

(4)CDMA 系统可以利用人类语言的间断性来实现语音激活技术,从而提高通信系统的容量。

CDMA 系统充分利用扩频技术来实现多个用户共享一个信道。当扩频码之间完全正交时,各用户之间的相关指数为零,接收到的信号可以完全解扩,不存在任何干扰。但是现实中完全正交的扩频码数量有限,这完全不能满足日益增长的通信用户量的需求。因此人们设计出一种不完全正交的伪正交码,但使用这种码在解扩时不能完全去除干扰,这种由扩频码不完全正交造成的干扰称之为多址干扰(MAI),也称为多用户干扰。解决这种干扰的方法就是本课题研究的主要内容——多用户检测技术。

## 1.2 课题的发展历史和研究现状

### 1.2.1 发展历史

多用户检测技术的思想最早在 1979 年由 K.S.Schneider 提出<sup>[1]</sup>。1983 年 R.Hchno 在文献[2]中对多用户干扰抵消进行研究,分析干扰用户的发送信息,利用其中有用信息来消除期望用户中存在的多址干扰,从而实现多用户检测,最后对多用户检测技术的发展趋势进行了展望。1986 年 S.Verdu 在文献[3]中设计出了最优多用户检测器,他将期望用户的检测问题看作等概率假设检验问题来处理,采用贝叶斯(Beyes)最大似然序列检测(MLSD)逼近单用户的接收性能。经分析,该方法能有效地克服“远-近”效应,大大提高了系统容量,推动了多用户检测技术的发展。

多用户检测技术发展至今已有三十余年的历史,在此期间,专家学者设计了很多种检测方法,其改进算法也层出不穷,这些方法各有优缺点。按照接收信号处理方式的不同可以将多用户检测分为线性多用户检测和非线性多用户检测,按照检测器需要的信息量的多少可以将多用户检测分为非盲多用检测和盲多用户检测,其具体分类如图 1.2.1 所示。

#### (1)最优多用户检测

最优多用户检测器采用贝叶斯(Beyes)后验概率最大化对接收信号进行最大似然估计。此检测器的优点是使每一个用户的误码率达到最小值,抗远近能力达到最小下界;最大的缺点是需要知道期望用户和干扰用户的所有信息,且计算复杂度与用户数成指数关系,计算量过大,当用户数增加时,计算复杂度成指数倍增加,在现实中根本无法实

现。

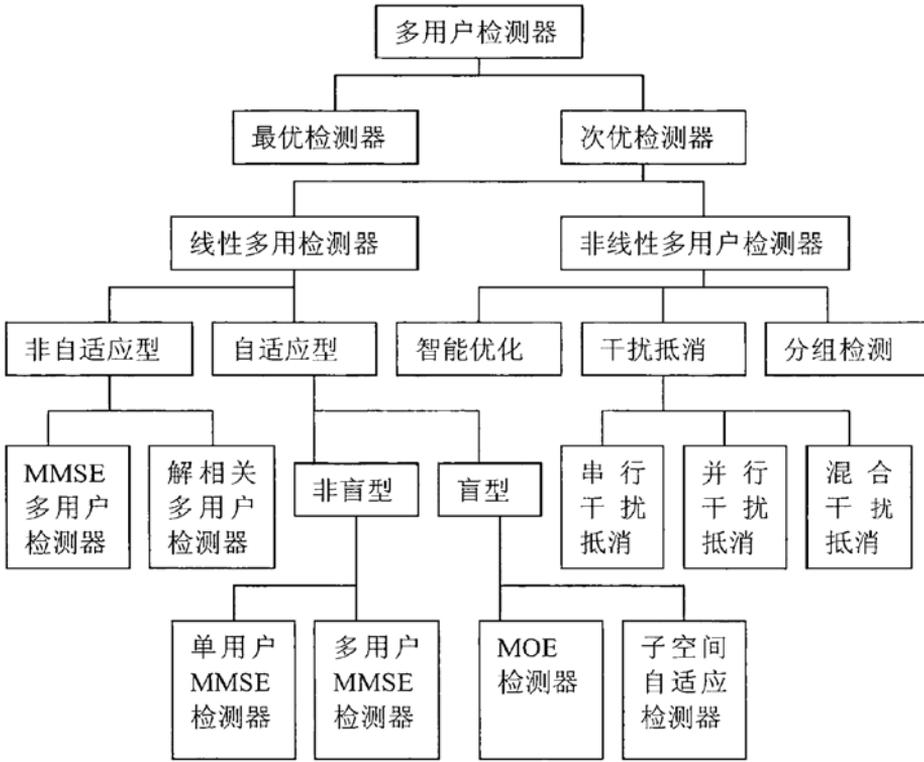


图 1.2.1 多用户检测分类图

Fig1.2.1 classification map of Multiuser detector

### (2) 解相关多用户检测

解相关多用户检测器<sup>[4]</sup>是通过对接接收信号扩频波形的相关矩阵求逆而获得的。该检测器与最优多用户检测器相比，只需要知道期望用户和干扰用户的扩频波形，定时信息和相对幅值即可，而且抗远近能力并没有减弱。但是解相关检测器没有考虑噪声的影响，所以在通信环境较差的情况下检测效果会急剧下降，而且该检测器需要对扩频码的相关矩阵求逆，计算量仍然很大。

### (3) 线性 MMSE 多用户检测

线性 MMSE 多用户检测器<sup>[5]</sup>是通过使期望用户的发送信号与其估计值之间的误差均方差值最小而得到。较之于解相关检测器，该检测器将噪声的影响考虑在内，所以当信道环境较差时有更好的检测效果。但是该检测器也需要进行矩阵求逆，这在工程上不易实现。

#### (4) 自适应多用户检测

为了解决矩阵求逆在工程上的实现, 通过对接收到的即时信息利用自适应迭代的方法来更新检测器系数, 这就是自适应多用户检测。自适应多用户检测加快检测器的计算速度, 但是在传输信号之前需要先传输训练序列, 当信道突然发生变化或者出现新的信道时, 需要重新发送训练序列来训练检测器系数, 这将造成频带资源的很大浪费。

#### (5) 盲自适应多用户检测

当信道发生变化时, 为了避免重新发送训练信息, 提高频带利用率, 我们只采用观测的数据对期望用户信号进行估计, 这种检测方法就是盲自适应多用户检测, 简称盲多用户检测<sup>[6]</sup>。盲多用户检测无需发送训练序列, 提高了频带利用率, 需要知道的先验信息较少, 适用范围广。

盲多用户检测方法有最小能量输出(MOE)检测和子空间检测。其中最小能量输出检测是通过使检测的输出能量最小来得到的。此种检测器只需要知道期望用户的观测数据就可以解调出期望用户信号, 但是与有训练序列的自适应检测器相比, 其收敛结果扰动大。基于子空间的盲多用户检测是对接收信号的相关矩阵进行分解, 得到信号子空间和噪声子空间, 在进行检测时, 只需要信号子空间的信息即可, 从而简化了盲多用户检测的计算复杂度。

### 1.2.2 研究现状

基于子空间的盲多用户检测<sup>[7]</sup>最早由王晓东于 1998 年提出, 基本思想是对接收信号的相关矩阵进行特征值分解, 将期望用户的扩频信号投影到信号子空间上, 利用信号子空间和噪声子空间的正交性, 通过子空间跟踪算法, 求解期望用户的信息。该检测器只需要知道用户的波形和期望用户的观测数据即可, 并且算法复杂度低。

