目录

第一部分 极限与连续

一、求极限

1、$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x-3}$

2、$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

3、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$

4、$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

5、$\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}$

6、$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sin x+3x}{\sin x-2x}$

7、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+n+1}-n^2\right)(n+2)$

8、$\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$

9、$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-3x}{x+\sin x}$

10、$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$

11、$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

12、数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$的值为

$A.0$；　$B.\dfrac{1}{2}$；　$C.1$；　$D.$ 不存在.

13、下列极限计算正确的是

A；$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}=1$；　**B** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}=1$；

C $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=0$；　**C** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n=e^2$

14、下列极限中存在的是

$A.\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$； $B.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$； $C.\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$； $D.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2^x-1}$

15、$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

二、求极限

1、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}+x\sin\dfrac{3}{x}\right)$

2、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$

3、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

4、$\lim\limits_{x\to 0}(x\cot x)$

5、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

6、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$

7、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^n\sin\dfrac{x}{2^n}\right)$

8、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$

9、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$

10、$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}$

11、$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\tan^2 x\right)^{\cot^2 x}$

12、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

13、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$

14、极限$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}=(\quad)$

$A.1\quad B.0\quad C.-1\quad D.\ \infty.$

三、求极限

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$

2、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

3、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^n}{\sin^m x}$

4、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x\ln(1+2x)}$

5、设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{\arctan^2 x}=2$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=2$

6、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\ln(1+2x)}{e^x+\sqrt{1-x}-2}$

7、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$

8、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[3]{1-2x}-1)x}{\sqrt{1+x^2}-1}$

9、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$

10、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sec x+\tan x)}{\sin x}$.

11、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}\right)$

四、概念与定理相关

1、$x=0$是函数$f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$的__________间断点

2、已知函数$f(x)=\begin{cases}ke^{2x}, & x<0\\ 1+\cos x, & x\geq 0\end{cases}$，当$k=$_____时，函数$f(x)$在$x=0$处连续

3、$f(x)=2^x+3^x-2$，当$x\to 0$时　（　　）

A．$f(x)\sim x$

B．$f(x)$是x的同阶但非等价的无穷小

C．$f(x)$ 是 x 的高阶无穷小　　D．$f(x)$ 是 x 的低阶无穷小

4、下列说法正确的是

A．若 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续

B．若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处连续

C．若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某一领域内连续

D．若 $\lim\limits_{h\to 0}\big(f(a+h)-f(a-h)\big)=0$，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续

5、$f(x)$在点x_0处有定义是极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的

A. 必要条件;　　*B.* 充分条件;

C. 充分必要条件;　　*D.* 既非必要又非充分条件.

6、若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$（$A$为常数），则当$x\to x_0$时，函数$f(x)-A$是

A. 无穷大量；　　*B.* 无界，但非无穷大量；

C. 无穷小量；　　*D.* 有界，而未必为无穷小量．

7、设有两命题：

命题"a"：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$存在，且$g(x_0)\neq 0$，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$;

命题"b"：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$不存在。则$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$必不存在。

则

A."a","b"都正确；　　*B.*"a"正确,"b"不正确；

C."a"不正确,"b"正确；　　*D.*"a","b"都不正确。

8、当$x\to 0$时，$2\sin x(1-\cos x)$与x^2比较是（　）

A. 同阶但不等价无穷小；　　*B.* 等价无穷小；

C. 高阶无穷小；　　*D.* 低阶无穷小.

9、$\lim\limits_{x\to x_0^-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-0}f(x)=a$，是函数$f(x)$在$x=x_0$处连续的（　　）

A. 充分条件　*B.* 必要条件

C. 充分必要条件　*D.* 既非充分又非必要条件

10、函数$y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$的间断点为$x=1$、$2$，则此函数间断点的题型为（　　）

A x=1,2 都是第一类间断点； **B** x=1,2 都是第二类；
C x=1 是第二类，x=2 是第一类； D x=1 是第一类，x=2 是第二类；

11、下列叙述不正确的是（ ）

A. 无穷小量与无穷大量的商为无穷小量；
B. 无穷小量与有界量的积是无穷小量；
C. 无穷大量与有界量的积是无穷大量；
D. 无穷大量与无穷大量的积是无穷大量。

12、$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+4e^{-x}}{3e^x+2e^{-x}}=$（ ）

$A.\dfrac{1}{3}$ $B.2$ $C.1$ $D.$ 不存在

五、连续性

1、设函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0,\\ A, & x=0,\\ x\sin\dfrac{1}{x}+B, & x>0,\end{cases}$ 问：A,B 取何值时，函数 $f\left(x\right)$ 在整个实轴上连续。

2、设 $f\left(x\right)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ a+x^2, & x\le 0,\end{cases}$。问如何选择常数 a 可使函数 $f\left(x\right)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续。

3、设 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\arcsin 2x^2+e^{ax^2}-1}{\ln\left(1+2x^2\right)}, & x\ne 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求常数 a

4、求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x-1)x}$ 的间断点，并判断其类型

5、求函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\left(x+1\right)\sin x}{|x|\left(x^2-2x-3\right)}$ 的间断点，并判定类型。

六、极限的反问题

1、设 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+bx+a}{1-x}=5$，则 a=_________, b=_________

2、已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=9$，则 $a=$__________

3、已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^{2015}}{(x-1)^k-x^k}=C(\ne 0,\infty)$，求常数 k,C

4、设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x+1}-ax^2-bx-c\right)=2$，求常数$a,b,c$

5、设当$x\to 0$，$\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}\sim k\sin^2 x$，求常数$k$

七、有关闭区间上连续函数的性质

1、证明方程$x^5-3x=1$至少有一个根介于 1 和 2 之间。

2、证明方程$\sin x+x+1=0$在开区间$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$内至少有一个根。

3、设$f\left(x\right)$在[a,b]上连续，且在[a,b]上的值域也为[a,b]。证明存在$\xi\in\left[a,b\right]$使得$f(x)=x$成立。

第二部分　导数与微分

一、导数的概念

1. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{f\left(x_0-2h\right)-f(x_0)}=\dfrac{1}{4}$，则 $f'(x_0)$ 等于（ ）

A. -4　　**B.** -2　　**C.** 2　　**D.** 4

2. 设 $f(x)$ 可导，常数 $a\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n[f(x-\dfrac{a}{n})-f(x)]=$（　　）

A a；　　**B** $-a$；　　**C** $af'(x)$；　　**D** $-af'(x)$；

3. 设 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+k\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{1}{3}f'(x_0)$，其中 $f'(x_0)\neq 0$，则 $k=$______

4. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个领域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是（　）

A　$\lim\limits_{h\to+\infty} h[f(a+\dfrac{1}{h})-f(a)]$ 存在　　B　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

C　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在　　D　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

5. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[f(x)-f(0)]\sin 3x}{x^2}=4$，则 $f'(0)$ 等于（ ）

A. 3　　**B.** $\dfrac{4}{3}$　　**C.** $\dfrac{3}{4}$　　**D.** 4

6. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，则下列命题不正确的是（ ）

A. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$　　**B.** $f(0)=0$　　**C.** $f'(0)=0$　　**D.** $f'(0)=1$

7. 若 $f'(x_0)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0 f(x)}{x-x_0}=$________；

8. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^3}{3}, & x\leq 1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处（ ）

A 左、右导数均存在；　　**B** 左导数存在，右导数不存在；

C 左导数不存在，右导数存在；　　**D** 左、右导数都不存在；

9. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}\sin^2 x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，则 $f'(0)=$_____

10. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则 $f(x)$ 在点 x_0 处（　　）

A 必无定义；　　**B** 必无极限；　　**C** 必不可导；　　**D** 必可导

11. 若 $f(x)=\begin{cases} ae^{2x}, & x<0 \\ 2-bx, & x\ge 0 \end{cases}$,在 $x=0$ 处可导,则常数 $a=$ ________, $b=$ __________；

12. 设函数 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-99)(x-100)$，则 $f'(0)=$（　　　）

A 100；　　B -100；　　C $100!$；　　D $-100!$

13. 曲线 $y=e^x$ 在 $(0,1)$ 处的切线方程为________________

14. 设曲线 $y=x^2+x-2$ 在点 P 处的切线的斜率等于 3，则 P 点的坐标为_________；

二、求导数

1. 求 $y=x^3+\dfrac{7}{x^4}-\dfrac{1}{x}+12$ 的导数

2. 求 $y=5x^3-2^x+3e^x$ 的导数

3. 求 $y=2\tan x+\sec x-1$ 的导数

4. 求 $y=x^2\ln x$ 的导数

5. 求 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 的导数

6. 求 $y=x^2\ln x\cos x$ 的导数

7. 求 $y=\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}$ 的导数

三、求导数

1. 设 $f(\dfrac{1}{x^2})=\tan x^4$,则 $f'(x)=$ ___________；

2. 设 $y=f(\cos x)+\sin[f(x)]$，其中 f 可微，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ ________________；

3. 设 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处具有连续导数，且 $f'(1)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{d}{dx}f(\cos\sqrt{x})$ 为（　　　）

A -1；　　**B** $-\dfrac{1}{2}$；　　**C** 2；　　**D** 1

4. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导且 $f'(0)=\dfrac{1}{3}$,又对任意 x 有 $f(3+x)=3f(x)$,则 $f'(3)=$（　）

A 3；　　**B** $\dfrac{1}{3}$；　　**C** 1；　　**D** 0

5. 求 $y=\arctan e^x$ 的导数

6. 求 $y=\arcsin\sqrt{x}$ 的导数

7. 求 $y=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$的导数

8. 求 $y=\ln(\sec x+\tan x)$的导数

9. 求 $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$ 的导数

10. 求 $y=e^{\arctan\sqrt{x}}$ 的导数

11. 求 $y=\ln\ln\ln x$ 的导数

12. 求 $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ 的导数

13. $y=\ln[\cos(10+3x^2)]$，求y'

14. 函数 $f(x)=\ln|x-1|$ 的导数是（　　）

A $f'(x)=\dfrac{1}{|x-1|}$　　B $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$

C $f'(x)=\dfrac{1}{1-x}$　　D $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & x<1\\ \dfrac{1}{1-x} & x>1\end{cases}$

15. 设 $y=f\left(e^x\right)\cdot e^{f(x)}$，其中 $f'(x)$存在，求 y'

四、求导数

1. 设 $y=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $x^2y''+3xy'+\dfrac{\ln x}{x}=$ ________

2. 设 $f(u)$ 可导，若 $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$，试求$\dfrac{dy}{dx}$

3. 设 $y=e^{f(x)}\cdot f(\sin 2x)+\ln 2$， $f(x)$ 可导且 $f(0)=0, f'(0)=1$，求$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$

4. 求 $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$ 的导数

5. 求 $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$ 的导数

6. 已知 $y=(\tan x)^{\sin x}$ 求 y'

7. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $x^y=y^x$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$

8. 求 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程

9. 求 $x^3+y^3-3axy=0$ 确定的隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$

10. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}+\cos(xy)=0$ 确定, 则 $\dfrac{dy}{dx}=$______.

11. 设 y 为 x 的函数是由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$ 确定的, 求 y'

12. 曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2\sqrt{a}(a>0)$ 在点 (a,a) 处的切线方程是（　　　）

（A）　$x-y-2a=0$；　　（B）$x+y-2a=0$；

（C）$x-y-2\sqrt{a}=0$；　　（D）$x+y-2\sqrt{a}=0$

13. 设 $y=f(x)$ 由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定, 则曲线 $y=f(x)$ 在点(0, 1)处的法线方程为______.

14. 设参数方程 $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=\arctan t \end{cases}$, 求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=1}$

15. 求由参数方程 $\begin{cases} y=e^t\sin t, \\ x=e^t\cos t, \end{cases}$ 所确定函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$

16. 函数 $\begin{cases} x=t\cdot e^t \\ y=\ln\left(2-e^t\right) \end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线方程为______________

五、高阶导数与微分

1. 下列结论不正确的是（　　　）

A 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处可微；

B $f(x)$ 在 x_0 处可微是 $f(x)$ 在 x_0 处连续的充分条件；

C $f(x)$ 在 x_0 处的左导数 $f'_-(x_0)$ 及右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在是 $f(x)$ 在 x_0 处可微的充分必要条件；

D $f(x)$ 在 x_0 处连续是 $f(x)$ 在 x_0 处可导的必要条件

2. 设函数 $f(u)$ 可导，函数 $y=f(x^2)$ 在点 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1 ，则 $f'(1)=$ ____________

3. 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导，当自变量 x 由 x_0 增加到 $x_0+\Delta x$ 时，记Δy 为 $f(x)$的增量, dy 为 $f(x)$的微分，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-dy}{\Delta x}$ 等于

   A -1　**B** 0　**C** 1　**D** ∞

4. 设 $y=f(e^x)\ln(f(x))$，$f(x)$ 可导且 $f(x)>0$，求 dy

5. 设 $y=\cos(2^x+\sqrt{x})+e^{\sin x}$ （$x>0$），求 y'，dy

6. 求 $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$ 的微分

7. 求 $y=\tan^2(1+2x^2)$ 的微分

8. 求 $y=\left(1+x^2\right)\arctan x$ 的二阶导数

9. 求 $y=\tan x$ 的二阶导数

10. 求 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$的二阶导数

11. 求 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 的三阶导数

12. $f(x)=x^{27}+\sin\dfrac{x}{2}$，则 $f^{(28)}(\pi)=$ __________

第三部分 导数与微分的应用

一、中值定理和渐近线

1. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $a<x_1<x_2<b$，则至少存在一点 ξ，使( )成立

A. $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\ (a<\xi<b)$

B. $f(b)-f(x_1)=f'(\xi)(b-x_1),\ (x_1<\xi<b)$

C. $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\ (x_1<\xi<x_2)$

D. $f(x_2)-f(a)=f'(\xi)(x_2-a),\ (a<\xi<x_2)$

2. 函数 $f(x)=\arctan x$ 在 $[0,1]$ 上使拉格朗日中值定理结论成立的 ξ 是________

3. 下列函数在 $[-1,1]$ 上满足罗尔定理条件的是（ ）.

A. $f(x)=e^x$ B. $f(x)=|x|$ C. $f(x)=1-x^2$ D. $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

4. 设函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，则导函数 $f'(x)=0$ 有___个实根，分别位于区间__________中。

5. 罗尔定理中的三个条件: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，是 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=0$ 成立的（ ）.

A. 必要条件 **B.** 充分条件 **C.** 充要条件 **D.** 既非充分也非必要条件

6. 曲线 $y=\dfrac{x}{3-x^2}$ 的渐近线（ ）

A、无水平渐近线，也无斜渐近线 B、$x=\sqrt{3}$ 为垂直渐近线，无水平渐近线

C、有水平渐近线，也有垂直渐近线 D、只有水平渐近线

7. 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ （ ）

A、无渐近线 **B**、仅水平渐近线 **C**、仅铅直渐近线 **D**、既有水平和又有铅直渐近线

二、求极限

1. 设 $f(x)$ 二阶可导，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}=$_____

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin 5x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin 3x}{(1-\cos x)\ln(1+2x)}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$

7. 设 $f(x)$ 具有一阶连续导数且 $f\left(0\right)=0, f'\left(0\right)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(1-\cos x\right)}{\tan x^2}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 5x}$

10. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

11. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x})$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\sin x}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{(\arcsin x)^2}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$

18. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x})$

19. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\arctan x}=$____

三、单调性与极值

1. 函数 $y=x+2\cos x$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值为______

2. 函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续且取得极小值，则在 $x=x_0$ 处必有（　）

A. $f'(x_0)=0$　　**B**. $f''(x_0)<0$

C. $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)<0$　　**D**. $f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在

3. 下列结论正确的是（　）

A. x_0 是 $f(x)$ 的极值点，且 $f'(x_0)$ 存在，则必有 $f'(x_0)=0$

B. x_0 是 $f(x)$ 的极值点，则 x_0 必是 $f(x)$ 的驻点

C. 若 $f'(x_0)=0$，则 x_0 必是 $f(x)$ 的极值点

D. 使 $f'(x)$ 不存在的点一定是 $f(x)$ 的极值点

4. 设函数 $f(x)$ 二阶可导且处处满足方程 $f''(x)+3\left(f'(x)\right)^2+2e^x f(x)=0$。若 x_0 是函数的一个驻点且 $f(x_0)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处（ ）

A 取极大值　　**B** 取极小值
C 不取极值　　**D** 不能确定

5. 求点 $A(0,1)$ 到曲线 $x^2-y^2=1$ 的最短距离

6. 试问 a 为何值时，函数 $y=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极值？并判断为极大值还是极小值。

7. 函数 $y=4x^2-\ln(x^2)$ 的单调增加区间是_______，单调减少区间__________

8. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶导数大于 0, 则下列关系式成立的是（　）

A. $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　**B**. $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

C. $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　**D**. $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

9. 函数 $y=x+\sqrt{1-x}$，在区间 $[-5,1]$ 上的最大值为____, 最小值为_____

四、凹凸性与拐点

1. 函数 $y=x-\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 的上凹区间是_______

2. 若点$(1,3)$为曲线$y=ax^3+bx^2$的拐点，则$a-b=$____

3. 设$y=x^2\ln x$，此曲线的拐点坐标是________

4. 求曲线$y=2x^3-6x^2-18x+2$的单调区间、极值、凹凸区间和拐点.

