27}{125}$，故选 A.

(2) $(x+2)^{10}(x^2-1)=(C_{10}^0x^{10}+2C_{10}^1x^9+4C_{10}^2x^8+\cdots+C_{10}^{10}2^{10})(x^2-1)$，

得展开式中 x^{10} 的系数为 $-C_{10}^0+4C_{10}^2$=179.

15. 解：（1）$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=\dfrac{\lg(x_1x_2)}{2}=C$，从而对任意的 $x_1\in[10,100]$，存在唯一的 $x_2\in[10,100]$，使得

x_1,x_2 为常数．充分利用题中给出的常数 10，100．令 $x_1x_2=10\times100=1000$，当 $x_1\in[10,100]$ 时，$x_2=\frac{1000}{x_1}\in[10,100]$，由此得 $C=\frac{\lg(x_1x_2)}{2}=\frac{3}{2}$．故选 A.

（2）由 $x\in[1,12]$，得 $x+\frac{25}{x}+|x^2-5x|\geq a$．$\therefore x+\frac{25}{x}\geq2\sqrt{x\bullet\frac{25}{x}}=10$，当且仅当 $x=\frac{25}{x}$ 即 $x=5$ 时取等号；又 $|x^2-5x|\geq0$，当且仅当 $x=5$ 时取等号．$\therefore x+\frac{25}{x}+|x^2-5x|\geq10+0=10$，则 a 的取值范围是 $a\leq10$．

第 16 练 综合题的解法

【第 16 练】 1～5 BAACC； 6. 3； 7. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$； 8. $3x-y-11=0$； 9. 14.

10. 解：$y=(\sin^2x+\cos^2x)(\sin^2x-\cos^2x)+2\sqrt{3}\sin x\cos x=-\cos2x+\sqrt{3}\sin2x$

$=2(-\frac{1}{2}\cos2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$．

∴ 最小正周期 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$， 最小值为－2.

∵ $0\leq x\leq\pi$， ∴ $-\frac{\pi}{6}\leq2x-\frac{\pi}{6}\leq\frac{11\pi}{6}$．当 $-\frac{\pi}{6}\leq2x-\frac{\pi}{6}\leq\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}\leq2x-\frac{\pi}{6}\leq\frac{11\pi}{6}$ 时，正弦函数单调递增.

∴ $0\leq x\leq\frac{\pi}{3}$，或 $\frac{5\pi}{6}\leq x\leq\pi$． 即函数在 $[0,\pi]$ 的单调递增区间为 $[0,\frac{\pi}{3}]$、$[\frac{5\pi}{6},\pi]$．

11. 解：（1）由 $f(x)$ 的图象经过 P（0，2），知 d=2，所以 $f(x)=x^3+bx^2+cx+2,\ f'(x)=3x^2+2bx+c.$
由在点 M 处的切线方程是 $6x-y+7=0$，知 $f'(-1)=6$，M（－1，－1）．

∴ $\begin{cases}3-2b+c=6\\-1+b-c+2=1\end{cases}$，即 $\begin{cases}2b-c=3\\b-c=0\end{cases}$，解得 $b=c=-3$．故所求的解析式是 $f(x)=x^3-3x^2-3x+2.$

（2）$f'(x)=3x^2-6x-3.$ 令 $3x^2-6x-3=0,$ 即 $x^2-2x-1=0.$

解得 $x_1=1-\sqrt{2},x_2=1+\sqrt{2}.$ 当 $x<1-\sqrt{2},$ 或 $x>1+\sqrt{2}$ 时, $f'(x)>0;$ 当 $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$ 时, $f'(x)<0.$

故 $f(x)=x^3-3x^2-3x+2$ 在 $(-\infty,1-\sqrt{2})$ 内是增函数，在 $(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$ 内是减函数，在 $(1+\sqrt{2},+\infty)$ 内是增函数.

12. 解：（1）由已知可得点 A(－6,0),F(0,4). 设点 $P(x,y)$,则 $\overrightarrow{AP}=\{x+6,\ y\},\overrightarrow{FP}=\{x-4,\ y\}$,由已知可得

$\begin{cases}\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1\\(x+6)(x-4)+y^2=0\end{cases}$， 则 $2x^2+9x-18=0$, 解得 $x=\frac{3}{2}$ 或 $x=-6$.

由于 $y>0$，只能 $x=\frac{3}{2}$,于是 $y=\frac{5\sqrt{3}}{2}$． ∴点 P 的坐标是 $(\frac{3}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2})$.

（2）直线 AP 的方程是 $x-\sqrt{3}y+6=0$. 设点 $M(m,0)$，则 M 到直线 AP 的距离是 $\frac{|m+6|}{2}$．

于是 $\frac{|m+6|}{2}=|m+6|$，又－6≤m≤6，解得 m=2.

椭圆上的点(x,y)到点 M 的距离 d 有 $d^2=(x-2)^2+y^2=x-4x^2+4+20-\frac{5}{9}x^2=\frac{4}{9}(x-\frac{9}{2})^2+15$，

由于－6≤m≤6, ∴当 $x=\frac{9}{2}$ 时，d 取得最小值 $\sqrt{15}$．

13. 解法一（几何法）：（1）由已知 $V_{P-BGC}=\frac{1}{3}S_{\Delta BCG}\cdot PG=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}BG\cdot GC\cdot PG=\frac{8}{3}$，∴$PG$=4.
作 $CH\perp AD$ 于 H，连接 PH，则 $CH\perp$ 平面 PAD，所以∠PCH 为所求.