子空间迭代的方法主要有四种<sup>[8]</sup>, 一是基于扰动理论的子空间跟踪, 该算法在接收到的即时信息中加入一个扰动因子来估计下一时刻的信息, 因此对扰动因子的选取尤为重要。该算法中旧数据的影响会持续很长时间, 且指数因子需要预先选择来调整与当前信息之间的相关程度。二是修正特征值分解及其递推更新, 该算法是利用滑动窗的更新方法, 先在数据矩阵上加一行然后从数据矩阵减去一行来更新特征值和特征向量。三是基于优化理论的子空间更新, 该算法是通过使期望用户信息与其在信号子空间的投影的方差最小而得到的。四是快速子空间分解, 该算法的基本出发点是: 样本协方差矩阵的

主特征向量的张成与其 Rayleigh\_Ritz 向量的张成二者是该矩阵的信号子空间的渐近等价估计, 利用 Lanczos 算法, 将协方差矩阵变换为三角矩阵, 从而写出矩阵的 Rayleigh\_Ritz 向量。

上述所述的子空间迭代方法中基于优化理论子空间迭代算法在盲多用户检测中最为常用。关于优化理论子空间跟踪算法主要有三种 PAST<sup>[9]</sup>, PASTd<sup>[8]</sup>, OPAST<sup>[10]</sup> 算法。其中 PAST 算法的收敛速度快, 仅仅相当于另外两种算法迭代时间的百分之三。但是其向量跟踪误差较大, 远远大于另外两种, 而且复杂度也比较高。PASTd 算法是将 PAST 算法中的特征向量矩阵的秩设为 1, 首先迭代出特征值最大的特征向量, 然后从相关矩阵中减去, 继续迭代出特征值次大的特征向量, 反复迭代即可得出所有用户的特征值和特征向量。其算法复杂度远远小于 PAST 算法和 OPAST 算法, 而且向量跟踪误差也明显减小, 但是其收敛速度明显减慢, 究其原因, 是因为在迭代过程中特征向量不完全正交造成的。因此在每次迭代时对特征向量进行一次正交化运算, 这就是 OPAST 算法。虽然 OPAST 算法的计算复杂度比 PAST 算法稍有提高, 但是向量跟踪误差明显减小。通过仿真表明, 对于较小的遗忘因子 OPAST 算法会出现发散现象, 当用户数增多的时候, 这种现象将更加明显。

近年来对上述的子空间跟踪迭代算法的改进各种各样, 各有优缺点, 其主要的改进方法如下: 文献[11][12]将 OPAST 算法和 PASTd 算法相结合, 在 PASTd 算法每一次迭代中对权值向量进行施密特 (Schmidt) 正交化, 从而提高 PASTd 的收敛速度。文献[13]中分析了不同遗忘因子的 OPAST 算法会出现发散现象的原因是由于特征向量在迭代过程中并不完全满足 Hermitian 正定矩阵条件, 从而产生了迭代误差, 随着迭代次数的增加, 误差越来越大。针对此原因, 文章中提出在计算  $Z(i)$  时, 只计算其上三角矩阵或者下三角矩阵, 然后在复制下去, 使其完全满足 Hermitian 正定矩阵条件, 从而使 OPAST 算法避免了发散现象。文献[14]中提出一种新的信息准则, 并根据此信息准则推导出一种 NIC 算法和改进的 PAST 算法, 其收敛性能要好于 Oja's 和 LMSER 算法。文献[15]中分析传统的指数窗代价函数只适用于慢变信道, 在快变信道的估计中效果变差, 文中提出一种滑动窗代价函数, 并根据此代价函数对 PAST 算法和 OPAST 算法进行改进, 使其适用于快变信道的多用户检测, 但是其算法的复杂度有所提高。文献[16]研究表明, LMS 算法的计算复杂度低, 但是其收敛速度取决于接收数据的相关矩阵特征值的分布, 而在具有远近效应的环境中, 特征值的分布很大, 所以盲多用户检测中 LMS 不能有效

地工作。RLS 算法的收敛速度比 LMS 算法的速度要快，但是其计算复杂度高。APA 可以平衡 LMS 和 RLS 的收敛速度和计算复杂度，该文献将 APA 算法应用到盲多用户检测中，并结合 PASTd 算法，提出了一种基于 APA-PASTd 的多用户检测器，在保证其检测性能良好的情况下，降低了算法复杂度。文献[17]将快速数据投影(FDPM)算法推广到复数域内，提出了复快速数据投影方法(CFDPM)，并将该方法应用于高斯噪声的抗干扰中。文献[18]对子空间跟踪算法在图像跟踪中进行研究，发现传统的子空间跟踪算法容易丢失图像所固有的结构信息和临域信息，因此本文提出了一种增量张量跟踪算法，并将其应用于目标跟踪当中。文献[19]将压缩投影逼近子空间(PASTd)算法与 Kalman 滤波算法相结合，提出了一种新的算法。此算法的计算复杂度要低于 RLS 算法和 Kalman 算法，收敛性能也比后者好的多。文献[20]对正交投影逼近子空间(OPAST)算法进行研究，发现当遗忘因子较小的时候，OPAST 算法将发散，究其原因是迭代累积误差造成的，因此该文在 OPAST 算法每次迭代过程中加入 Gram-Schmidt 正交化来降低误差积累，从而避免了 OPAST 算法发散的现象。文献[21]将逼近幂迭代用于子空间跟踪算法中，新算法利用一个适当的补偿矩阵递归更新主子空间，避免了特征值的分解过程在不增加复杂度的基础上，保证算法的全局收敛性。文献[22]根据幂迭代方法和一种新的投影逼近算法提出了 API 算法，其计算复杂度和 PAST, NIC, 和 NP3 算法相同，但对信号主子空间的估计效果更好。主要优点有：1.既可以由指数窗代价函数推得也可由滑动窗代价函数推得；2.在每一次迭代过程中都对  $W(t)$  进行一次正交化，降低误码率；3.PAST 算法和 OPAST 算法是 API 算法的特殊例子。文献[23]提出了一种改进的 PASTd 算法与 Kalman 滤波算法相结合的盲自适应多用户检测算法。文献[41]通过对双子空间方法的研究，针对其中的问题，提出了基于核的双子空间判别分析(KDS-DA)方法，并进一步设计了一种基于镶边矩阵求逆算法的快速 KDS-DA 特征求解算法。通过在 ORL 和 AR 人脸库上的实验验证了上述算法的有效性。文献[42]提出了一种完全数据驱动的具有可变遗忘因子子空间辨识的预测控制器设计方法。将遗忘因子修改为关于实测输出值与预测输出值的误差的可变函数，来调整采集数据的权重，提高识别灵敏度和控制效果。文献[43]提出了一种扩展形态学与正交子空间投影结合的端元自动提取方法。利用扩展膨胀和腐蚀操作，通过计算形态离心率指数进行高光谱数据的端元数据集计算。通过实验表明，提出的新方法能够实现无任何先验信息情况下图像端元的自动提取，并且能够有效地区分相似光谱端元。

### 1.3 本论文的内容安排

本论文针对基于优化理论子空间迭代算法的缺点从两个方面进行了改进，其主要内容安排如下：

第一章：绪论。第一节，课题研究的背景和意义。本节介绍了第三代移动通信给我们带来的方便，并对第三代移动通信的关键技术 CDMA 技术的优缺点进行了分析。第二节，课题的发展历史和研究现状。本节对多用户检测的发展历史进行了回顾，对各种多用户检测的基本思想进行了介绍，对各种检测器的优缺点进行了分析，对多用户技术的研究现状进行了概括。第三节，论文的内容安排。