5. 求曲线$y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$的单调区间、极值、凹凸区间和拐点.

6. 试确定曲线$y=ax^3+bx^2+cx+d$中的常数a,b,c,d，使$\left(-2,44\right)$为极值点，$\left(1,-10\right)$为拐点

7. 试决定$y=k\left(x^2-3\right)^2$中k的值，使曲线在拐点处的法线通过原点

8. 设$f'(x)=(x-1)(2x+1)$，则在区间$(\frac{1}{2},1)$内（　　）.

A. $y=f(x)$单调增加，曲线$y=f(x)$为凹的

B. $y=f(x)$单调减少，曲线$y=f(x)$为凹的

C. $y=f(x)$单调减少，曲线$y=f(x)$为凸的

D．$y=f(x)$单调增加，曲线$y=f(x)$为凸的

五、证明不等式

1. 当$x>0$时，证明$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$

2. 证明不等式$xe^{-x}>\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}\left(0<x<1\right)$

3. 设$a>b>0,n>1$，证明$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$

4. 设$a>b>0$，证明$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{b}{a}<\frac{a-b}{b}$

5. 当$0<x<\frac{\pi}{2}$，证明$\tan x>x+\frac{x^3}{3}$

6. 证明方程$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}=0$有且仅有一个实根

7. 当 $x>0$时，证明 $\sin x>x-\frac{x^3}{6}$

第四部分 不定积分

一、不定积分的概念

1. 如果 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$，则 $f(x)=$_____

2. 设 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数，则(　　)

A. $F(x)-G(x)=0$　　**B.** $F(x)-G(x)=C$ (C 为常数)

C. $F(x)+G(x)=0$　　**D.** $F(x)+G(x)=C$ (C 为常数)

3. 求 $\int \frac{(x-1)^3}{x^2}dx$

4. 求 $\int \tan^2 x dx$

5. 求 $\int \sin^2 \frac{x}{2}dx$

6. 求 $\int \frac{2x^4+x^2+3}{x^2+1}dx$

7. 求 $\int \frac{2}{1+\cos 2x}dx$

8. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$

9. $\int \frac{x^4-1}{(x^2+1)^2}dx$

二、求不定积分

1. $\int \frac{dx}{x(1+2\ln x)}$

2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+3\ln x}}$

3. $\int \frac{\tan x}{\ln\cos x}dx$

4. $\int \frac{x-\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}dx$

5. $\int \frac{1}{x(4+\ln^2 x)}dx$

6. $\int \frac{1}{\sin x\cos^3 x}dx$

7. $\int \frac{x^2}{(x+2)^3}dx$

8. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$

9. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

10. $\int \sin^3 x dx$

11. $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$

12. $\int \sec^6 x dx$

13. $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

14. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

15. $\int \frac{dx}{x^2-x-2}$

16. $\int \frac{1}{\sqrt[8]{3-2x}}dx$

17. $\int e^x\sin(e^x+4)dx$

18. $\int \frac{\cos\frac{3}{x}}{x^2}dx$

三、求不定积分

1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$

2. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx$

3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

4. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}}$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$

6. $\int \frac{x-1}{x^2+2x+3}dx$

7. $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$

8. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$

9. $\int \frac{x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

四、求不定积分

1. $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$

2. $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$

3. $\int x\sin xdx$

4. $\int x^2e^xdx$

5. $\int x\ln xdx$

6. $\int \arctan xdx$

7. $\int e^{2x}\sin 3xdx$

8. $\int e^{\sqrt{x}}dx$

9. $\int \arcsin xdx$

10. $\int x^2\arctan xdx$

11. $\int \ln^2 xdx$

12. $\int x^2\cos^2\frac{x}{2}dx$

13. $\int e^{\sqrt{3x+9}}dx$

14. $\int \cos\ln x dx$

15. $\int x\tan^2 x dx$

16. $\int x\ln(x-1)dx$

17. $\int e^{-x}\cos 2x dx$

18. $\int \frac{x}{x^2+2x+2}dx$

19. $\int \frac{x}{x^2-3x+2}dx$

五、求不定积分

1. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $\sqrt{x+1}$，则 $\int xf(1+x^2)dx=$________

2. 如果 $f(x)=e^{-x}$，则 $\int \frac{f'(\ln x)}{x}dx=$_____

3. 设 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int x^3 f'(x)dx=$________

4. $f(x)$ 的一个原函数是 x^2+x+C，则 $\int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=$（ ）

A. $\frac{x}{2}+\sqrt{x}+C$ **B.** $x+2\sqrt{x}+C$

C. $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x}+C$ **D.** $2x+2\sqrt{x}+C$

5. 设 $\frac{\sin x}{x}$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，且 $a\neq 0$，则 $\int \frac{f(ax)}{a}dx$ 应等于（ ）

A $\frac{\sin ax}{a^3x}+C$； **B** $\frac{\sin ax}{a^2x}+C$； **C** $\frac{\sin ax}{ax}+C$； **D** $\frac{\sin ax}{x}+C$

6. 设 $\int f(x)dx=\sqrt{1-x^2}+C$，求：$\int \frac{f'(\ln x)}{x}dx$

7. 设 $f'(x^2)=\ln x \quad (x>0)$，求 $f(x)$

8. 若 $\int f'(e^x)dx=e^{2x}+C$，则 $f(x)=($ $)$

A $\frac{1}{2}e^x+C$ **B** $e^{2x}+C$ **C** $\frac{2}{3}x^3+C$ **D** $\frac{4}{3}x^4+C$

9. 不定积分 $\int (\frac{1}{\sin^2 x}+1)d(\sin x)=($ $)$

A $-\frac{1}{\sin x}+\sin x+C$ **B** $\frac{1}{\sin x}+\sin x+C$

C $-\cot x+\sin x+C$ **D** $\cot x-\sin x+C$。

第五部分 定积分

一、定积分与变上限函数

1. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+x^3\int_0^1 f(x)dx$，则 $f(x)=$__________

2. 函数 $F(x)=\int_1^x (2-\dfrac{1}{\sqrt{t}})dt(x>0)$ 的单调减少区间为__________________

3. 下列式子正确的是（ ）

   A. $d\int f(x)dx=f(x)$　　**B.** $\int f'(x)dx=f(x)$

   C. $\dfrac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx=f(x)$　　**D.** $\dfrac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt=f(x)$

4. 下列式子错误的是（ ）

   A. $d\int e^{x^2}dx=e^{x^2}dx$　　**B.** $\int\dfrac{d}{dx}(e^{x^2})dx=e^{x^2}+C$

   C. $\dfrac{d}{dx}\int_0^1 e^{x^2}dx=e^{x^2}$　　**D.** $\dfrac{d}{dx}\int_0^x e^{t^2}dt=e^{x^2}$

5. $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)dt$，$g(x)=x^3+x^4$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的（ ）无穷小量。

   A. 等价　　**B.**同阶但非等价　　**C.**高阶　　**D.**低阶

6. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}, F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则（　　）

   A $F(x)$ 在 $x=0$ 点不连续；

   B $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，在 $x=0$ 点不可导；

   C $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且满足 $F'(x)=f(x)$；

   D $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，但不一定满足 $F'(x)=f(x)$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\sin t dt}{\int_0^x t^2 dt}=$__________

8. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\int_0^x\left(\dfrac{\sin t}{t}-1\right)dt$

9. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan 6x}{\int_{\cos 2x}^{1} e^{t^2}dt}$

10. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt}{x\sin 2x}$

11. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x (e^{t^2}-1)dt}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，求 $f'(0)$

12. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$

13. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}$

14. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 xdx$

15. 设 $f(x)=\int_0^x\dfrac{\sin t}{t}dt$，，则 $f'(0)=$______

二、求定积分

1. $\int_{-1}^{1}(x\cos x+\sqrt{1-x^2})dx=$_____

2. $\int_{-1}^{1}x^2\left(\sin^3 x+\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx=$________

3. $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\left(\sin x+1\right)dx=$__________

4. $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin^2 x}dx=$______

5. 求 $\int_4^9\dfrac{1}{\sqrt{x}+x}dx$

6. $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

7. $\int_1^{\sqrt{3}}\dfrac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin xdx$

9. $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}dx$

10. $\int_1^4 \frac{x+2}{\sqrt{1+2x}}dx$

11. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{8-2x^2}dx$

12. $\int_{\frac{3}{4}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}-1}$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}dx$

14. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+\cos x}, & -\pi<x<0, \\ xe^{-x^2}, & x\geq 0, \end{cases}$，求 $\int_1^4 f(x-2)dx$

三、求定积分

1. 设 $\int_0^2 f(x)dx=1, f(2)=2$，则 $\int_0^1 xf'(2x)dx=$ ____________

2. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx$

3. 已知曲线 C 的方程为 $y=f(x)$，点 $(3,2)$ 是它的一个拐点，直线 l_1,l_2 分别是曲线 C 在点 $(0,0)$ 与 $(3,2)$ 处的切线，其交点为 $(2,4)$。设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数，计算定积分 $\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)dx$

4. 求 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$

5. 求 $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

6. 求 $\int_0^{\pi} \left(x\sin x\right)^2 dx$

7. 求 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}dx$

8. 求 $\int_0^{\pi} x\cos 3x dx$

9. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x}dx$

四、定积分的应用

1. 计算由曲线 $x=1$，$y=e^x$，$y=e^{-x}$ 所围成平面图形的面积及其绕 x 轴旋转一周而得的

旋转体的体积。

2. 设平面图形 D 由曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 及其过原点的切线和 x 轴所围成。

1）求该平面图形的面积。

2）求所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积

3. 计算抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围成的图形的面积

4. 抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 及其在点 $(0,-3)$ 与 $(3,0)$ 处的切线所围成的面积

5. 求由 $y=x^2, x=y^2$ 所围成的图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积

五、关于定积分的证明

1. 证明 $\int_x^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+x^2}dx$ （$x>0$）

2. 设 $f(x)$ 为连续函数，证明 $(b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)dx=\int_a^b f(x)dx$

3. 证明等式 $\int_0^a x^3 f(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx$，其中 $f(x)$ 为连续函数，$a>0$。并用上面的结果计算积分 $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^3\sin x^2 dx$

4. 若 $f(x)$ 为连续函数，证明

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

（2）$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

5. 设 $x>0$，证明：$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt+\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}$

第六部分 微分方程

一、求下列微分方程的解

1. $y'=e^{x+y}$，求通解

2. $y'=2xy$，求通解

3. $xy'-y\ln y=0$，求通解

4. $\cos x\sin ydx+\sin x\cos ydy=0$，求通解

5. $(y+1)^2\dfrac{dy}{dx}+x^3=0$，求通解

6. $y'=e^{2x-y}$ 满足 $y(0)=0$ 的特解

7. $(1-x^2)y-xy'=0$ 满足初始条件 $y(1)=1$ 的特解

8. 设 $y=y(x)$ 在点 x 处的增量为 $\Delta y=\dfrac{y}{1+x}\Delta x+\alpha$，且当 $\Delta x\to 0$ 时，α 是 Δx 的高阶无穷小，$y(0)=1$，则 $y(1)$ 的值为（ ）

   A. -1　　**B.** 0　　**C.** 1　　**D.** 2

9. $y'+x+xy^2=1+y^2$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 的特解

10. 当 $\Delta x\to 0$ 时，α 是比 Δx 较高阶的无穷小量，函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{x^2+x+1}+\alpha$，且 $y(0)=\pi$，则 $y(1)=$_______

11. 微分方程 $y'=\dfrac{3x^2y}{1+x^3}$ 的通解为______________

二、求下列微分方程的解

1. 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解

2. 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+y=e^{-x}$ 的通解

3. 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+y\cos x=e^{-\sin x}$ 的通解

4. 求微分方程 $(x^2-1)y'+2xy-\cos x=0$ 的通解

5. 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+2xy=4x$ 的通解

6. 求微分方程 $y'-y\tan x=\sec x$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=0$ 的特解

7. 求微分方程 $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 的特解

8. 设连续函数 $y(x)$ 满足方程 $y(x)=\int_0^x y(t)dt+e^x$，求 $y(x)$

9. 已知曲线 l 通过点 $(\frac{\pi}{2},1)$ 且 l 上任一点处切线的斜率为 $\frac{1}{x}(\sin x-y)$，求曲线的方程

10. 下列方程中以 $y=C\sin x+\cos x$ 为通解的方程是：

A $y''+y=0$； **B** $y'-y\cot x=\sin x$；

C $y'-y\cot x=-\sin x$； **D** $y'-y\tan x=-\sin x$.

三、求下列微分方程的解

1. 已知 $y_1=\sin\omega x$，$y_2=2\sin\omega x$ 是微分方程 $y''+py'=0$（p 为常数）的的两个解，则 $y=C_1y_1+C_2y_2$（C_1,C_2 为任意常数）是方程的（ ）

A．解，但不是通解 **B**．通解 **C**．不是解 **D**．特解

2. 求微分方程 $y''-y'-6y=0$ 的通解

3. 求微分方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解

4. 求微分方程 $y''-2y'+y=0$ 的通解

5. 求微分方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解

6. 求微分方程 $y''+6y'+13y=0$ 的通解

7. 微分方程 $y''-y'-2y=0$ 的通解为___________

8. 求微分方程 $y''-4y'+3y=0$ 且满足 $y|_{x=0}=6$，$y'|_{x=0}=10$ 的通解

9. 求微分方程 $4y''+4y'+y=0$ 且满足 $y|_{x=0}=2$，$y'|_{x=0}=0$ 的通解

附录：参考答案

第一部分 极限与连续

一、求极限

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x-3}$

解　先用 x^3 去除分母及分子，然后取极限：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^3}}{7+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^3}}=\frac{3}{7},$$

这是因为　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{x^n}=a\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=a\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\right)^n=0,$

其中 a 为常数，n 为正整数，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$（见第三节例 7）.

2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to1}(x+1)}=\frac{0}{2}=0.$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

4. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)&=\lim_{x\to1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{-(x+2)}{1+x+x^2}=-\frac{\lim\limits_{x\to1}(x+2)}{\lim\limits_{x\to1}(1+x+x^2)}\\&=-\frac{3}{3}=-1.\end{aligned}$$

5. $\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=\underline{0}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sin x+3x}{\sin x-2x}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\dfrac{\sin x}{x}+3}{\dfrac{\sin x}{x}-2}$

由于 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 为无穷小，而 $\sin x$ 为有界量，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)=0$。

所以可知：原式$=\dfrac{2\cdot 0+3}{0-2}=-\dfrac{3}{2}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+n+1}-n^2\right)\left(n+2\right)$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+n+1}-n^2\right)\left(n+2\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^4+n+1}-n^2\right)\left(\sqrt{n^4+n+1}+n^2\right)\left(n+2\right)}{\sqrt{n^4+n+1}+n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{\sqrt{n^4+n+1}+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}}+1}=\frac{1}{2}$$

8. $\mathit{lim}_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)\underline{=0}$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-3x}{x+\sin x}$

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-3x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-3}{1+\dfrac{\sin x}{x}}$，由于 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 为无穷小，而 $\sin x$ 为有界量，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)=0$，所以原式$=\dfrac{1-3}{1+0}=-2$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan x}{x}\underline{=0}$

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

$$\lim_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$

12. 数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$的值为（B）

$A.0$； $B.\dfrac{1}{2}$； $C.1$； $D.$ 不存在.