∵ $PC=\sqrt{PG^2+GC^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，$CH=GE=\sqrt{2}$，∴ $\cos\angle PCH=\frac{CH}{PC}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$．

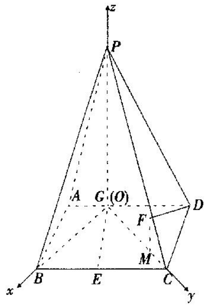
（2）过 F 点作 $FM\perp GC$ 于 M，连接 MD. 则 $GC\perp MD$.

∵ $AD=BC=2\sqrt{2}$，$GH=\sqrt{2}$，$GD=\frac{3}{4}AD=\frac{3}{2}\sqrt{2}$，$\angle CGD=45°$，$GM=\frac{3}{2}$． ∴ $\frac{PF}{FC}=\frac{GM}{MC}=3$

解法二（向量法）：（1）由已知 $V_{P-BGC}=\frac{1}{3}S_{\Delta BCG}\cdot PG=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}BG\cdot GC\cdot PG=\frac{8}{3}$，∴$PG=4$.

如图所示，以 G 点为原点建立空间直角坐标系 o—xyz，则 B（2，0，0），C（0，2，0），P（0，0，4）

故 E（1，1，0），$\overrightarrow{GE}=(1,1,0),\overrightarrow{PC}=(0,2,-4)$，



$\cos<\overrightarrow{GE},\overrightarrow{PC}>=\frac{\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{GE}|\cdot|\overrightarrow{PC}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

（II）设 F（0，y，z），则 $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OD}=(0,y,z)-(-\frac{3}{2},\frac{3}{2},0)=(\frac{3}{2},y-\frac{3}{2},z),\ \overrightarrow{GC}=(0,2,0)$

$\because \overrightarrow{DF}\perp\overrightarrow{GC},\therefore \overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{GC}=0,\therefore (\frac{3}{2},y-\frac{3}{2},0)\cdot(0,2,0)=2(y-\frac{3}{2})=0,\therefore y=\frac{3}{2}$

在平面 PGC 内过 F 点作 $FM\perp GC$，M 为垂足，则 $GM=\frac{3}{2},MC=\frac{1}{2}$，$\therefore\frac{PF}{FC}=\frac{GM}{MC}=3$.

14. 解：（1）设甲进一球，乙一球没进为事件 A，甲进两球，乙进一球设为事件 B.

则 $P(A)=(C_2^1\times0.7\times0.3)\times0.2^2=0.0168$，$P(B)=0.7^2\times C_2^1 0.8\times0.2=0.1568$.

所以甲比乙多进一球的概率 $P=P$（A+B）=P（A）+P（B）=0.1736 .

（2）设 ξ 为甲得分期望，η 为乙得分期望，则

ξ	0	2	4
P	0.09	0.42	0.49

η	0	2	4
P	0.04	0.32	0.64

∴ $E_\xi=2.8$， $E_\pi=3.2$，则两人得分的期望值为 6.

15. 解：（1）由题意，得 $A_1(1,0),C_1:y=x^2-7x+b_1$.

设点 $P(x,y)$ 是 C_1 上任意一点，则 $|A_1P|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+(x^2-7x+b_1)^2}$.

令 $f(x)=(x-1)^2+(x^2-7x+b_1)^2$, 则 $f'(x)=2(x-1)+2(x^2-7x+b_1)(2x-7)$.

由题意，得 $f'(x_2)=0$, 即 $2(x_2-1)+2(x_2{}^2-7x_2+b_1)(2x_2-7)=0$.

又 $P_2(x_2,2)$ 在 C_1 上，$\therefore 2=x_2{}^2-7x_2+b_1$，解得 $x_2=3,b_1=14$. 故 C_1 方程为 $y=x^2-7x+14$.

（2）设点 $P(x,y)$ 是 C_n 上任意一点，则 $|A_nP|=\sqrt{(x-x_n)^2+(x^2+a_nx+b_n)^2}$，

令 $g(x)=(x-x_n)^2+(x^2+a_nx+b_n)^2$，则 $g'(x)=2(x-x_n)+2(x^2+a_nx+b_n)(2x+a_n)$.

由题意得 $g'(x_{n+1})=0$，即 $2(x_{n+1}-x_n)+2(x_{n+1}{}^2+a_nx_{n+1}+b_n)(2x_{n+1}+a_n)=0$

又 $\because 2^n=x_{n+1}{}^2+a_nx_{n+1}+b_n$，$\therefore (x_{n+1}-x_n)+2^n(2x_{n+1}+a_n)=0(n\ge1)$. 即 $(1+2^{n+1})x_{n+1}-x_n+2^na_n=0$ （*）

下面用数学归纳法证明 $x_n=2n-1$： ①当 n=1 时， $x_1=1$, 等式成立.

②假设当 n=k 时，等式成立，即 $x_k=2k-1$, 则当 $n=k+1$ 时，由（*）知 $(1+2^{k+1})x_{k+1}-x_k+2^ka_{k=0}$

又 $a_k=-2-4k-2^{\frac{1}{k-1}}$， $\therefore x_{k+1}=\frac{x_k-2^ka_k}{1+2^{k+1}}=2k+1$. 即当 $n=k+1$ 时，等式成立.

由①②知，等式对 $n\in N$ 成立. $\therefore\{x_n\}$ 是等差数列.

封面设计：陆镜平