第二章：多用户检测的基本理论。本章分为四节，第一节对多用户检测的模型进行介绍。第二节对多用户检测的性能指标进行分析。第三节对几种主要的多用户检测器进行了研究。第四节对第三节中提到的多用户检测器进行仿真比较。

第三章：基于双边代价函数的子空间迭代算法。第一节介绍了子空间的基本理论，第二节介绍基于子空间的盲多用户检测的基本理论，第三节给出了基于优化理论的子空间迭代算法。第四节提出了基于双边代价函数的子空间迭代算法

第四章：基于可变遗忘因子的 PASTd 算法。第一节介绍了 PAST 算法的两种改进算法 OPAST 算法和 PASTd 算法。第二节通过分析 PASTd 算法收敛性能的变化规律，提出了基于可变遗忘因子的 PASTd 算法。

第五章：总结与展望。本章对本论文提出的算法改进的优缺点进行总结，分析原因，提出本课题继续发展的方向。

## 第二章 多用户检测的基本理论

在 CDMA 系统中，由于多普勒频移的存在，不同用户之间并不同步，并且到达基站的时间延迟也不相同，这使得各用户的扩频码不能完全正交，出现多址干扰。由于无线信道存在阴影衰落现象，这使得用户到达基站的能量随着距离的增加而减小。当期望用户距基站的距离比干扰用户远的多时，其到达基站的能量远远小于干扰用户的能量，可能被淹没，这就是远近效应。因此多用户检测器的设计需要克服多址干扰和远近效应。

### 2.1 系统模型

首先我们介绍接收机接收信号的数学模型，可分为离散时间同步模型和离散时间非同步模型，我们重点研究同步模型。

#### 2.1.1 离散时间同步模型

多用户检测器是接收机的一个前端装置，其作用是让接收信号  $r(t)$  经过之后由连续信号转化为离散信号。在 CDMA 系统中，多个用户共享一个信道，所以接收到的信号  $r(t)$  是多个用户的叠加信号，因此需要先将其通过相应的匹配滤波器组分别得到各个用户信号，其中匹配滤波器组如图 2.1.1 所示。

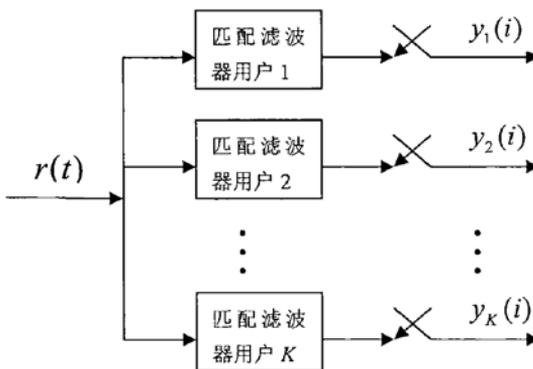


图 2.1.1 匹配滤波器组  
Fig2.1.1 Matched filters

首先给出同步模型的接收信号为：

$$r(t) = \sum_{k=1}^K A_k b_k(j) s_k(t - jT) + \sigma n(t), \quad t \in [jT, jT + T] \quad (2.1.1)$$

其中,  $A_k$  表示第  $k$  个用户的信号幅值;  $\{b_k(j) \in \{-1, +1\}\}$  是第  $k$  个用户发送的字符序列;  $s_k(t)$  是第  $k$  个用户的扩频波形,  $T$  是字符间隔(即码元间隔);  $n(t)$  是单位功率谱密度的高斯白噪声。

当所有发送的字符序列的概率相等时, 扩频波形中的  $j=0$ , 因此式 (2.1.1) 所示的同步接收信号模型可以简化为:

$$r(t) = \sum_{k=1}^K A_k b_k s_k(t) + \sigma n(t), \quad t \in [0, T] \quad (2.1.2)$$

由于两数列相乘的累加形式可以通过向量相乘来表示, 所以我们可以将式 (2.1.2) 所示的同步接收信号模型表示成向量的形式。令  $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_K]^T$ ,  $\mathbf{A} = \text{diag}[A_1, A_2, \dots, A_K]$ , 则式(2.1.2)的向量形式为:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{b} + \mathbf{n} \quad (2.1.3)$$

其中,  $\mathbf{R}$  为扩频波形的归一化的相关矩阵  $\mathbf{R} = E\{\mathbf{s}\mathbf{s}^T\} = [\rho_{jk}]_{j,k=1}^K$ , 其对角线元素  $\rho_{ii} = 1$ 。

当接收信号通过匹配滤波器组之后, 第  $k$  个用户所对应的匹配滤波器的输出信号为:

$$y_k(i) = A_k b_k(i) + \sum_{j=1, j \neq k}^K A_j b_j \rho_{jk} + n_k, \quad (2.1.4)$$

其中,  $\rho_{jk}$  是第  $j$  个用户与第  $k$  个用户特征波形的互相关, 定义为:

$$\rho_{jk} = \int_0^T s_j(t) s_k(t) dt \quad (2.1.5)$$

当  $j=k$  时,  $\rho_{jj} = 1, (j=1, \dots, K)$  表示特征波形的自相关。

式 (2.1.4) 中  $n_k$  表示特征波形与随机高斯白噪声的互相关, 定义为:

$$n_k = \sigma \int_0^T n(t) s_k(t) dt \quad (2.1.6)$$

其均值为零, 方差为  $\sigma^2$ 。

## 2.1.2 离散时间非同步模型

在非同步模型中, 由于各种衰落和干扰的存在, 不同用户到达接收机的时间不同,

并且相应的时间延迟也不同, 假设延迟时间  $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_k$ , 那么非同步模型的接收信号可以表示为:

$$r(t) = \sum_{i=-M}^M \sum_{k=1}^K A_k b_k[i] s_k(t - iT - \tau_k) + \sigma n(t) \quad (2.1.7)$$

非同步接收信号通过匹配滤波器组之后, 第  $k$  个用户所对应的匹配滤波器的输出信号为:

$$y_k[i] = A_k b_k[i] + \sum_{j < k} A_j b_j[i+1] \rho_{kj}(\tau_j - \tau_k) + \sum_{j < k} A_j b_j[i] \rho_{kj}(\tau_k - \tau_j) + \sum_{j > k} A_j b_j[i] \rho_{kj}(\tau_j - \tau_k) + \sum_{j > k} A_j b_j[i-1] \rho_{kj}(\tau_k - \tau_j) + n_k[i] \quad (2.1.8)$$

将式 (2.1.8) 所示的匹配滤波器的输出转化为向量的形式为:

$$y[i] = \mathbf{R}^T[1] \mathbf{A} b[i+1] + \mathbf{R}[0] \mathbf{A} b[i] + \mathbf{R}[1] \mathbf{A} b[i-1] + n[i] \quad (2.1.9)$$

式中, 零均值的随机高斯白噪声过程  $n[i]$  的自相关矩阵为

$$E\{n(i)n^T(j)\} = \begin{cases} \sigma^2 \mathbf{R}^T[1], j = i+1 \\ \sigma^2 \mathbf{R}[0], j = i \\ \sigma^2 \mathbf{R}[1], j = i-1 \\ \mathbf{0}, \text{其他} \end{cases} \quad (2.1.10)$$