13. 下列极限计算正确的是（B）

A；$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}=1$； **B** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}=1$；

C $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=0$； **C** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n=e^2$

14. 下列极限中存在的是 （C）

$A.\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$； $B.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$； $C.\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$； $D.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2^x-1}$

15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)\cdot(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=2/3.$$

二、求极限

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}+x\sin\dfrac{3}{x}\right)$

解：由于$x\to\infty$时，$\dfrac{1}{x}$为无穷小，而$\sin 2x$为有界量，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)=0$；

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{3}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{3}{x}}{\frac{3}{x}}\cdot 3\right)=3$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{1}{x}=1$（等价代换）.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}(x\cot x)$

$\lim\limits_{x\to 0}x\cot x=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\cdot\cos x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1.$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x\sin x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=2.$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^n\sin\dfrac{x}{2^n}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}\cdot x\right)=x.$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^2=\mathrm{e}^2.$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$

解 令 $t=-x$，则当 $x\to\infty$ 时，$t\to\infty$. 于是

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

10. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+(-2\text{x})\right)^{\frac{1}{-2x}\cdot(-6)}=e^{-6}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\tan^2 x\right)^{\cot^2 x}$

$$\lim_{x\to 0}(1+\tan^2 x)^{\cot^2 x}=\lim_{x\to 0}(1+\tan^2 x)^{\frac{1}{\tan^2 x}}=e$$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2(x+1)}{2x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(x+1)}{2x+1}}=e$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\tan x-\sin x}{\sin x\cdot\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x\cdot x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$$

14. 极限 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}=$ (C)

$A.1$　$B.0$　$C.-1$　$D.\ \infty$.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}\overset{x-\pi=t}{=\!=\!=}\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi+t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{t}=-1.$$

三、求极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$

解　当 $x\to 0$ 时，$\tan 2x\sim 2x$，$\sin 5x\sim 5x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec x-1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^n}{\sin^m x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}=\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{x^m}=\begin{cases}0, & n>m,\\ 1, & n=m,\\ \infty, & n<m.\end{cases}$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x\ln(1+2x)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x\ln(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\cdot 2x}=\frac{1}{2}.$$

5. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{\arctan^2 x}=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=2$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{\arctan^2 x}=2$，$\because \lim\limits_{x\to 0}\arctan^2 x=0$ $\therefore \lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin x}=0$. 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{\arctan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)/\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=2.$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\ln(1+2x)}{e^x+\sqrt{1-x}-2}$

解：
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\ln(1+2x)}{e^x+\sqrt{1-x}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{\ln(1+2x)}{x}}{\dfrac{e^x-1}{x}+\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-x}{2}}{x}}=6$$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$

解：
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{3}}{-\frac{x^2}{2}}=-\frac{2}{3}$$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[3]{1-2x}-1)x}{\sqrt{1+x^2}-1}$

解：
$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{1-2x}-1)x}{\sqrt{1+x^2}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}(-2x)x}{\frac{1}{2}x^2}=-\frac{4}{3}$$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{x}=3$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sec x+\tan x)}{\sin x}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sec x+\tan x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sec x+\tan x-1)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec x+\tan x-1}{\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+1-\cos x}{\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}+\frac{1-\cos x}{x}}{\frac{\sin x}{x}\cos x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=1$$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}\right)$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\cdot\dfrac{2}{x}\right)=\dfrac{6}{5}$

四、概念与定理相关

1. $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ 的__________间断点

解：$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-2^{-\frac{1}{x}}}{1+2^{-\frac{1}{x}}}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-1$，$f(0+)\neq f(0-)$，所以为跳跃间断点。

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} ke^{2x}, & x<0 \\ 1+\cos x, & x\geq 0\end{cases}$，当 $k=$______时，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}ke^{2x}=k$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\cos x)=1+1=2$

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $\therefore$ 左,右极限相等 $\therefore k=2$.

3. $f(x)=e^x+e^x-2$，当 $x\to 0$ 时　　（B）

A. $f(x)\sim x$

B. $f(x)$ 是 x 的同阶但非等价的无穷小

C. $f(x)$ 是 x 的高阶无穷小

D. $f(x)$ 是 x 的低阶无穷小

4. 下列说法正确的是：（B）

A. 若 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续

B. 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处连续

C. 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某一领域内连续

D. 若$\lim\limits_{h\to 0}\left(f(a+h)-f(a-h)\right)=0$，则$f(x)$在$x=a$处连续

5. $f(x)$在点x_0处有定义是极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的：D

A. 必要条件; *B.* 充分条件;
C. 充分必要条件; *D.* 既非必要又非充分条件.

6. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A(A$为常数），则当$x\to x_0$时，函数$f(x)-A$是 :C

A. 无穷大量 ; *B.* 无界，但非无穷大量 ;
C. 无穷小量 ; *D.* 有界，而未必为无穷小量 .

7. 设有两命题：

命题"a"：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$存在，且$g(x_0)\neq 0$，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$;
命题"b"：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$不存在。则$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$必不存在。
则：C
A."a","b"都正确； *B.*"a"正确,"b"不正确；
C."a"不正确,"b"正确； *D.*"a","b"都不正确。

8. 当$x\to 0$时,$2\sin x(1-\cos x)$与x^2比较是 ：C

A. 同阶但不等价无穷小； *B.* 等价无穷小；
C. 高阶无穷小； *D.* 低阶无穷小.

9. $\lim\limits_{x\to x_0^- 0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^- 0}f(x)=a$，是函数$f(x)$在$x=x_0$处连续的：B

A. 充分条件 *B.* 必要条件
C. 充分必要条件 *D.* 既非充分又非必要条件

10. 函数$y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$的间断点为$x=1$、$2$，则此函数间断点的题型为：D

A x=1,2 都是第一类间断点； **B** x=1,2 都是第二类；
C x=1 是第二类，x=2 是第一类； D x=1 是第一类，x=2 是第二类；

11. 下列叙述不正确的是（C）

A. 无穷小量与无穷大量的商为无穷小量；
B. 无穷小量与有界量的积是无穷小量；
C. 无穷大量与有界量的积是无穷大量；
D. 无穷大量与无穷大量的积是无穷大量。

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x}+4e^{-x}}{3e^{x}+2e^{-x}}=$（ A ）

$A.\dfrac{1}{3}$　　$B.2$　　$C.1$　　$D.$ 不存在

五、连续性

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0,\\ A, & x=0,\\ x\sin\dfrac{1}{x}+B, & x>0,\end{cases}$ 问：A,B 取何值时，函数 $f(x)$ 在整个实轴上连续。

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x\sin\frac{1}{x}+B)=B$

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $\therefore 1=B=f(0)=A$ $\therefore A=B=1.$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ a+x^2, & x\le 0,\end{cases}$。问如何选择常数 a 可使函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续。

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x\sin\frac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(a+x^2)=a$. $\because f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$\therefore a=0$

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arcsin 2x^2+e^{ax^2}-1}{\ln(1+2x^2)}, & x\ne 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求常数 a

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin 2x^2+e^{ax^2}-1}{\ln(1+2x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{\arcsin 2x^2}{\ln(1+2x^2)}+\lim_{x\to0}\frac{e^{ax^2}-1}{\ln(1+2x^2)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{\cancel{1+}2x^2}+\lim_{x\to0}\frac{ax^2}{2x^2}=1+\frac{a}{2}=f(0)=a$$

$\therefore 1+\frac{a}{2}=a$ $\therefore a=2.$

4. 求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x-1)x}$ 的间断点，并判断其类型

$f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x-1)x}$ 的间断点为 $x=0,1.$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-1}{x(x-1)}=\infty$ $\therefore x=0$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{(x-1)x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x}=2.$ $x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

5. 求函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)\sin x}{|x|(x^2-2x-3)}$ 的间断点，并判定类型。

$f(x)=\dfrac{(x+1)\sin x}{|x|\cdot(x^2-2x-3)}=\dfrac{(x+1)\sin x}{|x|\cdot(x-3)(x+1)}$ 的间断点为 $x=0,3,-1$.

$\because \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(x+1)\sin x}{|x|\cdot(x^2-2x-3)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(x+1)}{x^2-2x-3}\cdot\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{-3}\cdot1=-\dfrac13$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{(x+1)}{(x^2-2x-3)}\dfrac{\sin x}{(-x)}=-\dfrac13\cdot(-1)=\dfrac13$ $\therefore x=0$ 为跳跃间断点.

$\lim\limits_{x\to3}f(x)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x+1)\sin x}{|x|(x+1)}\cdot\dfrac{1}{x-3}=\infty$ $\therefore x=3$ 为第二类间断点.

六、极限的反问题

1. 设 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+bx+a}{1-x}=5$，则 a=_________, b=_________

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+bx+a}{1-x}=5$ $\because \lim\limits_{x\to1}(1-x)=0$ $\therefore \lim\limits_{x\to1}(x^2+bx+a)=1+b+a=0$

$\therefore a=-b-1$ $\therefore x^2+bx+a=x^2+bx-b-1=(x-1)(x+b+1)$

$\therefore \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+bx+a}{1-x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+b+1)}{1-x}=-\lim\limits_{x\to1}(x+b+1)=-(2+b)=5$

$\therefore b=-7$. $\therefore a=6$.

2. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=9$，则 $a=$__________

$\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right)^{\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}=9$ $\therefore 2a=\ln9$ $\therefore a=\dfrac12\ln9$.

3. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^{2015}}{(x-1)^k-x^k}=C(\neq0,\infty)$，求常数 k,C

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^{2015}}{(x-1)^k-x^k}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^{2015}}{(-1)\underbrace{[(x-1)^{k-1}+(x-1)^{k-2}x+\cdots+x^{k-1}]}_{k个}}=C$ $\therefore k-1=2015$ $\therefore k=2016$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{(-1)\underbrace{[(1-\frac1x)^{2015}+\cdots+1]}_{k}}=\dfrac{-2}{k}=C$ $\therefore C=\dfrac{-2}{2016}=\dfrac{-1}{1008}$.

4. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x+1}-ax^2-bx-c\right)=2$，求常数 a,b,c

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x+1}-ax^2-bx-c\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+1-1}{x+1}-ax^2-bx-c\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left((x^2-x+1)-\frac{1}{x+1}-ax^2-bx-c\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}[(1-a)x^2-(1+b)x]+\underbrace{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}-c\right)}_{=1-c}=2$

$\therefore 1-a=0,\ 1+b=0,\ 1-0-c=2$

$\therefore a=1,\ b=-1\ \ \therefore c=-1$

5. 设当 $x\to 0$，$\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}\sim k\sin^2 x$，求常数 k

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}}{k\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2})(\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2})}{(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2})\cdot k\sin^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(4+x^2)-(4-x^2)}{(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2})\cdot k\cdot x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4-x^2})\cdot kx^2}=1$

$=\frac{2}{k\cdot 4}=1\quad\therefore k=\frac{1}{2}.$

七、有关闭区间上连续函数的性质

1. 证明方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间。

令 $f(x)=x^5-3x-1$，则 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续.

$\because f(1)=1-3\times1-1=-3<0,\quad f(2)=2^3-3\times2-1=1>0$

$\therefore$ 由零点定理，$f(x)$ 在 $(1,2)$ 内存在一个零点.

2. 证明方程 $\sin x+x+1=0$ 在开区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根。

令 $f(x)=\sin x+x+1$，则 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上连续

$f(\frac{\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+1=2+\frac{\pi}{2}>0,\quad f(-\frac{\pi}{2})=\sin(-\frac{\pi}{2})-\frac{\pi}{2}+1=-\frac{\pi}{2}<0$

$\therefore$ 由零点定理，$f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内存在一个零点.

3. 设 $f(x)$ 在[a,b]上连续，且在[a,b]上的值域也为[a,b]。证明存在 $\xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=\xi$ 成立。

证明：令 $F(x)=f(x)-x$，由于函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由连续函数的四则运算性质可知：$F(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数。

因 $f(x)$ 在[a,b]上值域为[a,b]得 $F(a)=f(a)-a\ge 0$，$F(b)=f(b)-b\le 0$。

当$F(a)=0$或$F(b)=0$时，可知$f(x)=x$在$[a,b]$内的根有a或b。

当$F(a)>0$且$F(b)<0$时，由闭区间上连续函数的零点定理知，存在存在$\xi\in\left[a,b\right]$

使得$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=\xi$。

第二部分 导数与微分

一、导数的概念

1. 设函数$f(x)$在点$x=x_0$处可导，且$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{f\left(x_0-2h\right)-f(x_0)}=\dfrac{1}{4}$，则$f'(x_0)$等于（B）

A. -4 **B.** -2 **C.** 2 **D.** 4

2. 设$f(x)$可导，常数$a\neq 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}n[f(x-\dfrac{a}{n})-f(x)]=$（D）

A a； **B** $-a$； **C** $af'(x)$； **D** $-af'(x)$；

3. 设$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+k\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{1}{3}f'(x_0)$，其中$f'(x_0)\neq 0$，则$k=$ $\underline{\dfrac{1}{3}}$

4. 设$f(x)$在$x=a$的某个领域内有定义，则$f(x)$在$x=a$处可导的一个充分条件是（D）

A $\lim\limits_{h\to+\infty}h[f(a+\dfrac{1}{h})-f(a)]$存在 B $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在

C $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在 D $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在

5. 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[f(x)-f(0)]\sin 3x}{x^2}=4$，则$f'(0)$等于（B）

A. 3 **B.** $\dfrac{4}{3}$ **C.** $\dfrac{3}{4}$ **D.** 4

解: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(f(x)-f(0)\right)\sin 3x}{x^2}\dfrac{x}{\sin 3x}$

6. 设函数$f(x)$在点$x=0$处连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，则下列命题不正确的是（C）

A. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ **B.** $f(0)=0$ **C.** $f'(0)=0$ **D.** $f'(0)=1$

7. 若$f'(x_0)$存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=\underline{f(x_0)-x_0f'(x_0)}$；

解：$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\left(x-x_0\right)f(x_0)-x_0\left(f(x)-f(x_0)\right)}{x-x_0}=f(x_0)-x_0f'(x_0)$

8. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^3}{3}, & x\le 1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处（B）

A 左、右导数均存在； **B** 左导数存在，右导数不存在；

C 左导数不存在，右导数存在； **D** 左、右导数都不存在；

9. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}\sin^2 x & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，则 $f'(0)=$ $\underline{2}$

解：由导数的定义 $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{2\sin^2 h}{h}-0}{h}=2$

10. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则 $f(x)$ 在点 x_0 处（C）

A 必无定义； **B** 必无极限； **C** 必不可导； **D** 必可导

11. 若 $f(x)=\begin{cases}ae^{2x}, & x<0\\ 2-bx, x\ge 0\end{cases}$,在 $x=0$ 处可导,则常数 $a=$ $\underline{2}$，$b=$ $\underline{-4}$；

解：由于函数在 $x=0$ 可导，所以在该点既连续，又有左右导数相等。即有：$f(0-0)=f(0)\Rightarrow a=2$；$f'_+(0)=f'_-(0)\Rightarrow -b=2a$。所以有 $a=2,b=-4$。

12. 设函数 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-99)(x-100)$，则 $f'(0)=$（C）

A 100； B -100； C $100!$； D $-100!$

13. 曲线 $y=e^x$ 在 $(0,1)$ 处的切线方程为 $\underline{y=x+1}$

14. 设曲线 $y=x^2+x-2$ 在点 P 处的切线的斜率等于 3，则 P 点的坐标为 $\underline{(1,0)}$；

二、求导数

1. 求 $y=x^3+\dfrac{7}{x^4}-\dfrac{1}{x}+12$ 的导数

（1）$y'=3x^2-\dfrac{28}{x^5}+\dfrac{2}{x^2}$.

2. 求 $y=5x^3-2^x+3e^x$ 的导数

$y'=15x^2-2^x\ln 2+3e^x$.

3. 求 $y=2\tan x+\sec x-1$ 的导数

$y'=2\sec^2 x+\sec x\tan x=\sec x(2\sec x+\tan x)$.

4. 求 $y=x^2\ln x$ 的导数

$$y'=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=x(2\ln x+1).$$

5. 求 $y=\frac{\ln x}{x}$ 的导数

$$y'=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

6. 求 $y=x^2\ln x\cos x$ 的导数

$$y'=2x\ln x\cos x+x^2\cdot\frac{1}{x}\cos x+x^2\ln x(-\sin x)$$
$$=2x\ln x\cos x+x\cos x-x^2\ln x\sin x.$$

7. 求 $y=\frac{1+\sin x}{1+\cos x}$ 的导数

解：$$y'=\frac{(1+\sin x)'(1+\cos x)-(1+\sin x)(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x(1+\cos x)-(1+\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}=\frac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

三、求导数

1. 设 $f(\frac{1}{x^2})=\tan x^4$，则 $f'(x)=\underline{-\frac{2}{x^3}\sec^2\frac{1}{x^2}}$；

解：由 $f(\frac{1}{x^2})=\tan x^4$ 得 $f(x)=\tan\frac{1}{x^2}$，

所以 $f'(x)=(\tan u)'\left(\frac{1}{x^2}\right)'=\left(\sec^2\frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{2}{x^3}\right)$， 其中 $u=\frac{1}{x^2}$

2. 设 $y=f(\cos x)+\sin[f(x)]$，其中 f 可微，则

$$\frac{dy}{dx}=\underline{f'(\cos x)(-\sin x)+\cos(f(x))f'(x)}；$$

3. 设 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处具有连续导数，且 $f'(1)=1$，则 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{d}{dx}f(\cos\sqrt{x})$ 为（B）

A -1； **B** $-\frac{1}{2}$； **C** 2； **D** 1

4. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导且 $f'(0)=\frac{1}{3}$，又对任意 x 有 $f(3+x)=3f(x)$，则 $f'(3)=$（C）

A 3； **B** $\frac{1}{3}$； **C** 1； **D** 0

5. 求 $y=\arctan e^{x}$ 的导数

解：$y'=\dfrac{e^{x}}{1+e^{2x}}$

6. 求 $y=\arcsin\sqrt{x}$ 的导数

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

7. 求 $y=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$ 的导数

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\cdot\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

8. 求 $y=\ln(\sec x+\tan x)$ 的导数

$$y'=\frac{1}{\sec x+\tan x}(\sec x\tan x+\sec^2 x)=\sec x.$$

9. 求 $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$ 的导数

$$y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sin x}=\csc x.$$

10. 求 $y=e^{\arctan\sqrt{x}}$ 的导数

$$y'=e^{\arctan\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}e^{\arctan\sqrt{x}}.$$

11. 求 $y=\ln\ln\ln x$ 的导数

$$y'=\frac{1}{\ln\ln x}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln x\ln\ln x}.$$

12. 求 $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ 的导数

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2x}(1+x)\sqrt{1-x}}=-\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}.$$

13. $y=\ln[\cos(10+3x^2)]$，求y'

解：$y'=\dfrac{1}{\cos(10+3x^2)}\left(-\sin(10+3x^2)\right)(6x)=-6x\tan(10+3x^2)$

14. 函数$f(x)=\ln|x-1|$的导数是（B）

A $f'(x)=\dfrac{1}{|x-1|}$　　B $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$

C $f'(x)=\dfrac{1}{1-x}$　　D $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & x<1\\ \dfrac{1}{1-x} & x>1\end{cases}$

15. 设$y=f(e^x)\cdot e^{f(x)}$，其中$f'(x)$存在，求y'

解：$y'=f'(e^x)e^xe^{f(x)}+f(e^x)e^{f(x)}f'(x)$

四、求导数

1. 设$y=\dfrac{\ln x}{x}$，则$x^2y''+3xy'+\dfrac{\ln x}{x}=$_0_

解：由函数表达式与导数的四则运算法则可知：$y'=\dfrac{(\ln x)'x-(\ln x)x'}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，再求导可得$y''=\dfrac{(1-\ln x)'x^2-(1-\ln x)(x^2)'}{x^4}=\dfrac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=\dfrac{-3+2\ln x}{x^3}$，将上面两式代入可得：$x^2y''+3xy'+\dfrac{\ln x}{x}=0$

2. 设$f(u)$可导，若$y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$，试求$\dfrac{dy}{dx}$

$$\begin{aligned}y'&=f'(\sin^2x)2\sin x\cos x+f'(\cos^2x)2\cos x(-\sin x)\\&=\sin 2x[f'(\sin^2x)-f'(\cos^2x)].\end{aligned}$$

3. 设$y=e^{f(x)}\cdot f(\sin 2x)+\ln 2$，$f(x)$可导且$f(0)=0, f'(0)=1$，求$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$

解：$\dfrac{dy}{dx}=\left[e^{f(x)}\right]'f(\sin 2x)+e^{f(x)}\left[f(\sin 2x)\right]'+(\ln 2)'$

$=e^{f(x)}f'(x)f(\sin 2x)+e^{f(x)}f'(\sin 2x)\cos(2x)2$

代入$x=0$可得：

$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=e^{f(0)}f'(0)f(0)+e^{f(0)}f'(0)\cos(0)2=2$

4.　求 $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$ 的导数

(2) 在 $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$ 两端取对数，得

$$\ln y=\frac{1}{5}\left[\ln(x-5)-\frac{1}{5}\ln(x^2+2)\right]=\frac{1}{5}\ln(x-5)-\frac{1}{25}\ln(x^2+2).$$

在上式两端分别对 x 求导，并注意到 $y=y(x)$，得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-5}-\frac{1}{25}\cdot\frac{2x}{x^2+2},$$

于是 $$y'=y\left[\frac{1}{5(x-5)}-\frac{2x}{25(x^2+2)}\right]=\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}\left[\frac{1}{5(x-5)}-\frac{2x}{25(x^2+2)}\right].$$

5.　求 $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$ 的导数

解　(1) 在 $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$ 两端取对数，得

$$\ln y=x[\ln x-\ln(1+x)].$$

在上式两端分别对 x 求导，并注意到 $y=y(x)$，得

$$\frac{y'}{y}=[\ln x-\ln(1+x)]+x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)=\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x},$$

于是 $$y'=y\left(\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}\right)=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\left(\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}\right).$$

6.　已知 $y=(\tan x)^{\sin x}$　求 y'

解：$y=(\tan x)^{\sin x}$ 的等号两边同时取对数，得

$$\ln y=\sin x\ln\tan x$$

在上式两端分别对 x 求导，得：

$$\frac{y'}{y}=\cos x\ln\tan x+\sin x\frac{1}{\tan x}\sec^2 x=\cos x\ln\tan x+\sec x$$

于是　$y'=(\tan x)\sin x(\cos x\ln\tan x+\sec x)$

7.　设函数 $y=f(x)$ 由方程 $x^y=y^x$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$

解：等式两边同取对数可得：$y\ln x=x\ln y$

两边同时对 x 求导可得：$y'\ln x+y\cdot\dfrac{1}{x}=\ln y+x\cdot\dfrac{y'}{y}$

所以有：$y'=\dfrac{\ln y-\dfrac{y}{x}}{\ln x-\dfrac{x}{y}}=\dfrac{(x\ln y-y)y}{(y\ln x-x)x}=\dfrac{(\ln x-x)y^2}{(\ln y-1)x^2}$

注：对于隐函数求导，如果在结果中代入原方程可能得到的形式不唯一。下同。

8. 求 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程

解：等式两边同时对 x 求导可得：

$$\cos(xy)(y+xy')+\frac{y'-1}{y-x}=1$$

代入 $x=0, y=1$ 可得：$1+y'-1=1\Rightarrow y'\big|_{(0,1)}=1$

所以切线方程为：$y-1=x$

9. 求 $x^3+y^3-3axy=0$ 确定的隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$

（2）在方程两端分别对 x 求导，得

$$3x^2+3y^2y'-3ay-3axy'=0,$$

从而 $y'=\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$，其中 $y=y(x)$ 是由方程 $x^3+y^3-3axy=0$ 所确定的隐函数.

10. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}+\cos(xy)=0$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=\underline{-\dfrac{\cos(xy)+y\sin(xy)}{\cos(xy)+x\sin(xy)}}$

11. 设 y 为 x 的函数是由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$ 确定的，求 y' $\underline{y'=\dfrac{x+y}{x-y}}$

12. 曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2\sqrt{a}\,(a>0)$ 在点 (a,a) 处的切线方程是（B）

（A） $x-y-2a=0$；（B）$x+y-2a=0$；

（C）$x-y-2\sqrt{a}=0$；（D）$x+y-2\sqrt{a}=0$

13. 设 $y=f(x)$ 由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点(0, 1)处的法线方程为 $\underline{y-2x-1=0}$.

14. 设参数方程 $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2}\\ y=\arctan t\end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=1}$

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}=\dfrac{1}{t}$。所以 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=1}=1$

15. 求由参数方程 $\begin{cases} y = e^t \sin t, \\ x = e^t \cos t, \end{cases}$ 所确定函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{e^t\cos t-e^t\sin t}{e^t\sin t+e^t\cos t}=\dfrac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}$,

16. 函数 $\begin{cases} x = t \cdot e^t \\ y = \ln\left(2-e^t\right) \end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线方程为 $\underline{y=-x}$

五、高阶导数与微分

1. 下列结论不正确的是（C）

A 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处可微；

B $f(x)$ 在 x_0 处可微是 $f(x)$ 在 x_0 处连续的充分条件；

C $f(x)$ 在 x_0 处的左导数 $f'_-(x_0)$ 及右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在是 $f(x)$ 在 x_0 处可微的充分必要条件；

D $f(x)$ 在 x_0 处连续是 $f(x)$ 在 x_0 处可导的必要条件

2. 设函数 $f(u)$ 可导，函数 $y=f(x^2)$ 在点 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1，则 $f'(1)=\underline{-\dfrac{1}{2}}$

解:由微分的定义知：Δy 的线性主部为 $A\Delta x$，即可得：$0.1=A(-0.1)$，所以 $A=-1$，由可微与可导的关系可得：$A=y'=f'(x^2)(2x)\big|_{x=1}$，所以 $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$

3. 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导，当自变量 x 由 x_0 增加到 $x_0+\Delta x$ 时，记Δy 为 $f(x)$的增量, dy 为 $f(x)$的微分，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-dy}{\Delta x}$ 等于　B

A -1　　**B** 0　　**C** 1　　**D** ∞

4. 设 $y=f(e^x)\ln(f(x))$，$f(x)$ 可导且 $f(x)>0$，求 dy

解：$y'=\left[f(\mathrm{e}^x)\right]'\ln f(x)+f(e^x)\left[\ln f(x)\right]'$

$$=f'(\mathrm{e}^x)\left(\mathrm{e}^x\right)'\ln f(x)+f(\mathrm{e}^x)\frac{\left[f(x)\right]'}{f(x)}$$

$$=f'(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{e}^x\ln f(x)+f(\mathrm{e}^x)\frac{f'(x)}{f(x)}$$

所以：$dy=\left[f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\ln f(x)+f(\mathrm{e}^x)\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]dx$

5. 设 $y=\cos(2^x+\sqrt{x})+e^{\sin x}$ （$x>0$），求 y'，dy

解：令 $u=2^x+\sqrt{x},v=\sin x$，由复合函数的求导法则可得：

$$y'=\cos' u\left(2^x+\sqrt{x}\right)'+\left(e^v\right)'(\sin x)'$$

$$=-\cos u\left(2^x\ln 2+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)+\left(e^v\right)\cos x$$

$$=-\cos\left(2^x+\sqrt{x}\right)\left(2^x\ln 2+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)+e^{\sin x}\cos x$$

所以 $dy=\left[-\cos\left(2^x+\sqrt{x}\right)\left(2^x\ln 2+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)+e^{\sin x}\cos x\right]dx$

6. 求 $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$ 的微分

$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}\cdot\frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}\right]\mathrm{d}x=-\frac{x}{|x|}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}, & -1<x<0,\\ -\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}, & 0<x<1.\end{cases}$$

7. 求 $y=\tan^2(1+2x^2)$ 的微分

$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=[2\tan(1+2x^2)\cdot\sec^2(1+2x^2)\cdot 4x]\mathrm{d}x$$
$$=8x\tan(1+2x^2)\sec^2(1+2x^2)\mathrm{d}x.$$

8. 求 $y=\left(1+x^2\right)\arctan x$ 的二阶导数

$$y'=2x\arctan x+(1+x^2)\cdot\frac{1}{1+x^2}=2x\arctan x+1,$$

$$y''=2\arctan x+2x\frac{1}{1+x^2}=2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}.$$

9. 求 $y=\tan x$ 的二阶导数

$$y'=\sec^2 x, y''=2\sec^2 x\tan x.$$

10. 求 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 的二阶导数

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$y''=\frac{-\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{1+x^2})^2}=-\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

11. 求 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 的三阶导数

解：由于 $y=-1+\dfrac{2}{1+x}$

所以 $y'=-\dfrac{2}{(1+x)^2}$　　$y'=\dfrac{4}{(1+x)^3}$

12. $f(x)=x^{27}+\sin\dfrac{x}{2}$，则 $f^{(28)}(\pi)=\underline{\dfrac{1}{2^{28}}}$

解：$f^{(28)}=\left(x^{27}\right)^{(28)}+\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)^{(28)}=0+\dfrac{1}{2^{28}}\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{28\pi}{2}\right)$，所以 $f^{(28)}(\pi)=\dfrac{1}{2^{28}}$

第三部分 导数与微分的应用

一、中值定理和渐近线

1. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $a<x_1<x_2<b$，则至少存在一点 ξ，使(C)成立

A. $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\ (a<\xi<b)$

B. $f(b)-f(x_1)=f'(\xi)(b-x_1),\ (x_1<\xi<b)$

C. $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\ (x_1<\xi<x_2)$

D. $f(x_2)-f(a)=f'(\xi)(x_2-a),\ (a<\xi<x_2)$

2. 函数 $f(x)=\arctan x$ 在 $[0,1]$ 上使拉格朗日中值定理结论成立的 ξ 是 $\underline{\sqrt{\dfrac{4-\pi}{\pi}}}$

3. 下列函数在 $[-1,1]$ 上满足罗尔定理条件的是（ C ）.

A. $f(x)=e^x$　B. $f(x)=|x|$　C. $f(x)=1-x^2$　D. $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

4. 设函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，则导函数 $f'(x)=0$ 有 $\underline{\ 3\ }$ 个实根，分别位于区间 $\underline{(1,2),(2,3),(2,3),(3,4)}$ 中。

5. 罗尔定理中的三个条件: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，是 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=0$ 成立的（B）.

A. 必要条件　**B.** 充分条件　**C.** 充要条件　**D.** 既非充分也非必要条件

6. 曲线 $y=\dfrac{x}{3-x^2}$ 的渐近线（C）

A、无水平渐近线，也无斜渐近线　　B、$x=\sqrt{3}$ 为垂直渐近线，无水平渐近线

C、有水平渐近线，也有垂直渐近线　　D、只有水平渐近线

7. 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ (D)

A、无渐近线 **B**、仅水平渐近线 **C**、仅铅直渐近线 **D**、既有水平和又有铅直渐近线

二、求极限

1. 设 $f(x)$ 二阶可导，则 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}=\underline{f''(a)}$

解：由于函数两阶可导，所以一阶导数一定连续，由于极限为末定式，用洛必达法则知

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\left[\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}+\frac{f'(a-h)-f'(a)}{-h}\right]。$$

再由函数在 $x=a$ 点二阶导数存在，可得结果。

2. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x+x^2-1+e^{-x}}{(1-e^{-x})x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x+x^2-1+e^{-x}}{x^2}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1+2x-e^{-x}}{2x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{2+e^{-x}}{2}\right)=\frac{3}{2}$$

3. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\sin3x}{\ln\sin5x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{3\cos3x}{\sin3x}}{\frac{5\cos5x}{\sin5x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3\cos3x}{5\cos5x}\dfrac{\sin5x}{\sin3x}=\dfrac{3}{5}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin5x}{\sin3x}=\dfrac{3}{5}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{5\cos5x}{3\cos3x}=1$

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x-\sin3x}{(1-\cos x)\ln(1+2x)}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x-\sin3x}{\frac{x^2}{2}2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3-3\cos3x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\frac{(3x)^2}{2}}{3x^2}=\dfrac{9}{2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x-\sin x}-1}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x-\sin x}(1-\cos x)}{1-\cos x}=1$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{\sin x}{x}}{1-\dfrac{\sin x}{x}}=\dfrac{1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}}{1-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}}=1$

7. 设 $f(x)$ 具有一阶连续导数且 $f(0)=0, f'(0)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan x^2}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x-0}\dfrac{1-\cos x}{\tan x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}f'(0)\frac{1-\cos x}{\tan x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=1$$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2.$$

9. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 5x}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\tan 7x}\cdot\sec^2 7x\cdot 7}{\frac{1}{\tan 2x}\sec^2 2x\cdot 2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan 2x}{\tan 7x}\cdot\frac{\sec^2 7x}{\sec^2 2x}\cdot\frac{7}{2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{7x}\cdot\frac{\sec^2 7x}{\sec^2 2x}\cdot\frac{7}{2}=1.$$

10. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{-x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{2}.$$

11. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x})$

解：$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x})=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-x}{x^2\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x-x}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sec^2 x-1}{3x^2}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec x\tan x}{6x}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\sin x}$

解 如果直接用洛必达法则,那么分母的导数(尤其是高阶导数)较繁.如果作一个等价无穷小替代,那么运算就方便得多.其运算如下:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}\cdot\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{6x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\frac{1}{3}.$$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{(\arcsin x)^2}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{(\arcsin x)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{2}=\frac{1}{2}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$

解 1：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}$；

解 2：$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$。

17. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\left(x\ln(1+x)-x^2\right)\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{2\left(x\ln(1+x)-x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x\left(1-\cos x\right)}{2\left(x\ln(1+x)-x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\frac{x^2}{2}}{2\left(x\ln(1+x)-x^2\right)}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln(1+x)-x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\frac{1}{1+x}-1}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2(1+x)}{-1}=-\frac{1}{2}$$

18. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x})$

解：$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\frac{1}{2}$

19. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\arctan x}=$ __0__

注：分子为无穷小，无母在x充分大后，严格大于1

三、单调性与极值

1. 函数$y=x+2\cos x$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上的最大值为$\underline{\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}}$

解：$y'=1-2\sin x$，$y''=-2\cos x$。由$y'=0$知函数的唯一驻点$x=\frac{\pi}{6}$，而在该点的两阶导数为负数，所以该点为极大值点。由于函数在闭区间上连续，且有唯一的极大值点，所以一定是函数的最大值点。

2. 函数$y=f(x)$在$x=x_0$处连续且取得极小值，则在$x=x_0$处必有（D）

A．$f'(x_0)=0$　　**B**．$f''(x_0)<0$

C．$f'(x_0)=0$且$f''(x_0)<0$　　**D**．$f'(x_0)=0$或$f'(x_0)$不存在

3. 下列结论正确的是(A)

A．x_0是$f(x)$的极值点，且$f'(x_0)$存在，则必有$f'(x_0)=0$

B．x_0是$f(x)$的极值点，则x_0必是$f(x)$的驻点

C．若$f'(x_0)=0$，则x_0必是$f(x)$的极值点

D．使$f'(x)$不存在的点一定是$f(x)$的极值点

4. 设函数$f(x)$二阶可导且处处满足方程$f''(x)+3\left(f'(x)\right)^2+2e^x f(x)=0$。若$x_0$是函数的一个驻点且$f(x_0)<0$，则$f(x)$在$x_0$处（B）

A 取极大值　　**B** 取极小值

C 不取极值　　**D** 不能确定

解：由于x_0为驻点，所以$f'\left(x_0\right)=0$，将$x=x_0$代入方程可得$f''\left(x_0\right)=-2e^{x_0}f\left(x_0\right)$。

再根据$f\left(x_0\right)<0$可得：$f''\left(x_0\right)>0$。由极值的第二充分条件知函数在$x=x_0$取得极小值

5. 求点$A(0,1)$到曲线$x^2-y^2=1$的最短距离

解：$A(0,1)$到曲线上点$B(\pm\sqrt{1+y^2},y)$的距离为$d=\sqrt{1+y^2+(y-1)^2}$。则$A(0,1)$到曲线的距离为$d(y)\ (y\in(-\infty,+\infty))$的最小值

令$f(y)=\mathrm{d}^2=1+y^2+(y-1)^2$。

$f'(y)=2y+2(y-1)$，$f''(y)=4$令$f'(y)=0$可得：$y=\dfrac{1}{2}$。所以$f(y)$在$y=\dfrac{1}{2}$处取极小值。由于函数可微且仅有此一个极小值，所以必为最小值。

所以有 $\mathrm{d}=\sqrt{f\left(\dfrac{1}{2}\right)}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

6. 试问a为何值时，函数$y=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$在$x=\dfrac{\pi}{3}$处取得极值？并判断为极大值还是极小值。

解：由于函数为可微函数，所以极值点一定是驻点，即在$x=\dfrac{\pi}{3}$时

$f'(\dfrac{\pi}{3})=a\cos x+\cos 3x\big|_{x=\frac{\pi}{3}}=0$，所以可得$a=2$。

而$f''(\dfrac{\pi}{3})=-2\sin x-3\sin 3x\big|_{x=\frac{\pi}{3}}=-\sqrt{3}<0$，所以为极大值。

7. 函数$y=4x^2-\ln(x^2)$的单调增加区间是$\underline{\left[-\dfrac{1}{2},0\right)\cup\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)}$，单调减少区间$\underline{\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right]}$

8. 设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶导数大于0, 则下列关系式成立的是（B）

A. $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　**B**. $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

C. $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　**D**. $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

9. 函数$y=x+\sqrt{1-x}$，在区间$[-5,1]$上的最大值为$\underline{\dfrac{5}{4}}$，最小值为$\underline{\sqrt{6}-5}$

四、凹凸性与拐点

1. 函数 $y = x - \arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 的上凹区间是 $\underline{[0,+\infty]}$

解：$y' = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$，$y'' = \dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$，由上凹的充分条件 $y'' > 0$ 知上凹区间。

2. 若点 $(1,3)$ 为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点，则 $a - b = \underline{-6}$

解：由于曲线过 $(1,3)$，所以有 $a + b = 3$，而 $y'' = 6ax + 2b$，函数在 $(1,3)$ 点为拐点并且二阶可导，由拐点的必要条件知 $6a + 2b = 0$，解以上方程组可得：$a = -\dfrac{3}{2}, b = \dfrac{9}{2}$，所以可得结果。

3. 设 $y = x^2 \ln x$，此曲线的拐点坐标是 $\underline{\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\dfrac{3}{2}e^{-3}\right)}$

解：$y'' = 2\ln x + 3$，所以由拐点的必要条件知 $x = e^{-\frac{3}{2}}$，所以得拐点坐标。

4. 求曲线 $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 2$ 的单调区间、极值、凹凸区间和拐点.

解：$y' = 6x^2 - 12x - 18 = 6(x+1)(x-3)$　　$y'' = 12x - 12 = 12(x-1)$

由 $y' = 0$ 可得 $x_1 = -1, x_2 = 3$　由 $y'' = 0$ 可得 $x_3 = 1$。所以有下表

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	$-$	0	$+$
y	向上凸		向上凹

所以，函数的单调递增区间是 $(-\infty,-1] \cup [3,+\infty)$；单调递减区间是 $[-1,3]$；在 $x = -1$ 处取得极大值 12；在 $x = 3$ 处取得极小值 -52；曲线的向上凸区间是 $(-\infty,1]$；向上凹区间是 $[1,+\infty)$；拐点是 $(1,-20)$。

5. 求曲线 $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ 的单调区间、极值、凹凸区间和拐点.

解：$y'=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$　　$y''=2x-4=2(x-2)$

由 $y'=0$ 可得 $x_1=1,x_2=3$　由 $y''=0$ 可得 $x_3=2$。所以有下表

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
y''	−	0	+
y	向上凸		向上凹

所以，函数的单调递增区间是 $(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$；单调递减区间是 $[1,3]$；

在 $x=1$ 处取得极大值 $\frac{7}{3}$；在 $x=3$ 处取得极小值 1；

曲线的向上凸区间是 $(-\infty,2]$；向上凹区间是 $[2,+\infty)$；

拐点是 $(2,\frac{5}{3})$。

6. 试确定曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的常数 a,b,c,d，使 $(-2,44)$ 为极值点，$(1,-10)$ 为拐点

解：$y'=3ax^2+2bx+c$　　$y''=6ax+2b$

由曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 过 $(-2,44)$ 与 $(1,-10)$ 得：

$-8a+4b-2c+d=44$　　①

$a+b+c+d=-10$　　②

由 $(-2,44)$ 为极值点得：

$12a-4b+c=0$　　③

由 $(1,-10)$ 为拐点得：

$6a+2b=0$　　④

解上述四个方程得：$a=1,b=-3,c=-24,d=16$

7. 试决定 $y=k\left(x^2-3\right)^2$ 中 k 的值，使曲线在拐点处的法线通过原点

解：$y'=4kx\left(x^2-3\right)$，$y''=4k\left(3x^2-3\right)$。

拐点为 $(1,4k)$ 和 $(-1,4k)$。

由点的坐标知经原点与拐点的直线斜率为：$4k$ 或 $-4k$。
而在这两个点处的切线的凭斜率为：$-8k$ 或 $8k$。

由题设知：$-32k^2=-1$。

所以 $k=\pm4\sqrt{2}$

8. 设 $f'(x)=(x-1)(2x+1)$，则在区间 $(\frac{1}{2},1)$ 内（ B ）.

A. $y=f(x)$ 单调增加，曲线 $y=f(x)$ 为凹的

B. $y=f(x)$ 单调减少，曲线 $y=f(x)$ 为凹的

C. $y=f(x)$ 单调减少，曲线 $y=f(x)$ 为凸的

D． $y=f(x)$ 单调增加，曲线 $y=f(x)$ 为凸的

五、证明不等式

1. 当 $x>0$ 时，证明 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$

证明：令 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}\qquad x\in[0,+\infty)$

而 $f'(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>f'(0)=0$

函数严格单调递增，$f(x)>f(0)\ (x>0)$

即得结论

2. 证明不等式 $xe^{-x}>\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}\left(0<x<1\right)$

证明:令 $f(x)=x^2e^{\frac{1}{x}-x}$，

由于 $f'(x)=e^{\frac{1}{x}-x}[2x-1-x^2]\le0\quad x\in(0,1)$

所以 $f(x)$ 在 $x\in(0,1)$ 内单调递减，所以 $f(x)>f(1)=1\quad x\in(0,1)$

整理可得：$xe^{-x}<\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}\left(0<x<1\right)$

3. 设 $a>b>0, n>1$，证明 $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$

证 取函数 $f(x)=x^n$，$f(x)$ 在 $[b,a]$ 上连续，在 (b,a) 内可导，由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(b,a)$，使

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b),$$

即 $$a^n-b^n=n\xi^{n-1}(a-b).$$

又 $$0<b<\xi<a, n>1,$$

故 $$0<b^{n-1}<\xi^{n-1}<a^{n-1}.$$

因此 $$nb^{n-1}(a-b)<n\xi^{n-1}(a-b)<na^{n-1}(a-b),$$

即 $$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b).$$

4. 设 $a>b>0$，证明 $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{b}{a}<\frac{a-b}{b}$

证 取函数 $f(x)=\ln x$，$f(x)$ 在 $[b,a]$ 上连续，在 (b,a) 内可导，由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(b,a)$，使

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b),$$

即 $$\ln a-\ln b=\frac{1}{\xi}(a-b).$$

又，$0<b<\xi<a$，故 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{b}$，

因此 $$\frac{a-b}{a}<\frac{a-b}{\xi}<\frac{a-b}{b},$$

即 $$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}.$$

5. 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$，证明 $\tan x>x+\frac{x^3}{3}$

取 $f(x)=\tan x-x-\frac{1}{3}x^3, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$$f'(x)=\sec^2 x-1-x^2=\tan^2 x-x^2=(\tan x-x)(\tan x+x).$$

由 $$g'(x)=(\tan x-x)'=\sec^2 x-1=\tan^2 x>0$$

知 $g(x)=\tan x-x$ 在 $[0,x]$ 上单调增加，即

$$g(x)=\tan x-x>g(0)=0.$$

故 $f'(x)>0, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. 从而 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加，因此 $f(x)>f(0)$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. 即当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan x-x-\frac{1}{3}x^3>0$. 从而

$$\tan x>x+\frac{1}{3}x^3 \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

6. 证明方程 $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}=0$ 有且仅有一个实根

解：令 $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$。

则，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为连续可微的函数。

因为 $f(-2)=-\dfrac{1}{3}<0, f(0)=1>0$，由闭区间上连续函数的性质知 $f(x)$ 在 $(-2,0)$ 内至少有一根。

而 $f'(x)=1+x+\dfrac{x^2}{3}$。由于 $\Delta=1-\dfrac{4}{3}<0$，所以 $f'(x)>0$，$f(x)$ 严格单调递增。所以函数有且仅有一个实根。

7. 当 $x>0$ 时，证明 $\sin x>x-\dfrac{x^3}{6}$

证明：令 $g(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}\quad (x>0)$

$g'(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}, g''(x)=x-\sin x$，$g'''(x)=1-\cos x$

当 $x>0$ 时，$g'''(x)\ge 0$

所以在 $(0,+\infty)$ 内函数 $g''(x)$ 单调增加，即当 $x>0$ 时，有 $g''(x)>g''(0)=0$

所以在 $(0,+\infty)$ 内函数 $g'(x)$ 单调增加，即当 $x>0$ 时，有 $g'(x)>g'(0)=0$

于是在 $(0,+\infty)$ 内函数 $g(x)$ 单调增加，因此当 $x>0$ 时，有 $g(x)>g(0)=0$，

所以当 $x>0$ 时，有 $\sin x>x-\dfrac{x^3}{6}$

第四部分 不定积分

一、不定积分的概念

1. 如果 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$，则 $f(x)=$ $\underline{x-\dfrac{x^2}{2}+C}$

解：由 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$，得：$f'(x)=1-x$，所以 $f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}+C$

2. 设 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数，则 (B)

A. $F(x)-G(x)=0$　　**B.** $F(x)-G(x)=C$ (C 为常数)

C. $F(x)+G(x)=0$　　**D.** $F(x)+G(x)=C$ (C 为常数)

3. 求$\int \frac{(x-1)^3}{x^2}dx$

解 $$\int \frac{(x-1)^3}{x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2}\mathrm{d}x$$
$$= \int \left(x-3+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int x\mathrm{d}x - 3\int \mathrm{d}x + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$
$$= \frac{x^2}{2} - 3x + 3\ln|x| + \frac{1}{x} + C.$$

4. 求$\int \tan^2 x dx$

$$\int \tan^2 x\mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x = \int \sec^2 x\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x$$
$$= \tan x - x + C.$$

5. 求$\int \sin^2 \frac{x}{2}dx$

$$\int \sin^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}(1-\cos x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1-\cos x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{d}x - \int \cos x\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}(x-\sin x) + C.$$

6. 求$\int \frac{2x^4+x^2+3}{x^2+1}dx$

$$\int \frac{2x^4+x^2+3}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int\left(2x^2-1+\frac{4}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$$
$$= 2\int x^2\mathrm{d}x - \int 1\mathrm{d}x + 4\int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{2}{3}x^3 - x + 4\arctan x + C.$$

7. 求$\int \frac{2}{1+\cos 2x}dx$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos 2x} = \int \frac{\sec^2 x}{2}\mathrm{d}x = \frac{\tan x}{2} + C.$$

8. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx$

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int (\csc^2 x - \sec^2 x)\mathrm{d}x$$
$$= \int \csc^2 x\mathrm{d}x - \int \sec^2 x\mathrm{d}x = -(\cot x + \tan x) + C.$$

9. $\int \frac{x^4-1}{(x^2+1)^2}dx$

解：$\int \frac{x^4-1}{(x^2+1)^2}dx$

$=\int \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2+1)^2}dx=\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx$

$=\int \frac{x^2+1-2}{x^2+1}dx=\int dx-2\int \frac{1}{1+x^2}dx$

$=x-2\arctan x+C$

二、求不定积分

1. $\int \frac{dx}{x(1+2\ln x)}$

解：$\int \frac{dx}{x(1+2\ln x)}=\frac{1}{2}\int \frac{d(1+2\ln x)}{1+2\ln x}=\frac{1}{2}\ln\left|1+2\ln x\right|+C$

2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+3\ln x}}$

解：$\int \frac{dx}{x\sqrt{2+3\ln x}}=\int \frac{d\ln x}{\sqrt{2+3\ln x}}=\frac{1}{3}\int \frac{d(2+3\ln x)}{\sqrt{2+3\ln x}}=\frac{2}{3}\sqrt{2+3\ln x}+C$

3. $\int \frac{\tan x}{\ln\cos x}dx$

解：$\int \frac{\tan x}{\ln\cos x}dx=-\int \frac{1}{\ln\cos x}d\ln\cos x=-\ln\left|\ln\cos x\right|+C$

4. $\int \frac{x-\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}dx$

解：$\int \frac{x-\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}dx=\int \frac{x}{1+x^2}dx-\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}dx$

$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}d\left(x^2+1\right)-\int \sqrt{\arctan x}d\arctan x=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{2}{3}\left(\arctan x\right)^{\frac{3}{2}}+C$

5. $\int \frac{1}{x(4+\ln^2 x)}dx$

解：$\int \frac{1}{x(4+\ln^2 x)}dx=\int \frac{1}{4+\ln^2 x}d\ln x=\frac{1}{2}\arctan\frac{\ln x}{2}+C$

6. $\int \frac{1}{\sin x\cos^3 x}dx$

解：$\int \frac{1}{\sin x\cos^3 x}dx=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^3 x}dx=\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx+\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}dx$

$=-\int \frac{d\cos x}{\cos^3 x}+\int \frac{d\tan x}{\tan x}\quad =\frac{1}{2\cos^2 x}+\ln|\tan x|+C$

7. $\int \frac{x^2}{(x+2)^3}dx$

解 令 $u=x+2$，则 $x=u-2$，$dx=du$. 于是

$$\int \frac{x^2}{(x+2)^3}dx=\int \frac{(u-2)^2}{u^3}du=\int (u^2-4u+4)u^{-3}du$$
$$=\int (u^{-1}-4u^{-2}+4u^{-3})du$$
$$=\ln|u|+4u^{-1}-2u^{-2}+C$$
$$=\ln|x+2|+\frac{4}{x+2}-\frac{2}{(x+2)^2}+C.$$