其中, 矩阵  $\mathbf{R}[0]$  和  $\mathbf{R}[1]$  的第  $(j, k)$  个元素分别定义如下:

$$\mathbf{R}_{jk}[0] = \begin{cases} 1, j = k \\ \rho_{jk}(\tau_k - \tau_j), j < k \\ \rho_{kj}(\tau_j - \tau_k), j > k \end{cases} \quad (2.1.11)$$

$$\mathbf{R}_{jk}[1] = \begin{cases} 0, j \geq k \\ \rho_{kj}(\tau_j - \tau_k), j < k \end{cases} \quad (2.1.12)$$

将(2.1.9)式等号右前三项进行  $Z$  变换, 可以得到:

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}^T[1] \mathbf{A} b(z)z + \mathbf{R}[0] \mathbf{A} b(z) + \mathbf{R}[1] \mathbf{A} b(z)z^{-1} \\ &= (\mathbf{R}^T[1]z + \mathbf{R}[0] + \mathbf{R}[1]z^{-1}) \mathbf{A} b(z) \\ &= \mathbf{H}(z) \mathbf{A} b(z) \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

其中,  $\mathbf{H}(z) = \mathbf{R}^T[1]z + \mathbf{R}[0] + \mathbf{R}[1]z^{-1}$ 。

因此可以将式(2.1.9)所示的匹配滤波器的输出信号用  $Z$  变换过程表示如图 2.1.2 所示。

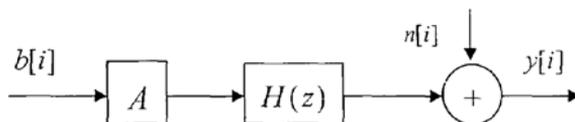


图 2.1.2 非同步 CDMA 信道

Fig2.1.2 Non-synchronous CDMA channel

## 2.2 性能测度

在设计多用户检测器时, 会面临一个问题, 那就是如何判断所设计的多用户检测器性能的好坏, 本节根据多用户检测的作用提出三个性能指标来评价多用户检测的性能。

### 1. 误码率

在大多数通信系统中, 经常使用在一定的信噪比范围内的误码率 (BER: bit error rate) 来评价其通信系统的质量, 在多用户检测中, 我们也使用误码率来评价其性能的好坏。

单用户系统的误码率<sup>[24]</sup>: 用户能量与噪声能量比值的平方值的正态分布, 用数学表达式表示为:

$$P_{su}(\sigma) = Q\left(\sqrt{\frac{E_k}{\sigma^2}}\right) \quad (2.2.1)$$

式 (2.2.1) 中, 下标  $su$  表示单用户系统,  $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2/2} du$  为正态分布函数。

在给出多用户系统的误码率之前我们先介绍有效能量的概念。

在具有相同噪声的信道中, 多用户系统中第  $k$  个用户的误码率达到单用户系统的误码率  $P_{su}(\sigma)$  时所需要的能量称为第  $k$  个用户的有效能量 (effective energy), 用符号  $e_k(\sigma)$  表示。

在多用户系统中, 由于多址干扰的存在, 误码率会比单用户系统的误码率大。因此用期望用户的有效能量  $e_k(\sigma)$  代替其实际能量, 其数学表达式和单用户误码率的相同:

$$P_k(\sigma) = Q\left(\sqrt{\frac{e_k(\sigma)}{\sigma^2}}\right) \quad (2.2.2)$$

## 2. 渐近多用户有效性

由上述分析可知，在多用户系统中，由于干扰用户的存在，多用户系统的误码率比单用户系统中的误码率高。因此在设计多用户检测器时应该考虑干扰用户对期望用户误码率的影响程度，我们将其称之为渐近多用户有效性，简称渐近有效性。

多用户有效性定义为：多用户系统的误码率达到单用户系统的误码率时所需要的能量与实际能量之比，即有效能量与实际能量之比

$$\eta_k(\sigma) = \frac{e_k(\sigma)}{E_k} \quad (2.2.3)$$

渐近多用户有效性定义为：当噪声方差趋于零，即  $\sigma \rightarrow 0$  时，多用户有效性的极限，记作  $\eta_k$

$$\eta_k = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{e_k(\sigma)}{E_k} = \sup \left[ 0 \leq r \leq 1; \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{P_k(\sigma)}{Q\left(\frac{\sqrt{rE_k}}{\sigma}\right)} \right] = \frac{2}{E_k} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left[ \sigma^2 \log \frac{1}{P_k(\sigma)} \right] \quad (2.2.4)$$

式 (2.2.4) 中  $\sup$  表示取上确界。

渐近多用户有效性  $0 \leq \eta_k \leq 1$ 。当噪声的能量趋于零且误码率不为零时，渐近多用户有效性的值为零。这表明，在没有任何噪声的情况下，单用户匹配滤波检测器的误码率也不可能为零。当渐近多用户有效性  $\eta_k = 1$  时，有效能量等于实际能量，这说明期望用户不受任何干扰用户的影响。

## 3. 抗远近能力

在第一章中我们分析了 CDMA 系统中存在的干扰，其中提到当干扰用户距基站比期望用户近的时候，可能会出现干扰用户淹没期望用户的情况，我们将这种现象称为远近效应。因此在设计多用户检测器的时候需要考虑其抗远近效应的能力。

抗远近能力定义为：在所有相关用户能力范围内测量到的最坏的情况下的渐近有效性，即

$$\tilde{\eta}_k = \inf_{\substack{E_j > 0 \\ j \neq k}} \eta_k \quad (2.2.5)$$

式 (2.2.5) 中  $\inf$  表示取下确界。

因为不能保证移动用户到达接收机的能量为常数，所以远近效应问题不可避免。因

此, 对非同步 CDMA 信道, 经常使用下面的抗远近能力,

$$\bar{\eta}_{k,i} = \inf_{\substack{E_j[i]>0 \\ (i,j) \neq (o,k)}} \eta_k \quad (2.2.6)$$

式 (2.2.6) 中,  $E_j[i]$  表示第  $j$  个用户第  $i$  个比特的接收能量。

### 2.3 典型的多用户检测器

多用户检测技术发展至今, 已经设计出很多种检测器。本节将介绍几种最简单的线性检测器, 并分析其优缺点, 最后给出相应的性能仿真。

#### 2.3.1 传统的多用户检测器

传统的多用户检测是让接收信号通过匹配滤波器之后直接进行门限判决, 对匹配滤波器组的输出信号不做任何处理, 将多用户系统简单地作为单用户系统来进行处理, 其判决结果为:

$$\hat{b} = \text{sgn}(y) \quad (2.3.1)$$

式 (2.3.1) 中  $y$  为匹配滤波器的输出信号, 数学表达式如式 (2.1.4) 所示。传统的多用户检测器的原理如图 2.3.1 所示。

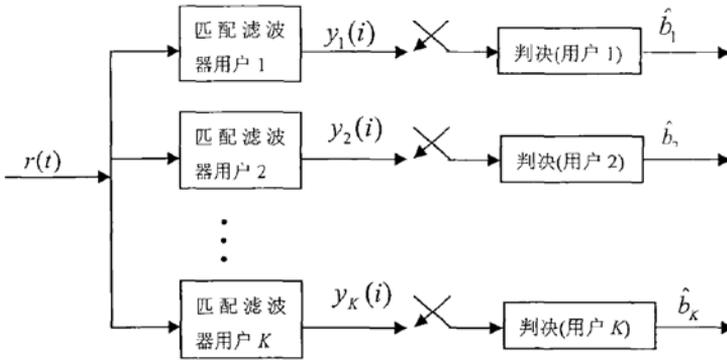


图 2.3.1 传统检测器  
Fig2.3.1 Conventional detector

由于传统的检测器完全忽略了多址干扰 (MAI) 对判决的影响, 未对其他用户的干扰作任何处理, 只是简单地将多用户系统看作单用户系统进行检测, 因此误码率高, 且远近效应明显。传统检测器的唯一优点是设计简单, 运算简便。