8. $\int x\sqrt{1-x^2}dx$

解 设 $u=1-x^2$，则 $du=-2xdx$，即 $-\frac{1}{2}du=xdx$，因此，

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx=\int u^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du=-\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C$$
$$=-\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

9. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

解：$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=2\int e^{\sqrt{x}}d\sqrt{x}=2e^{\sqrt{x}}+C$

10. $\int \sin^3 xdx$

解 $\int \sin^3 x dx=\int \sin^2 x\sin x dx=-\int (1-\cos^2 x)d(\cos x)$

$$=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C.$$

11. $\int \sec^6 xdx$

解：$\int \sec^6 xdx=\int (1+2\tan^2 x+\tan^4 x)\sec^2 xdx$

$$=\int(1+2\tan^2 x+\tan^4 x)d(\tan x)$$

$$=\tan x+\frac{2}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x+C$$

12. $\int \sin^2 x\cos^4 xdx$

解 $\int \sin^2 x\cos^5 x\,\mathrm{d}x = \int \sin^2 x\cos^4 x\cos x\,\mathrm{d}x$

$$= \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)^2\mathrm{d}(\sin x)$$

$$= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x)\mathrm{d}(\sin x)$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$$

13. $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

解：$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx = 2\int \arctan\sqrt{x}d(\arctan\sqrt{x}) = (\arctan\sqrt{x})^2 + C$

14. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=\int\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+1}=\int\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x}+1}=\arctan(\mathrm{e}^x)+C.$$

15. $\int \frac{dx}{x^2-x-2}$

$$\int\frac{x}{x^2-x-2}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{(x-2)(x+1)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln|x+1|+C.$$

16. $\int \frac{1}{\sqrt[8]{3-2x}}dx$

解：$\int \frac{1}{\sqrt[8]{3-2x}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt[8]{3-2x}}d(3-2x) = -\frac{4}{7}(3-2x)^{\frac{7}{8}} + C$

17. $\int e^x \sin(e^x+4)dx$

解：$\int e^x\sin(e^x+4)dx = \int \sin(e^x+4)d\left(e^x+4\right) = -\cos(e^x+4)+C$

18. $\int \frac{\cos\frac{3}{x}}{x^2}dx$

解：$\int \frac{\cos\frac{3}{x}}{x^2}dx = -\frac{1}{3}\int \cos\frac{3}{x}d\frac{3}{x} = -\frac{1}{3}\sin\frac{3}{x}+C$

三、求不定积分

1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$

解：令 $x=\sin t, -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则 $dx=\cos tdt$,

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{\cos tdt}{1+\cos t}=\int \frac{(1-\cos t)\cos tdt}{\sin^2 t}=\int \frac{\cos tdt}{\sin^2 t}-\int \frac{(1-\sin^2 t)dt}{\sin^2 t}$$

$$=\int \frac{d\sin t}{\sin^2 t}-\int \frac{dt}{\sin^2 t}+\int dt=-\frac{1}{\sin t}+\cot t+t+C=-\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\arcsin x+C$$

2. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx$

解：令 $x=\tan t, -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则 $dx=\sec^2 tdt$,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx=\int \frac{1}{\tan^2 t\sec t}\sec^2 tdt=\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt$$

$$=\int \csc t\cot tdt=-\csc t+C=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$$

3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=-\arcsin\left|\frac{1}{x}\right|+C$

解：当 $x>0$ 时，$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-\int \frac{d\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}=-\arcsin\frac{1}{x}+C$，

当 $x<0$ 时，$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=-\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\int \frac{d\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}=\arcsin\frac{1}{x}+C$。

4. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}}$

解：令 $\sqrt{2x}=t$，则 $x=\frac{t^2}{2}$ $(t>0)$，$dx=tdt$，

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}}=\int \frac{tdt}{1+t}=\int 1dt-\int \frac{dt}{1+t}=t-\ln|1+t|+C=\sqrt{2x}-\ln\left(1+\sqrt{2x}\right)+C$$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$

解：令 $x=\tan t, -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则 $dx=\sec^2 tdt,$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}=\int \frac{\sec^2 dt}{\sec^3 t}=\int \cos tdt=\sin t+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$$

6. $\int \frac{x-1}{x^2+2x+3}dx$

解：$\int \frac{x-1}{x^2+2x+3}dx=\int \frac{x+1-2}{(x+1)^2+2}dx=\frac{1}{2}\int \frac{d\left[(x+1)^2+2\right]}{(x+1)^2+2}dx-\int \frac{2}{(x+1)^2+2}d\left(x+1\right)$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)-\sqrt{2}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$$

7. $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$

解：设 $t=\sqrt[3]{x+1}$，则 $x=t^3-1, dx=3t^2dt$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx=\int \frac{3t^2}{1+t}\cdot dt=3\int \frac{t^2-1+1}{1+t}dt=3\int (t-1+\frac{1}{1+t})dt$$
$$=3(\int tdt-\int dt+\int \frac{d(1+t)}{1+t})=\frac{3}{2}t^2-3t+3\ln\left|1+t\right|+C$$

8. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$

解：设 $t=\sqrt[6]{x}$，则 $x=t^6, dx=6t^5dt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx=\int \frac{6t^5}{t^3+t^2}dt=6\int \frac{t^3}{1+t}dt=6\int \frac{t^3+1-1}{1+t}dt$$
$$=6\int (1-t+t^2-\frac{1}{1+t})dt=6(\int dt-\int tdt+\int t^2dt-\int \frac{1}{1+t}dt)$$
$$=6t-3t^2+2t^3-6\ln\left|1+t\right|+C$$
$$\overset{t=\sqrt[6]{x}}{=\!=}6\sqrt[6]{x}-3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C$$

9. $\int \frac{x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

分析：法一 被积函数含 $\sqrt{a^2-x^2}$，可用第二类换元法。设 $x=\sin t$

解：设 $x=\sin t$， $dx=\cos tdt$

$$\int\frac{x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\frac{\sin^3 t}{(1-\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}\cos tdt=\int\frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}dt=\int\frac{\sin^2 t\sin t}{\cos^2 t}dt$$

$$=-\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}d(\cos t)=\int d(\cos t)-\int\frac{1}{\cos^2 t}d(\cos t)$$

$$=\cos t+\frac{1}{\cos t}+C$$

$$\overset{\cos t=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{=\!=\!=\!=\!=}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}+C$$

分析：法二 用凑微分法

$$\int\frac{x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{-x^2d(1-x^2)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}\int[(1-x^2)-1](1-x^2)^{-\frac{3}{2}}d(1-x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\int[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}-(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}]d(1-x^2)=\frac{1}{2}[2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}]+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}+C$$

四、求不定积分

1. $\int\frac{x}{\cos^2 x}dx$

解：$\int\frac{x}{\cos^2 x}dx=\int xd\tan x=x\tan x-\int\tan xdx$

$$=x\tan x+\int\frac{1}{\cos}d\cos x=x\tan x+\ln|\cos x|+C$$

2. $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$

解：$\int\frac{\ln x}{x^2}dx=-\int\ln xd\frac{1}{x}=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x}d\ln x=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$

3. $\int x\sin xdx$

$$\int x\sin x\mathrm{d}x=-\int x\mathrm{d}(\cos x)=-x\cos x+\int\cos x\mathrm{d}x$$
$$=-x\cos x+\sin x+C.$$

4. $\int x^2e^xdx$

$$\int x^2\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\ln x\mathrm{d}(x^3)=\frac{x^3\ln x}{3}-\frac{1}{3}\int x^3\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{x^3\ln x}{3}-\frac{x^3}{9}+C.$$

5. $\int x\ln xdx$

解 设 $u=\ln x, dv=xdx$，那么

$$\begin{aligned}\int x\ln x dx &= \int \ln x\, d\frac{x^2}{2} \\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} d(\ln x) \\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx \\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.\end{aligned}$$

6. $\int \arctan xdx$

解：$\int \arctan xdx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

7. $\int e^{2x}\sin 3xdx$

答案：$-\frac{e^{2x}}{13}(3\cos 3x - 2\sin 3x)+C$

8. $\int e^{\sqrt{x}}dx$

解 令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2, dx=2tdt$. 于是

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2\int te^t dt.$$

利用例 2 的结果，并用 $t=\sqrt{x}$ 代回，便得所求积分：

$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt{x}}dx &= 2\int te^t dt = 2e^t(t-1)+C \\ &= 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C.\end{aligned}$$

9. $\int \arcsin xdx$

$$\int \arcsin x dx = x\arcsin x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}+C.$$

10. $\int x^2\arctan xdx$

$$\begin{aligned}\int x^2\arctan x dx &= \frac{1}{3}\int \arctan x d(x^3) = \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}dx \\ &= \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{3}\int \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx \\ &= \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C.\end{aligned}$$

11. $\int \ln^2 xdx$

$$\begin{aligned}\int \ln^2 x dx &= x\ln^2 x - \int 2\ln x dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + \int 2dx \\ &= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C.\end{aligned}$$

12. $\int x^2\cos^2\frac{x}{2}dx$

$$\int x^2\cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x^2(1+\cos x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}(\sin x)$$
$$=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\sin x-\int x\sin x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\sin x+\int x\mathrm{d}(\cos x)$$
$$=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\sin x+x\cos x-\int\cos x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\sin x+x\cos x-\sin x+C.$$

13. $\int e^{\sqrt{3x+9}}dx$

设$\sqrt{3x+9}=u$，即 $x=\frac{1}{3}(u^2-9)$，$\mathrm{d}x=\frac{2}{3}u\mathrm{d}u$，则

$$\int e^{\sqrt{3x+9}}\mathrm{d}x=\int\frac{2}{3}ue^u\mathrm{d}u=\int\frac{2}{3}u\mathrm{d}(e^u)$$
$$=\frac{2}{3}ue^u-\int\frac{2}{3}e^u\mathrm{d}u=\frac{2}{3}ue^u-\frac{2}{3}e^u+C$$
$$=\frac{2}{3}e^{\sqrt{3x+9}}(\sqrt{3x+9}-1)+C.$$

14. $\int\cos\ln xdx$

20. $\int\cos\ln x\mathrm{d}x\overset{x=e^u}{=\!=}\int e^u\cos u\mathrm{d}u$，

而 $$\int e^u\cos u\mathrm{d}u=\int\cos u\mathrm{d}(e^u)=e^u\cos u+\int e^u\sin u\mathrm{d}u$$
$$=e^u\cos u+\int\sin u\mathrm{d}(e^u)$$
$$=e^u\cos u+e^u\sin u-\int e^u\cos u\mathrm{d}u,$$

因此 $\int e^u\cos u\mathrm{d}u=\frac{e^u(\cos u+\sin u)}{2}+C$，故有

$$\int\cos\ln x\mathrm{d}x=\frac{x(\cos\ln x+\sin\ln x)}{2}+C.$$

15. $\int x\tan^2 xdx$

解：$\int x\tan^2xdx=\int x\left(\sec^2x-1\right)dx=\int x\sec^2xdx-\int xdx$

$$=x\tan x-\int\tan xdx-\int xdx=x\tan x+\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}+C$$

16. $\int x\ln(x-1)dx$

解：$\int x\ln(x-1)dx=\frac{1}{2}\int\ln(x-1)d(x^2)=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int x^2d[\ln(x-1)]$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x-1}dx=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1+1}{x-1}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int(x+1+\frac{1}{x-1})dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$$

17. $\int e^{-x}\cos 2xdx$

解：法一 选取$u=e^{-x},\cos 2xdx=\frac{1}{2}d(\sin 2x)=\frac{1}{2}dv$

$$\int e^{-x}\cos 2xdx=\frac{1}{2}\int e^{-x}d(\sin 2x)=\frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2xd(e^{-x})$$

$$=\frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x+\frac{1}{2}\int e^{-x}\sin 2xdx$$

$$=\frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x-\frac{1}{4}\int e^{-x}d(\cos 2x)$$

$$=\frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x-\frac{1}{4}e^{-x}\cos 2x+\frac{1}{4}\int\cos 2xd(e^{-x})$$

$$=\frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x-\frac{1}{4}e^{-x}\cos 2x-\frac{1}{4}\int e^{-x}\cos 2xdx$$

则：$\int e^{-x}\sin 2xdx=\frac{2}{5}e^{-x}\sin 2x-\frac{1}{5}e^{-x}\cos 2x+C$

法二 选取$u=\cos 2x,e^{-x}dx=-d(e^{-x})=-dv$

$$\int e^{-x}\cos 2xdx=-\int\cos 2xde^{-x}=-e^{-x}\sin 2x+\int e^{-x}d(\cos 2x)$$

$$=-e^{-x}\cos 2x-2\int e^{-x}\sin 2xdx=-e^{-x}\cos 2x+2\int\sin 2xd(e^{-x})$$

$$=-e^{-x}\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x-2\int e^{-x}d(\sin 2x)$$

$$=-e^{-x}\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x-4\int e^{-x}\cos 2xdx$$

则：$\int e^{-x}\cos 2xdx=-\frac{1}{5}e^{-x}\cos 2x+\frac{2}{5}e^{-x}\sin 2x+C$

18. $\int\frac{x}{x^2+2x+2}dx$

解：$\int\frac{x}{x^2+2x+2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2-2}{x^2+2x+2}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx-\int\frac{1}{x^2+2x+2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+2x+2}d(x^2+2x+2)-\int\frac{1}{(x+1)^2+1}d(x+1)$$

$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)-\arctan(x+1)+C$

19. $\int\frac{x}{x^2-3x+2}dx$

分析：$\frac{x}{x^2-3x+2}=\frac{x}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}=\frac{(A+B)x-(A+2B)}{(x-1)(x-2)}$

则 $\begin{cases}A+B=1\\-(A+2B)=0\end{cases}$ 解之：$A=2,\qquad B=-1$

解：$\int\frac{x}{x^2-3x+2}dx=\int(\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x-1})dx=2\int\frac{1}{x-2}dx-\int\frac{1}{x-1}dx$

$=2\int\frac{1}{x-2}d(x-2)-\int\frac{1}{x-1}d(x-1)$

$=2\ln|x-2|-\ln|x-1|+C$

五、求不定积分

1. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $\sqrt{x+1}$，则 $\int xf(1+x^2)dx=$ $\underline{\frac{1}{2}\sqrt{x^2+2}+C}$

解：$\int xf(1+x^2)dx=\frac{1}{2}\int f(1+x^2)d\left(1+x^2\right)=\frac{1}{2}F(1+x^2)+\mathrm{C}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+2}+C$

2. 如果 $f(x)=e^{-x}$，则 $\int\frac{f'(\ln x)}{x}dx=$ $\underline{\frac{1}{x}+C}$

解：$\int\frac{f'(\ln x)}{x}dx=\int f'(\ln x)\,\mathrm{d}\ln x=f(\ln x)+\mathrm{C}=\frac{1}{x}+C$

3. 设 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int x^3f'(x)dx=$ $\underline{(x^2-6)\cos x-4x\sin x+C}$

解：记 $F(x)=\frac{\sin x}{x}$，则 $F'(x)=f(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

$\int x^3f'(x)dx=\int x^3df(x)=x^3f(x)-\int f(x)dx^3=x^3f(x)-3\int x^2dF(x)$

$=x^3f(x)-3x^2F(x)+3\int F(x)dx^2=x^3\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}-3x^2\frac{\sin x}{x}+6\int\frac{\sin x}{x}xdx$

$=(x^2-6)\cos x-4x\sin x+C$

4. $f(x)$ 的一个原函数是 x^2+x+C，则 $\int\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=$（D）

A. $\frac{x}{2}+\sqrt{x}+C$ **B.** $x+2\sqrt{x}+C$

C. $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x}+C$ **D.** $2x+2\sqrt{x}+C$

解：$\int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int f(\sqrt{x})d\sqrt{x} = \frac{1}{2}\left((\sqrt{x})^2 + \sqrt{x}\right) + C$

5. 设 $\frac{\sin x}{x}$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，且 $a \neq 0$，则 $\int \frac{f(ax)}{a}dx$ 应等于（A）

A $\frac{\sin ax}{a^3x} + C$； **B** $\frac{\sin ax}{a^2x} + C$； **C** $\frac{\sin ax}{ax} + C$； **D** $\frac{\sin ax}{x} + C$

6. 设 $\int f(x)dx = \sqrt{1-x^2} + C$，求：$\int \frac{f'(\ln x)}{x}dx$

解：$\int \frac{f'(\ln x)}{x}dx = \int f'(\ln x)d(\ln x) = f(\ln x) + C$

而 $f(x) = (\sqrt{1-x^2} + C)' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$，于是有

$$\int \frac{f'(\ln x)}{x}dx = f(\ln x) + C = \frac{-\ln x}{\sqrt{1-\ln^2 x}} + C$$

7. 设 $f'(x^2) = \ln x \quad (x > 0)$，求 $f(x)$

解：法一 $f'(x^2) = \frac{df'(x^2)}{d(x^2)} = \ln x$，则 $df(x^2) = \ln x d(x^2)$

两边对 x^2 积分，有

$$\int d f(x^2) = f(x^2) = \int \ln x d(x^2) = x^2 \ln x - \int x^2 d\ln x$$

$$= x^2 \ln x - \int x^2 \frac{1}{x}dx = x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2 + C$$

则 $f(x) = x\ln\sqrt{x} - \frac{1}{2}x + C$

法二 先换元，再积分

$f'(x^2) = \ln x$，则 $f'(x) = \ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$

两边对 x 积分，有

$$\int f'(x)dx = \frac{1}{2}\int \ln x dx = \frac{1}{2}x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x\ln x - \frac{1}{2}x + C$$

即 $f(x) = \frac{1}{2}x\ln x - \frac{1}{2}x + C$

8. 若 $\int f'(e^x)dx = e^{2x} + C$，则 $f(x) = (\ C\ )$

A $\frac{1}{2}e^x + C$ **B** $e^{2x} + C$ **C** $\frac{2}{3}x^3 + C$ **D** $\frac{4}{3}x^4 + C$

9. 不定积分 $\int (\frac{1}{\sin^2 x}+1)d(\sin x)=$ (A)

A $-\frac{1}{\sin x}+\sin x+C$　　B $\frac{1}{\sin x}+\sin x+C$

C $-\cot x+\sin x+C$　　D $\cot x-\sin x+C$。

第五部分 定积分

一、定积分与变上限函数

1. 设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+x^3\int_0^1 f(x)dx$，则 $f(x)=\underline{\frac{1}{1+x^2}+\frac{\pi}{3}x^3}$

解：等式两边同时在$[0,1]$上积分得 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx+\int_0^1 x^3dx\int_0^1 f(x)dx$，即：$\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\int_0^1 f(x)dx$，所以$\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi}{3}$，所以求得函数

2. 函数 $F(x)=\int_1^x (2-\frac{1}{\sqrt{t}})dt(x>0)$ 的单调减少区间为$\underline{(0,\frac{1}{4})}$

解：对函数求导得：$F'(x)=2-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{4x-1}{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1\right)}$，所以当$x\in(0,\frac{1}{4})$，$F'(x)<0$，所以函数的单调减少区间为$(0,\frac{1}{4})$

3. 下列式子正确的是（D）

A. $d\int f(x)dx=f(x)$　　**B.** $\int f'(x)dx=f(x)$

C. $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx=f(x)$　　**D.** $\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt=f(x)$

4. 下列式子错误的是（C）

A. $d\int e^{x^2}dx=e^{x^2}dx$　　**B.** $\int\frac{d}{dx}(e^{x^2})dx=e^{x^2}+C$

C. $\frac{d}{dx}\int_0^1 e^{x^2}dx=e^{x^2}$　　**D.** $\frac{d}{dx}\int_0^x e^{t^2}dt=e^{x^2}$

5. $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)dt$，$g(x)=x^3+x^4$，当$x\to 0$时，$f(x)$是$g(x)$的（B）无穷小量。

A. 等价　　**B.**同阶但非等价　　**C.**高阶　　**D.**低阶

解：由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t^2dt}{x^3+x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{3x^2+4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2+4x^3}=\frac{1}{3}$，所以由无穷小阶的比较，可知$f(x)$是$g(x)$的同阶而非等价无穷小

6. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则（B）

A $F(x)$ 在 $x=0$ 点不连续；

B $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，在 $x=0$ 点不可导；

C $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且满足 $F'(x)=f(x)$；

D $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，但不一定满足 $F'(x)=f(x)$

解：可解得：$F(x)=\begin{cases}x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x, & x<0,\end{cases}=|x|$，所以该函数为连续函数，但在 $x=0$ 点不可导。

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x t\sin t dt}{\int_0^x t^2 dt}=$ 1

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x t\sin t dt}{\int_0^x t^2 dt}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{x^2}=1$

8. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\int_0^x\left(\dfrac{\sin t}{t}-1\right)dt$

解：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{3x^2}\left(\dfrac{\sin x}{x}-1\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{3x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{9x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sin x}{18x}=-\dfrac{1}{18}$

9. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\tan 6x}{\int_{\cos 2x}^1 e^{t^2}dt}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6x^2}{\int_{\cos 2x}^1 e^{t^2}dt}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{12x}{-e^{\cos^2 2x}(-2\sin 2x)}=\dfrac{3}{e}$

10. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt}{x\sin 2x}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt}{2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^4}\,2x}{4x}=\dfrac{1}{2}$

11. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x (e^{t^2}-1)dt}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，求 $f'(0)$

解：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left(e^{t^2}-1\right)dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$

12. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{xe^{2x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}}{1}=2.$$

13. 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}$

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{x}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan^2 x}{1}=\dfrac{\pi^2}{4}$

14. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 xdx$

解：$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sec^2 x-1\right)dx=\left(\tan x-x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\dfrac{\pi}{4}$

15. 设 $f(x)=\int_0^x\dfrac{\sin t}{t}dt$，，则 $f'(0)=$ <u>1</u>

解：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

二、求定积分

1. $\int_{-1}^1(x\cos x+\sqrt{1-x^2})dx=\underline{\dfrac{\pi}{2}}$

解：$\int_{-1}^1(x\cos x+\sqrt{1-x^2})dx=\int_{-1}^1 x\cos xdx+\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}dx=0+2\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\dfrac{\pi}{2}$

2. $\int_{-1}^1 x^2\left(\sin^3 x+\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx=2-\dfrac{\pi}{2}$

解：$\int_{-1}^1 x^2\left(\sin^3 x+\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx=\int_{-1}^1 x^2\sin^3 xdx+\int_{-1}^1\dfrac{x^2}{1+x^2}dx=0+2\int_0^1\dfrac{x^2}{1+x^2}dx$

$$=2\int_0^1\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=2\left[x-\arctan x\right]\Big|_0^1=2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

3. $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\left(\sin x+1\right)dx=\underline{\frac{\pi}{2}}$

解：$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\left(\sin x+1\right)dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\sin xdx+\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=0+\frac{\pi}{2}$

4. $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin^2 x}dx=\underline{\ 2\ }$

5. 求$\int_4^9\frac{1}{\sqrt{x}+x}dx$

解：原式$\underline{\underline{t=\sqrt{x}}}\int_2^3\frac{2t}{t+t^2}dt=2\ln(1+t)\big|_2^3=2\ln\frac{4}{3}$

6. $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

解：原式$\underline{\underline{x=\sin t}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\cos x}\cos xdt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}$

7. $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

解：原式$\underline{\underline{x=\tan t}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2 t\sec t}\sec^2 tdt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt==-\left(\frac{1}{\sin t}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin xdx$

解 设 $t=\cos x$，则 $dt=-\sin x dx$，且

$$\text{当 } x=0 \text{ 时}, t=1;\quad \text{当 } x=\frac{\pi}{2}\text{ 时}, t=0.$$

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin x dx=-\int_1^0 t^5 dt=\int_0^1 t^5 dt=\left[\frac{t^6}{6}\right]_0^1=\frac{1}{6}.$$

9. $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}dx$

解 由于 $\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}=\sqrt{\sin^3 x(1-\sin^2 x)}=\sin^{\frac{3}{2}}x\cdot|\cos x|$，在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上，$|\cos x|=\cos x$；在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上，$|\cos x|=-\cos x$，所以

$$\int_0^\pi \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x\cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x(-\cos x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x\,d(\sin x) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x\,d(\sin x)$$

$$= \left[\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{2}{5} - \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5}.$$

10. $\int_1^4 \frac{x+2}{\sqrt{1+2x}}dx$

解 设$\sqrt{2x+1}=t$，则 $x=\frac{t^2-1}{2}$，$dx = t\,dt$，且

当 $x=0$ 时，$t=1$；当 $x=4$ 时，$t=3$.

于是

$$\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx = \int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}t\,dt = \frac{1}{2}\int_1^3 (t^2+3)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}+3t\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{27}{3}+9\right) - \left(\frac{1}{3}+3\right)\right] = \frac{22}{3}.$$

11. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{8-2y^2}\,dy$

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{8-2y^2}\,dy \xlongequal{y=2\sin u} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 4\sqrt{2}\cos^2 u\,du$$

$$= 2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2u)\,du$$

$$= 2\sqrt{2}\left[u+\frac{1}{2}\sin 2u\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(\pi+2).$$

12. $\int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}-1}$

令 $u=\sqrt{1-x}$，即 $x=1-u^2$，得

$$\int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}-1} = \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{-2u\,du}{u-1} = -2[u+\ln(1-u)]_{\frac{1}{2}}^0 = 1-2\ln 2.$$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$

解：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x|\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)\,dx$

$$=\left(\sin x+\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\left(-\cos x-\sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=2\left(\sqrt{2}-1\right)$$

14. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\cos x}, & -\pi<x<0,\\ xe^{-x^2}, & x\geq 0,\end{cases}$，求 $\int_1^4 f(x-2)dx$

解：$\int_1^4 f(x-2)dx \underline{\underline{x-2=t}} \int_{-1}^2 f(t)dt=\int_{-1}^0\dfrac{1}{1+\cos t}dt+\int_0^2 te^{-t^2}dt$

$$=\int_{-1}^0\frac{\sec^2\frac{t}{2}}{2}dt+\frac{1}{2}\int_0^2 e^{-t^2}dt^2=\tan\frac{t}{2}\Big|_{-1}^0-\frac{e^{-t^2}}{2}\Big|_0^2=\tan\frac{1}{2}+\frac{1-e^{-4}}{2}$$

三、求定积分

1. 设 $\int_0^2 f(x)dx=1, f(2)=2$，则 $\int_0^1 xf'(2x)dx=\dfrac{3}{4}$

解：$\int_0^1 xf'(2x)dx=\dfrac{1}{2}xf(2x)\Big|_0^1-\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(2x)dx=2-\dfrac{1}{4}\int_0^2 f(t)dt=\dfrac{3}{4}$

2. $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx$

解：原式$=\int_{\frac{1}{e}}^1\left(-\ln x\right)dx+\int_1^e\left(\ln x\right)dx=-x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^1+\int_{\frac{1}{e}}^1 1dx+x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e 1dx=2(1-e^{-1})$

3. 已知曲线 C 的方程为 $y=f(x)$，点 $(3,2)$ 是它的一个拐点，直线 l_1,l_2 分别是曲线 C 在点 $(0,0)$ 与 $(3,2)$ 处的切线，其交点为 $(2,4)$。设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数，计算定积分 $\int_0^3(x^2+x)f'''(x)dx$

解：由于曲线的拐点为 $(3,2)$，所以有 $f''(3)=0$；

由于曲线过点 $(0,0)$ 与 $(3,2)$，所以有 $f(0)=0, f(3)=2$；

因过点 $(0,0)$ 与 $(3,2)$ 的切线交点为 $(2,4)$，所以 $f'(0)=\dfrac{4-0}{2-0}=2$，$f'(3)=\dfrac{4-2}{2-3}=-2$。

$$\int_0^3(x^2+x)f'''(x)dx=\int_0^3(x^2+x)df''(x)=\left(x^2+x\right)f''(x)\Big|_0^3-\int_0^3(2x+1)f''(x)dx$$

$$=0-\int_0^3(2x+1)df'(x)=-\left(2x+1\right)f'(x)\Big|_0^3+\int_0^3 2f'(x)dx$$

$$=-\left(2x+1\right)f'(x)\Big|_0^3+\int_0^3 2f'(x)dx$$

$$=14+2f(x)\Big|_0^3=18$$

4. 求$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$

解 先用换元法.令$\sqrt{x}=t$,则 $x=t^2$,$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$,且

当 $x=0$ 时,$t=0$;当 $x=1$ 时,$t=1$.

于是 $\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = 2\int_0^1 t\mathrm{d}(\mathrm{e}^t)$

$$=2([t\mathrm{e}^t]_0^1-\int_0^1 \mathrm{e}^t\mathrm{d}t)=2(\mathrm{e}-[\mathrm{e}^t]_0^1)$$

$$=2[\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)]=2.$$

5. 求$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

$$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_1^4 2\ln x\mathrm{d}\sqrt{x}=[2\sqrt{x}\ln x]_1^4-\int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$=8\ln 2-[4\sqrt{x}]_1^4=4(2\ln 2-1).$$

6. 求$\int_0^\pi (x\sin x)^2dx$

$$\int_0^\pi (x\sin x)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^\pi x^2(1-\cos 2x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{4}\int_0^\pi x^2\mathrm{d}(\sin 2x)$$

$$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{4}[x^2\sin 2x]_0^\pi+\frac{1}{2}\int_0^\pi x\sin 2x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{4}\int_0^\pi x\mathrm{d}(\cos 2x)$$

$$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{4}[x\cos 2x]_0^\pi+\frac{1}{4}\int_0^\pi \cos 2x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}.$$

7. 求$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}dx$

解：$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}dx=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} xd\cot x=-x\cot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cot xdx$

$$=-\frac{\sqrt{3}\pi}{9}+\frac{\pi}{4}+\ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{\sqrt{3}\pi}{9}+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

8. 求$\int_0^\pi x\cos 3xdx$

解：$\int_0^\pi x\cos 3xdx=\frac{1}{3}\int_0^\pi xd\sin 3x=\frac{1}{3}x\sin 3x\Big|_0^\pi-\frac{1}{3}\int_0^\pi \sin 3xdx=\frac{1}{9}\cos 3x\Big|_0^\pi=-\frac{2}{9}$

9. 求$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos 2x}dx$

解：$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos 2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{2}d\tan x=\frac{1}{2}x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x dx$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi-2\ln 2}{8}$$

四、定积分的应用

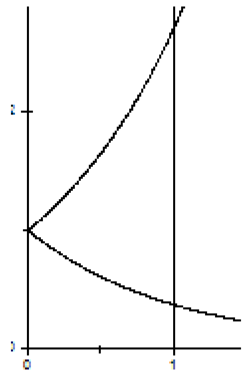
1. 计算由曲线$x=1$，$y=e^x$，$y=e^{-x}$所围成平面图形的面积及其绕x轴旋转一周而得的旋转体的体积。

解：作函数图象如右，交点为$(1,e),(1,\frac{1}{e})$

所围图形的面积为 $S=\int_0^1\left(e^x-e^{-x}\right)dx=e+\frac{1}{e}-2$

如围绕x轴旋转一周，所得体积为

$$V=\int_0^1\left(\pi\left(e^x\right)^2-\pi\left(e^{-x}\right)^2\right)dx=\frac{\pi}{2}\left(e^2+\frac{1}{e^2}-2\right)$$



2. 设平面图形D由曲线$y=\sqrt{x-1}$及其过原点的切线和x轴所围成。

1） 求该平面图形的面积。

2） 求所围成的平面图形绕x轴旋转一周所得的旋转体体积

解：作图如右，设切点为$(x_0,\sqrt{x_0-1})$，

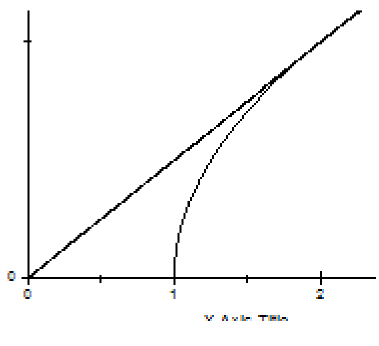
则斜率为$\frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}=\frac{\sqrt{x_0-1}}{x_0}$，解得

$x_0=2$，从而切线方程为$y=\frac{x}{2}$

所围图形的面积为　$S=\int_0^1\left(y^2+1-2y\right)dy=\frac{1}{3}$

围绕x轴旋转一周，所得体积为

$$V=\int_0^2\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2dx-\int_1^2\pi\left(\sqrt{x-1}\right)^2dx=\frac{\pi}{6}$$



3. 计算抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围成的图形的面积

解　这个图形如图 6－3 所示．为了定出这图形所在的范围，先求出所给抛物线和直线的交点．解方程组

$$\begin{cases} y^2=2x, \\ y=x-4, \end{cases}$$

得交点(2，－2)和(8,4)，从而知道这图形在直线 $y=-2$ 及 $y=4$ 之间．

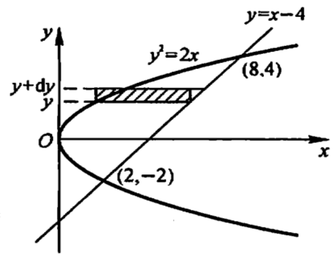


图　6－3

现在，选取纵坐标 y 为积分变量，它的变化区间为[－2,4]（读者可以思考一下，取横坐标 x 为积分变量，有什么不方便的地方）．相应于[－2,4]上任一小区间[y, $y+\mathrm{d}y$]的窄条面积近似于高为 $\mathrm{d}y$、底为 $(y+4)-\frac{1}{2}y^2$ 的窄矩形的面积，从而得到面积元素

$$\mathrm{d}A=\left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}y.$$

以 $\left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}y$ 为被积表达式，在闭区间[－2,4]上作定积分，便得所求的面积为