### 2.3.2 最优多用户检测器

最优多用户检测利用贝叶斯 (Bayes) 后验概率最大化的原理, 将  $K$  个用户的检测问题看作  $K$  元等概率的假设检验问题, 其目标是寻找使似然函数最大的序列, 是一种基于最大似然概率准则的多用户检测器。本节将先介绍 Bayes 后验概率的原理, 然后介绍最优多用户检测器<sup>[25]</sup>。

贝叶斯后验概率的原理是: 对于  $m$  元等概率的假设检验问题, 设  $x_1, x_2, \dots, x_m$  为期望值,  $r_1(t), r_2(t), \dots, r_m(t)$  为估计值, 那么该假设检验的最佳决策律是通过似然函数使估计值与期望值之间的错误概率区间最小化得到的, 其中似然函数的定义式为:

$$f[r | x_i] = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \int_0^T [r(t) - x_i]^2 dt\right) \quad (2.3.2)$$

下面将根据上述介绍的假设检验的原理来给出最优多用户检测器。

在同步 CDMA 系统中, 假设所有的用户数为  $K$ , 由式(2.1.3)知其接收信号为

$$r(t) = \sum_{k=1}^K A_k b_k s_k(t) + \sigma n(t),$$

我们可以把检测器字符向量  $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_K]^T$  的求解问题看

作是一个  $K$  元等概率假设检验的问题, 即

$$\left. \begin{aligned} H_1: r(t) &= \sum_{k=1}^K A_k b_k s_k(t) + \sigma n(t), \quad t \in [0, T] \\ &\vdots \\ H_K: r(t) &= \sum_{k=1}^K A_k b_k s_k(t) + \sigma n(t), \quad t \in [0, T] \end{aligned} \right\} \quad (2.3.3)$$

根据式 (2.3.2) 所示的似然函数可得, 检测器字符向量的最优解为:

$$[b_1, b_2, \dots, b_K] = \arg \max_{b_1, b_2, \dots, b_K} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \int_0^T [r(t) - \sum_{k=1}^K A_k b_k s_k(t)]^2 dt\right) \quad (2.3.4)$$

上式中  $\arg$  表示使后面式子的值最大或者最小时变量的值。因为指数幂的最大值可以等价于其指数的最大值, 所以式(2.3.4)可以化简为:

$$\begin{aligned} [b_1, b_2, \dots, b_K] &= \arg \max_{b_1, b_2, \dots, b_K} \left[ 2 \int_0^T \left[ \sum_{k=1}^K A_k b_k s_k(t) \right] r(t) dt - \int_0^T \left[ \sum_{k=1}^K A_k b_k s_k(t) \right]^2 dt \right] \\ &= \arg \max_{b_1, b_2, \dots, b_K} (2\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{y} - \mathbf{b}^T \mathbf{H} \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

式 (2.3.5) 中  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_K]^T$ ,  $\left\{ y_k = \int_0^T s_k(t)r(t)dt \right\}$ ,  $\mathbf{A} = \text{diag}[A_1, A_2, \dots, A_K]$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{A}$ ,

而  $\mathbf{R}$  是归一化的特征波形的互相关矩阵。

在非同步 CDMA 系统中, 只需要将非同步模型的基带接收信号代替同步系统的接收信号即可, 其似然函数为:

$$f[\{r(t), t \in [-MT, MT + 2T]\} | \mathbf{b}] = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \int_{-MT}^{MT+2T} [r(t) - S(t, \mathbf{b})]^2 dt\right) \quad (2.3.6)$$

式 (2.3.6) 中  $S(t, \mathbf{b}) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=-M}^M A_k b_k [i] s_k(t - iT - \tau_k)$ 。非同步 CDMA 所求的字符向量  $\mathbf{b}$  为使似然函数 (2.3.6) 式最大化的值。

通过分析, 最优多用户检测器可以使期望用户的误码率达到最小值, 使其渐近有效性最高, 使抗远近能力最强。但是由于最佳多用户检测器需要知道期望用户和干扰用户的所有先验信息, 这在实际通信场合下很难满足。最佳多用户检测的计算复杂度为  $O(2^K)$ , 计算量太大, 并且随着用户数的增加, 复杂度成指数倍增加。因此最佳多用户检测器只能达到理论上的最优值, 在实际中根本无法实现。

### 2.3.3 解相关检测器

多址干扰是由不同用户的扩频码不完全正交引起的。因此我们从这一点出发, 设计一种可以将扩频码之间的线性相关性解除掉的线性变化器, 从而实现扩频码之间的正交, 称为解相关检测器。

根据上述介绍的解相关检测的原理, 这组线性变换矩阵可以选择扩频波形互相关矩阵的逆矩阵。

在同步 CDMA 系统中, 扩频波形的矩阵为  $\mathbf{R}$ , 其数学表达式如 (2.1.3) 所示。当所有用户的扩频波形线性独立时, 其互相关矩阵可逆, 则解相关检测器为  $\mathbf{R}^{-1}$ 。当用户的扩频波形线性相关时, 相关矩阵为奇异矩阵, 不可求逆, 此时, 使用 Moore-Penrose 广义逆矩阵  $\mathbf{R}^\dagger$  来代替  $\mathbf{R}^{-1}$  作为解相关检测器。

在非同步 CDMA 系统中, 由式 (2.1.10) 和 (2.1.14) 可知, 滤波器组的输出为  $\mathbf{y} = \mathbf{H}(z)\mathbf{A}\mathbf{b}(z) + \mathbf{n}$ , 其中扩频波形的互相关矩阵的数学表达式为  $\mathbf{H}(z) = \mathbf{R}^T[1]z + \mathbf{R}[0] + \mathbf{R}[1]z^{-1}$ 。根据同步信道的解相关器的原理, 当  $\mathbf{H}(z)$  可逆时, 其

检测器为：

$$H^{-1}(z) = [R^T[1]z + R[0] + R[1]z^{-1}]^{-1} \quad (2.3.7)$$

当  $H(z)$  不可逆时，需要定义 Moore-Penrose 广义逆矩阵  $H(z)^\dagger$  代替  $H^{-1}(z)$  作为解相关检测器。

接收信号通过解相关多用户检测器的输出结果为：

$$\hat{b}_k = \text{sgn}[(R^{-1}y)_k] = \text{sgn}[(R^{-1}(RAb + n))_k] = \text{sgn}[(Ab + R^{-1}n)_k] \quad (2.3.8)$$

由式 (2.3.8) 可知，解相关检测器的检测结果不包含其他任何用户的干扰，只受背景噪声的影响。解相关检测器的原理如图 2.3.2 所示。

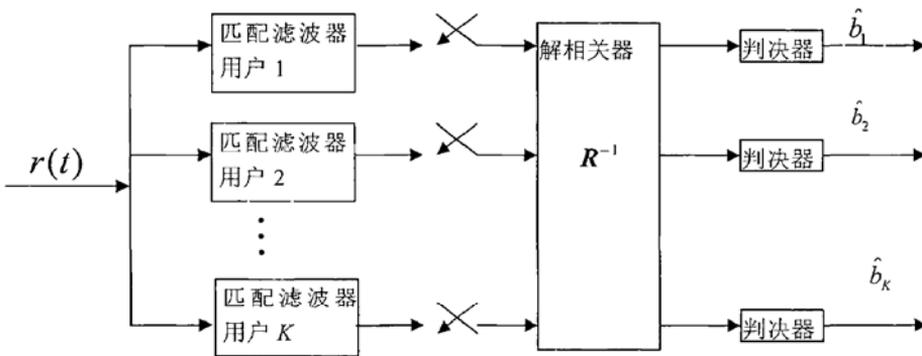


图 2.3.2 解相关检测器  
Fig2.3.2 Decorrelating detector

经分析发现，解相关多用户检测器的抗远近能力与最优多用户检测器相同，但渐近有效性有所下降。由 2.3.2 节可知，最佳多用户检测需要知道期望用户和干扰用户的所有先验信息，而解相关检测器只需要知道所有用户的扩频波形即可，其计算复杂度为  $O(K^2)$  比最优多用户检测的计算量  $O(2^K)$  小的多。但是解相关检测器需要矩阵求逆，当用户数较多时计算量还是比较大，而且解相关检测器没有考虑噪声的影响，当噪声功率较大时，检测效果变差。

### 2.3.4 线性 MMSE 多用户检测器

最小均方误差 (MMSE) 多用户检测器是通过设计一个线性变换矩阵对期望用户的接收信号进行估计，使其与期望用户的发送信号的均方误差最小化<sup>[26] [27]</sup>。线性 MMSE

多用户检测器的设计是一种优化问题。

令  $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_K]^T$  表示检测结果的期望向量,  $\mathbf{M} = [m_1, m_2, \dots, m_K]$  表示  $K$  个用户的线性检测器, 则线性 MMSE 多用户检测器就是寻找一个变换矩阵  $\mathbf{M}$  使代价函数

$$J(\mathbf{M}) = E\{\|\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{y}\|^2\} \quad (2.3.9)$$

最小化。式 (2.3.9) 中  $\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{b} + \mathbf{n}$  为滤波器组输出信号。

首先对代价函数 (2.3.9) 进行展开为:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{M}) &= E\{\|\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{y}\|^2\} \\ &= E\{(\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{y})(\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{y})^T\} \\ &= E\{\mathbf{b}\mathbf{b}^T\} - E\{\mathbf{b}\mathbf{y}^T\}\mathbf{M}^T - \mathbf{M}E\{\mathbf{y}\mathbf{b}^T\} + \mathbf{M}E\{\mathbf{y}\mathbf{y}^T\}\mathbf{M}^T \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

将  $\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{b} + \mathbf{n}$  代入式 (2.3.10), 由于噪声和字符数据不相关, 所以:

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{b}\mathbf{b}^T\} &= \mathbf{I} \\ E\{\mathbf{b}\mathbf{y}^T\} &= E\{\mathbf{b}\mathbf{b}^T\mathbf{A}\mathbf{R}\} = \mathbf{A}\mathbf{R} \\ E\{\mathbf{y}\mathbf{b}^T\} &= E\{\mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{b}\mathbf{b}^T\} = \mathbf{R}\mathbf{A} \\ E\{\mathbf{y}\mathbf{y}^T\} &= E\{\mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{b}\mathbf{b}^T\mathbf{A}\mathbf{R}\} + E\{\mathbf{n}\mathbf{n}^T\} = \mathbf{R}\mathbf{A}^2\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{R} \end{aligned}$$

将上式代入 (2.3.10) 中, 可以将其简化为:

$$J(\mathbf{M}) = \mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{M}^T - \mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{A} + \mathbf{M}(\mathbf{R}\mathbf{A}^2\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{R})\mathbf{M}^T \quad (2.3.11)$$

由于

$$\min\{\|\mathbf{x}\|^2\} = \min\{\text{tr}(\mathbf{x}\mathbf{x}^T)\} \quad (2.3.12)$$

其中,  $\text{tr}$  为矩阵的迹: 矩阵对角线元素之和。所以

$$\min J(\mathbf{M}) = \min\{\text{tr}E\{\|\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{y}\|^2\}\} \quad (2.3.13)$$

令  $\frac{d}{d\mathbf{M}}\text{tr}[\text{cov}(\mathbf{b} - \mathbf{M}\mathbf{y})] = 0$ , 由 (2.3.11) 式可得

$$\mathbf{M}_{MMSE}(\mathbf{R}\mathbf{A}^2\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{R}) = \mathbf{A}\mathbf{R} \quad (2.3.14)$$

假设矩阵  $\mathbf{R}$  为非奇异, 则式 (2.3.14) 可化为:

$$\mathbf{M}_{MMSE}(\mathbf{R}\mathbf{A}^2 + \sigma^2\mathbf{I}) = \mathbf{A} \quad (2.3.15)$$

由式 (2.3.15) 可得线性 MMSE 多用户检测器为:

$$\mathbf{M}_{MMSE} = \mathbf{A}(\mathbf{R}\mathbf{A}^2 + \sigma^2\mathbf{I})^{-1} \quad (2.3.16)$$

$$= (\mathbf{R} + \sigma^2\mathbf{A}^{-2})^{-1} \quad (2.3.17)$$

其中，式 (2.3.16) 为 MMSE 检测器的第一种表示形式，适用于自适应实现，式 (2.3.17) 为 MMSE 检测器的第二种表示形式，方便与解相关检测器比较。线性 MMSE 多用户检测的原理如图 2.3.3 所示。

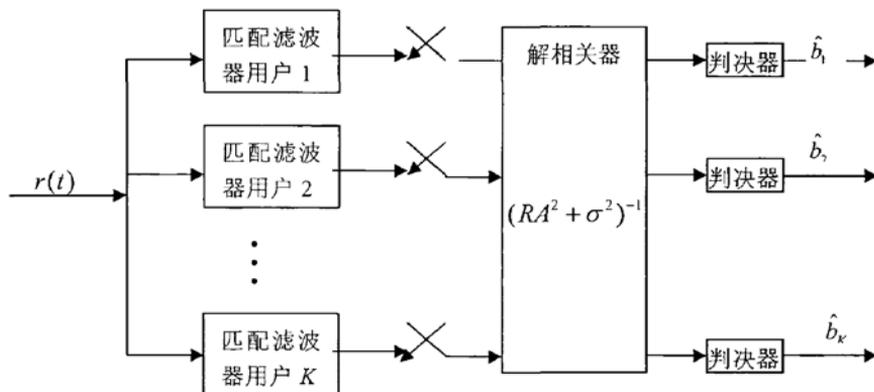


图 2.3.3 线性 MMSE 多用户检测器  
Fig2.3.3 Linear MMSE multiuser detector

与解相关检测器相比，线性 MMSE 检测器考虑了噪声的影响，所以在噪声功率较大的信道中，线性 MMSE 检测器有更好的检测效果。

## 2.4 性能仿真

本节对 2.3 节提到的各种多用户检测器进行性能仿真，验证其特性，比较其优缺点。下面从四个方面分析各种检测器的性能变化情况：一，分析各种检测器的误码率随着信噪比的变化情况；二，分析各种检测器受干扰用户个数的影响程度；三，分析各种检测器受噪声功率的影响程度；四，分析各种检测器受干扰用户能量的影响程度。

仿真实验模型的参数如下：本实验中扩频码采用 31 位的 Gold 码，用户 1 为期望用户，噪声为加性高斯白噪声，其标准方差  $\sigma = 1.4$ ，发送码元个数为 2000，干扰用户数分别选取 15 个和 25 个，其功率相等，为噪声功率的 10 倍。误码率结果采用蒙特卡罗方法求 20 次结果的平均值。