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{4}\left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}y \\ &= \left[\frac{y^2}{2}+4y-\frac{y^3}{6}\right]_{-2}^{4} \\ &= 18. \end{aligned}$$

4. 抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 及其在点 $(0,-3)$ 与 $(3,0)$ 处的切线所围成的面积

解　首先求得导数 $y'|_{x=0}=4$，$y'|_{x=3}=-2$，故抛物线在点(0,－3)，(3,0)处的切线分别为 $y=4x-3$，$y=-2x+6$，容易求得这两条切线交点为 $\left(\frac{3}{2},3\right)$（如图 6-6），因此所求面积为

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{3}{2}}[4x-3-(-x^2+4x-3)]\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^{3}[-2x+6-(-x^2+4x-3)]\mathrm{d}x \\ &= \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

5. 求由 $y=x^2, x=y^2$ 所围成的图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积

解　(1) $V=\int_0^1[\pi(\sqrt{y})^2-\pi(y^2)^2]\mathrm{d}y=\frac{3}{10}\pi.$

五、关于定积分的证明

1. 证明 $\int_x^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{1}{1+x^2}dx$　（$x>0$）

证明：等式左边令 $t=\frac{1}{x}$，则 $\int_x^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{\frac{1}{x}}^1\frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}\left(-\frac{dt}{t^2}\right)=\int_1^x\frac{1}{1+t^2}dt$ 。等于右边。

2. 设 $f(x)$ 为连续函数，证明 $(b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)dx=\int_a^b f(x)dx$

证明：等式左边令 $t=a+(b-a)x$，则 $(b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)dx=(b-a)\int_a^b f(t)\dfrac{dt}{b-a}$。等于右边。

3. 证明等式 $\int_0^a x^3 f(x^2)dx=\dfrac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx$，其中 $f(x)$ 为连续函数，$a>0$。并用上面的结果计算积分 $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^3\sin x^2 dx$

证明：等式左边令 $t=x^2$，有：$\int_0^a x^3 f(x^2)dx=\int_0^{a^2} t^{\frac{3}{2}} f(t)\dfrac{dt}{2\sqrt{t}}=\dfrac{1}{2}\int_0^{a^2} tf(t)dt$。等于右边。

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^3\sin x^2 dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd\cos x=-\frac{1}{2}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\frac{1}{2}$$

4. 若 $f(x)$ 为连续函数，证明

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

（2）$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

证 （1）设 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则 $dx=-dt$，且

当 $x=0$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$；当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$t=0$.

于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx&=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.\end{aligned}$$

（2）设 $x=\pi-t$，则 $dx=-dt$，且

当 $x=0$ 时，$t=\pi$；当 $x=\pi$ 时，$t=0$.

于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx&=-\int_{\pi}^0(\pi-t)f[\sin(\pi-t)]dt\\&=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt\\&=\pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt-\int_0^{\pi} tf(\sin t)dt\\&=\pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx-\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx,\end{aligned}$$

所以 $$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$

5. 设 $x>0$，证明：$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt+\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}$

证明：令 $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt+\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt$ 。

由于 $f(1)=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt+\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt=2\arctan 1=\frac{\pi}{2}$

且 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\equiv 0$，

由中值定理知：$f(x)\equiv\frac{\pi}{2}$

第六部分 微分方程

一、求下列微分方程的解

1. $y'=e^{x+y}$

解：方程为可分离变量的一阶微分方程，

方程分离变量得：$e^{-y}dy=e^x dx$

两端积分：$\int e^{-y}dy=\int e^x dx$

得：$-e^{-y}=e^x+C_1$

整理得：$e^{-y}+e^x=C$

2. $y'=2xy$，　　(7) 求通解

解　方程(7)是可分离变量的，分离变量后得

$$\frac{dy}{y}=2x\,dx,$$

两端积分
$$\int\frac{dy}{y}=\int 2x\,dx,$$

得
$$\ln|y|=x^2+C_1,$$

从而
$$y=\pm e^{x^2+C_1}=\pm e^{C_1}e^{x^2}.$$

因 $\pm e^{C_1}$ 是任意非零常数，又 $y\equiv 0$ 也是方程(7)的解；故得方程(7)的通解

$$y=Ce^{x^2}.$$

3. $xy'-y\ln y=0$，求通解

解 （1）原方程为 $x\dfrac{dy}{dx}-y\ln y=0$，分离变量得

$$\frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{x},$$

两端积分 $$\int\frac{dy}{y\ln y}=\int\frac{dx}{x},$$

得 $$\ln|\ln y|=\ln|x|+\ln C_1=\ln|C_1x|\ (C_1>0),$$

即 $$\ln y=\pm C_1x,$$

故通解为 $$\ln y=Cx,\text{即 } y=e^{Cx}①.$$

---

① 由于 $y\equiv1$ 也是原方程 $xy'-y\ln y=0$ 的解，因此方程的解 $\ln y=\pm C_1x$ 中 C_1 可以取作 0，从而通解为 $\ln y=Cx$（C 是任意常数），即 $y=e^{Cx}$. 以下诸题通解中的常数 C 也有类似情况，但不再一一说明了.

4. $\cos x\sin ydx+\sin x\cos ydy=0$，求通解

（8）原方程分离变量，得 $$\frac{\cos y}{\sin y}dy=-\frac{\cos x}{\sin x}dx,$$

两端积分，得 $$\ln|\sin y|=-\ln|\sin x|+\ln C_1,$$

即 $$\ln|\sin y\sin x|=\ln C_1,$$

或写成 $$\sin y\sin x=\pm C_1$$

故原方程的通解为 $$\sin y\sin x=C.$$

5. $(y+1)^2\dfrac{dy}{dx}+x^3=0$，求通解

（9）原方程分离变量，得 $$(y+1)^2dy=-x^3dx,$$

两端积分，得 $$\frac{1}{3}(y+1)^3=-\frac{1}{4}x^4+C_1.$$

故原方程的通解为 $$3x^4+4(y+1)^3=C\ (C=12C_1).$$

6. $y'=e^{2x-y}$ 满足 $y(0)=0$ 的特解

解 （1）分离变量，得 $$e^ydy=e^{2x}dx,$$

两端积分，得 $$e^y=\frac{1}{2}e^{2x}+C,$$

由 $y|_{x=0}=0$，得 $$1=e^0=\frac{1}{2}e^0+C,$$

故 $C=\dfrac{1}{2}$，即得 $$e^y=\frac{1}{2}(e^{2x}+1),$$

于是所求特解为 $$y=\ln\frac{e^{2x}+1}{2}.$$

7. $(1-x^2)y-xy'=0$ 满足初始条件 $y(1)=1$ 的特解

解：$\underline{y=xe^{1-\frac{x^2}{2}}}$

8. 设 $y=y(x)$ 在点 x 处的增量为 $\Delta y=\dfrac{y}{1+x}\Delta x+\alpha$，且当 $\Delta x\to0$ 时，α 是 Δx 的高阶无

穷小，$y(0)=1$，则 $y(1)$ 的值为（D）

A. -1　　**B.** 0　　**C.** 1　　**D.** 2

9. $y'+x+xy^2=1+y^2$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 的特解

解：$y'=\left(1+y^2\right)\left(1-x\right)$　为可分离变量的方程

$$\frac{dy}{1+y^2}=\left(1-x\right)dx$$

两边同时求不定积分得：$\arctan y=x-\dfrac{x^2}{2}+C$

代入满足的初始条件知：$C=\dfrac{\pi}{4}$

特解为：$y=\tan\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

10. 当 $\Delta x\to 0$ 时，α 是比 Δx 较高阶的无穷小量，函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量

$\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{x^2+x+1}+\alpha$，且 $y(0)=\pi$，则 $y(1)=$ $\underline{\pi+e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{18}}}$

11. 微分方程 $y'=\dfrac{3x^2y}{1+x^3}$ 的通解为 $\underline{y=C(1+x^3)}$

二、求下列微分方程的解

1. 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x+1}=\left(x+1\right)^{\frac{5}{2}}$ 的通解

解　这是一个非齐次线性方程.先求对应的齐次方程的通解.

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=0,$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{2dx}{x+1},$$

$$\ln y=2\ln(x+1)+\ln C,$$

$$y=C(x+1)^2.$$

用常数变易法，把 C 换成 u，即令

$$y=u(x+1)^2, \tag{6}$$

那么
$$\frac{dy}{dx}=u'(x+1)^2+2u(x+1),$$

代入所给非齐次方程，得

$$u'=(x+1)^{\frac{1}{2}}.$$

两端积分，得
$$u=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

再把上式代入(6)式，即得所求方程的通解为

$$y=(x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right].$$

2. 求微分方程$\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$的通解

解 （1）$y=\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^{-x}\cdot \mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{-x}\left(\int \mathrm{e}^{-x}\cdot \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+C\right)$

$=\mathrm{e}^{-x}(x+C).$

3. 求微分方程$\frac{dy}{dx}+y\cos x=e^{-\sin x}$的通解

$$y=\mathrm{e}^{-\int \cos x\mathrm{d}x}\left(\int \mathrm{e}^{-\sin x}\cdot \mathrm{e}^{\int \cos x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-\sin x}\left(\int \mathrm{e}^{-\sin x}\cdot \mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x+C\right)$$
$$=e^{-\sin x}(x+C).$$

4. 求微分方程$(x^2-1)y'+2xy-\cos x=0$的通解

将原方程写成 $y'+\frac{2x}{x^2-1}y=\frac{\cos x}{x^2-1}$，**则**

$$y=\mathrm{e}^{-\int \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x}\left(\int \frac{\cos x}{x^2-1}\mathrm{e}^{\int \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$
$$=\frac{1}{x^2-1}\left[\int \frac{\cos x}{x^2-1}(x^2-1)\mathrm{d}x+C\right]=\frac{1}{x^2-1}\left(\int \cos x\mathrm{d}x+C\right)$$
$$=\frac{\sin x+C}{x^2-1}.$$

5. 求微分方程$\frac{dy}{dx}+2xy=4x$的通解

$$y=\mathrm{e}^{-\int 2x\mathrm{d}x}\left(\int 4x\mathrm{e}^{\int 2x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-x^2}\left(\int 4x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x+C\right)$$
$$=\mathrm{e}^{-x^2}(2\mathrm{e}^{x^2}+C)=2+C\mathrm{e}^{-x^2}.$$

6. 求微分方程$y'-y\tan x=\sec x$满足初始条件$y|_{x=0}=0$的特解

解 （1）$y=\mathrm{e}^{\int \tan x\mathrm{d}x}\left(\int \sec x\mathrm{e}^{-\int \tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$

$=\mathrm{e}^{-\ln|\cos x|}\left(\int \sec x\mathrm{e}^{\ln|\cos x|}\mathrm{d}x+C\right)=\frac{1}{\cos x}\left(\int \sec x\cdot\cos x\mathrm{d}x+C\right)$

$=\frac{x+C}{\cos x},$

代入初始条件$x=0,y=0$，得$C=0$. 故所求特解为

$$y=\frac{x}{\cos x}.$$

7. 求微分方程$y'+y\cos x=e^{-\sin x}$满足初始条件$y|_{x=0}=1$的特解

解：此为一阶线性微分方程

$p(x)=\cos x, q(x)=e^{-\sin x}$

其通解为：$y=\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)e^{-\int p(x)dx}$

$=Ce^{-\sin x}+xe^{-\sin x}$

8. 设连续函数 $y(x)$ 满足方程 $y(x)=\int_0^x y(t)dt+e^x$，求 $y(x)$

解：方程两边同时求导可得：$y'(x)=y(x)+e^x$

原方程两边代入 $x=0$，得上一微分方程的初始条件为：$y(0)=1$

解此一阶常系数非奇次微分方程

得：$y(x)=(x+1)e^x$

9. 已知曲线 l 通过点 $(\frac{\pi}{2},1)$ 且 l 上任一点处切线的斜率为 $\frac{1}{x}(\sin x-y)$，求曲线的方程

解：由导数的几何意义知：曲线满足如下的微分方程 $y'=\frac{1}{x}(\sin x-y)$

即：$y'+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$ 且满足条件：$y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=1$

此为一阶线性微分方程，所以解为：

$$y=e^{-\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{1}{s}ds}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}e^{\int_{\frac{\pi}{2}}^{s}\frac{1}{t}dt}\frac{\sin s}{s}ds+1=-\frac{\cos x}{x}+1$$

10. 下列方程中以 $y=C\sin x+\cos x$ 为通解的方程是：C

A $y''+y=0$； **B** $y'-y\cot x=2\sin x$；

C $y'-y\cot x=-2\sin x$； **D** $y'-y\tan x=-2\sin x$.

解：由通解得 $C=\frac{y-\cos x}{\sin x}$。两边同时求导得可得答案 **C**；或者直接将通解代入四个方程知结果为 **C**

三、求下列微分方程的解

1. 已知 $y_1=\sin\omega x$，$y_2=2\sin\omega x$ 是微分方程 $y''+py'+qy=0$（p 为常数）的的两个解，则 $y=C_1y_1+C_2y_2$（C_1,C_2 为任意常数）是方程的（A）

A．解，但不是通解 **B**．通解 **C**．不是解 **D**．特解

2. 求微分方程 $y''-y'-6y=0$ 的通解

解：所给微分方程的特征方程为：$r^2-r-6=0$

其根为 $r_1=-2,r_2=3$

因此所求方程的通解为：$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}$

3. 求微分方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解

解 所给微分方程的特征方程为

$$r^2-2r-3=0,$$

其根 $r_1=-1, r_2=3$ 是两个不相等的实根,因此所求通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}.$$

4. 求微分方程 $y''-2y'+y=0$ 的通解

解：所给微分方程的特征方程为：$r^2-2r+1=0$

其根为重根 $r_{1,2}=1$

因此所求方程的通解为：$y=C_1e^x+C_2xe^x$

5. 求微分方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解

解 所给方程的特征方程为

$$r^2-2r+5=0,$$

其根 $r_{1,2}=1\pm 2i$ 为一对共轭复根.因此所求通解为

$$y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

6. 求微分方程 $y''+6y'+13y=0$ 的通解

特征方程为 $r^2+6r+13=0$,解得 $r_{1,2}=-3\pm 2i$,故方程的通解为

$$y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

7. 微分方程 $y''-y'-2y=0$ 的通解为__________

解：所给微分方程的特征方程为：$r^2-r-2=0$

其根为 $r_1=-1, r_2=2$

因此所求方程的通解为：$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$

8. 求微分方程 $y''-4y'+3y=0$ 且满足 $y|_{x=0}=6$，$y'|_{x=0}=10$ 的通解

解 (1) 解特征方程 $r^2-4r+3=0$,得 $r_1=1, r_2=3$,故方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{3x},$$

且有

$$y'=C_1e^x+3C_2e^{3x}.$$

代入初始条件,得 $\begin{cases}C_1+C_2=6,\\C_1+3C_2=10,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}C_1=4,\\C_2=2.\end{cases}$ 故所求特解为

$$y=4e^x+2e^{2x}.$$

9. 求微分方程 $4y''+4y'+y=0$ 且满足 $y|_{x=0}=2$，$y'|_{x=0}=0$ 的通解

(2) 解特征方程 $4r^2+4r+1=0$，即 $(2r+1)^2=0$，得 $r_{1,2}=-\frac{1}{2}$，故方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{x}{2}},$$

且有

$$y'=\left(-\frac{C_1}{2}+C_2-\frac{C_2}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}.$$

代入初始条件，得 $\begin{cases}C_1=2,\\-\frac{C_1}{2}+C_2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}C_1=2,\\C_2=1.\end{cases}$ 故所求特解为

$$y=(2+x)e^{-\frac{x}{2}}.$$

致谢

本练习册是在张峰教授、罗琳教授和刘丽丽教授的支持与关注下，由谢晓强老师收集与整理完成，仅供上海第二工业大学 2015-2016 级学习微积分 A1 的学生课外练习使用。在此还要感谢方红老师，范懿老师，马志勇老师，高美娜老师，施汉明老师，沈国增老师，夏正威老师，张绍仪老师等微积分 A1 课程建设团队老师在本册制作过程中给予的帮助。

由于时间仓促，其中的错误在所难免，肯请读者在使用的过程中不吝指正。