仿真 1：各种多用户检测器的误码率 (BER) 随着信噪比 (SNR) 的变化情况，其性能变化曲线如图 2.4.1 和 2.4.2 所示。

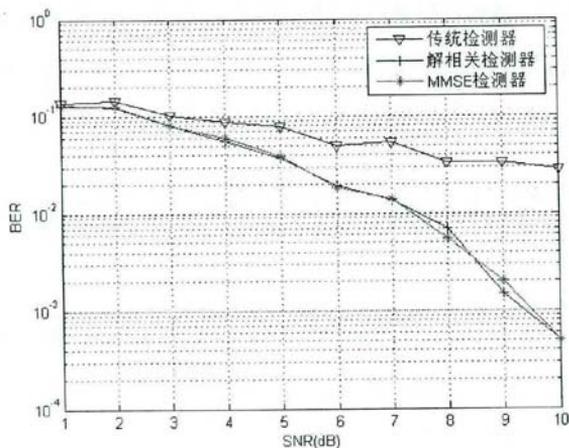


图 2.4.1 干扰用户  $K=15$  时, 误码率 (BER) 随信噪比 (SNR) 的变化曲线  
Fig2.4.1 When  $K=15$ , the BER performance diagram as SNR changes

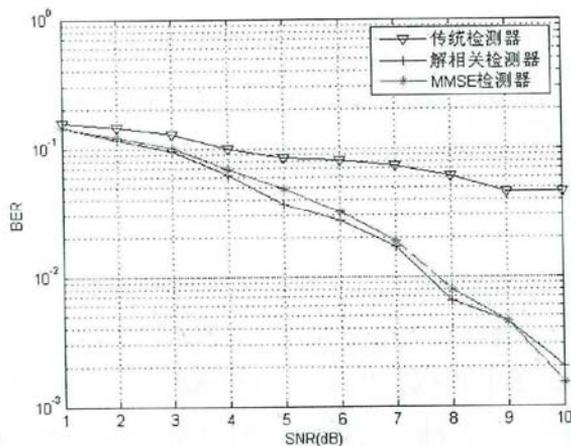


图 2.4.2 干扰用户  $K=25$  时, 误码率 (BER) 随信噪比 (SNR) 的变化曲线  
Fig2.4.2 When  $K=25$ , the BER performance diagram as SNR changes

由图 2.4.1 和图 2.4.2 可以看出, 随着信噪比的增大, 解相关检测器和 MMSE 检测器的误码率要明显小于传统的多用户检测器, 解相关检测器和 MMSE 检测器的误码率几乎相等。当干扰用户为 15, 信噪比为 10dB 时, 传统检测器的误码率介于  $10^{-1}$  和  $10^{-2}$  之间, 解相关检测器和 MMSE 检测器的误码率介于  $10^{-3}$  和  $10^{-4}$  之间。当干扰用户为 25, 信噪比为 10dB 时, 传统检测器的误码率介于  $10^{-1}$  和  $10^{-2}$  之间, 但比干扰用户为 15 时大, 解相关检测器和 MMSE 检测器的误码率约等于  $10^{-3}$ 。由此可以得知, 解相关检测器和

MMSE 检测器的检测效果比传统检测器检测效果好的多,但是随着干扰用户的增加,其检测性能会有所下降。

仿真 2: 各种多用户检测器的误码率 (BER) 随着用户数的变化情况,其性能变化曲线如图 2.4.3 和 2.4.4 所示。

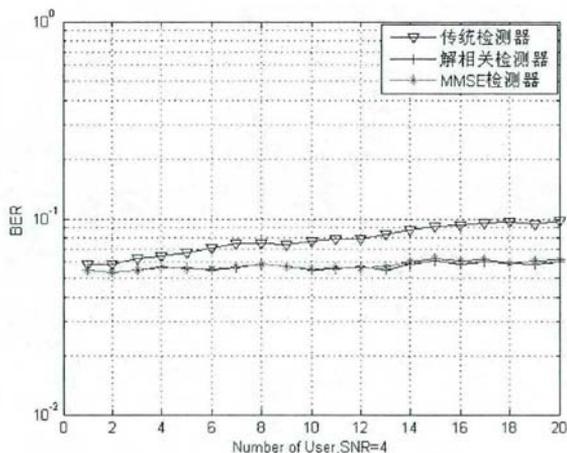


图 2.4.3 当 SNR=4dB 时, 误码率 (BER) 随信用户数的变化曲线

Fig2.4.3 When SNR=4dB,the BER performance diagram as number of users changes

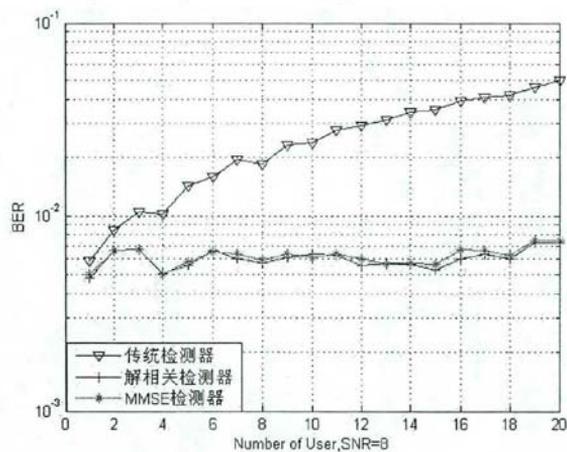


图 2.4.4 SNR=8dB 时, 误码率 (BER) 随信用户数的变化曲线

Fig2.4.4 When SNR=8dB,the BER performance diagram as number of users changes

由图 2.4.3 和图 2.4.4 可以看出,随着干扰用户的增加,多用户检测器的误码率将增大。在图 2.4.3 中,信噪比 SNR=4dB 时,误码率随着用户数的变化只是稍微增加,变化不明显。在图 2.4.4 中,信噪比 SNR=8dB 时,误码率随着用户数的变化明显,尤其是传统多用户检测器。由此可知,多用户检测器的性能受到干扰用户的影响,当干扰用户增

加时，检测性能下降。其中传统检测器受用户数的影响尤为明显，而解相关检测器和 MMSE 检测器只有稍许影响。

仿真 3：各种多用户检测器的误码率 (BER) 随着噪声功率的变化情况，其性能变化曲线如图 2.4.5 和 2.4.6 所示。

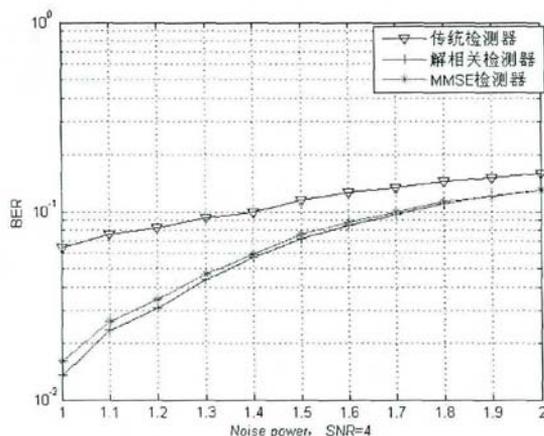


图 2.4.5 SNR=4dB 时，误码率 (BER) 随着噪声功率的变化曲线

Fig2.4.5 When SNR=4dB, the BER performance diagram as noise power changes

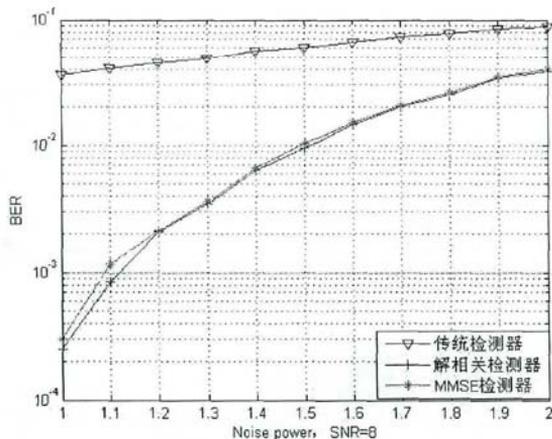


图 2.4.6 SNR=8dB 时，误码率 (BER) 随着噪声功率的变化曲线

Fig2.4.6 When SNR=8dB, the BER performance diagram as noise power changes

由图 2.4.5 和图 2.4.6 可以看出，多用户检测器的误码率随着噪声功率的增大而变大。

在图 2.4.5 中，信噪比 SNR=4dB 时，解相关检测器和 MMSE 检测器的误码率由  $10^{-2}$  增大为  $10^{-1}$ 。在图 2.4.6 中，信噪比 SNR=8dB 时，解相关检测器和 MMSE 检测器的误码

率由 $10^{-3}$ 增大为 $10^{-1}$ 。由此可以看出，多用户检测器的检测性能受到噪声功率的影响，其中解相关检测器和 MMSE 检测器受噪声功率的影响要明显高于传统多用户检测器。

仿真 4：各种多用户检测器的误码率（BER）随着干扰用户与期望用户的能量之比（ $E_i/E_s$ ）的变化情况，其性能变化曲线如图 2.4.7 和 2.4.8 所示。

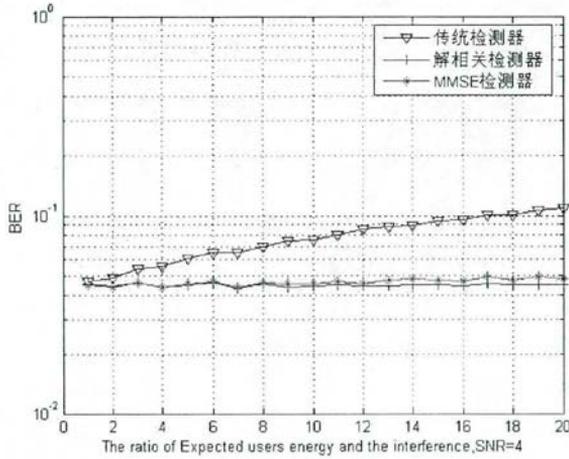


图 2.4.7 SNR=4dB 时，误码率 (BER) 随着干扰用户能量的变化曲线

Fig2.4.7 When SNR=4dB, the BER performance diagram as energy of Interfere user changes

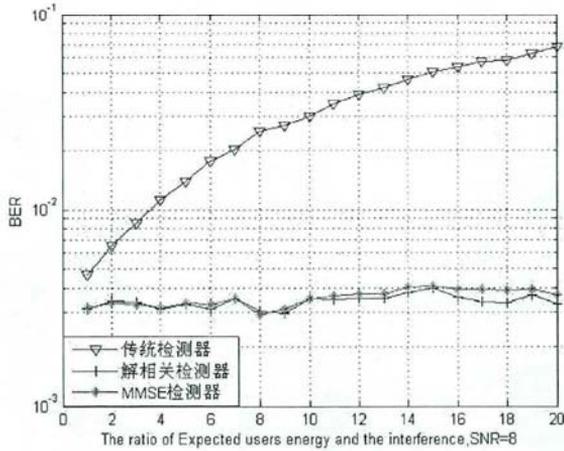


图 2.4.8 SNR=8dB 时，误码率 (BER) 随着干扰用户能量的变化曲线

Fig2.4.8 When SNR=8dB, the BER performance diagram as energy of Interfere user changes

由图 2.4.7 和图 2.4.8 可以看出，多用户检测器的误码率随着干扰用户和期望用户的能量比值的增大而增大。在图 2.4.7 中，信噪比 SNR=4dB 时，多用户检测器的误码率随着干扰用户和期望用户的能量之比  $E_i/E_s$  的增大稍微增加。在图 2.4.8 中，信噪比

SNR=8dB 时, 传统多用户检测器的误码率随着干扰用户和期望用户的能量之比的变化明显, 而解相关检测器和 MMSE 检测受  $E_i/E_j$  的影响不明显。由此而知, 多用户检测器的检测性能受到干扰用户和期望用户能量之比的影响, 在信噪比较大时, 这种影响更加明显。其中传统检测器受  $E_i/E_j$  的影响要高于解相关检测器和 MMSE 检测器。

总结: 上述仿真实验验证了多用户检测的各种特点。由仿真 1 可以看出接收信号通过多用户检测器之后的误码率要远远低于不经过多用户检测的误码率。由仿真 2 可以看出多用户检测的“软容量”的特点, 当用户数增多的时候, 信号的质量只是有稍微的降低。由仿真 4 可以看出多用户检测的抗远近能力很强, 当期望用户到达基站的能量低于干扰用户时, 依然有很好的接收效果。

### 第三章 基于双边代价函数的子空间跟踪算法

在现实的通信系统中，多用户检测应该是实时处理的，所以检测器向量需要利用自适应算法进行实时更新，得到自适应检测器<sup>[28]</sup>。但是自适应检测器需要事先发送训练序列对检测器进行训练，当信道发生突变或者出现新的同信道用户的时候需要重新发送新的训练序列，这将造成频带资源的大大浪费。因此人们开始研究不需要事先发送训练序列的自适应多用户检测器，只使用观测数据进行检测，这种多用户检测称为盲自适应多用户检测，简称盲多用户检测，它是由 Honig 于 1995 年率先提出来的。盲自适应多用户检测器有很多种实现方法，本章着重介绍盲多用户检测器的子空间方法，并提出改进算法。

针对盲多用户检测的子空间方法，本章将阐述最常见的子空间迭代算法的代价函数建立的原理，推导过程及其求解代价函数的整个步骤。通过研究发现，原代价函数只包括当前信息之前的相关信息，没有包含当前信息之后的相关信息对当前信息估测的影响。本章将从此点出发，对子空间跟踪算进行改进，提出基于双边代价函数的子空间跟踪算法。

#### 3.1 子空间的一般理论

在介绍基于子空间的盲多用户检测之前，首先介绍子空间的一般理论，重点说明子空间的正交投影和夹角，并通过子空间的夹角来阐述子空间投影的优化理论，而投影逼近子空间算法的目标函数就是根据此优化理论建立的。

##### 3.1.1 子空间的定义

**定义 3.1:** 若  $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  是向量空间  $V$  的向量子集合，则  $u_1, u_2, \dots, u_k$  的所有线性组合的集合  $W$  称为由  $u_1, u_2, \dots, u_k$  张成的子空间，记作  $W = \text{Span}\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ 。

**定义 3.2:** 令  $W$  是一个向量子空间，若向量集合  $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  满足下列两个条件，称其为子空间  $W$  的一组基：

(1) 子空间  $W$  是由基向量  $u_1, u_2, \dots, u_k$  张成，即

$$W = \text{Span}\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$$

(2) 向量集合  $B = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  是一组线性无关的向量集合。 ■

定义 3.3: 令  $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  是  $n$  维向量子空间  $W$  的一组基, 则对于  $W$  中的任意一个向量  $x$ , 都存在唯一的一组标量  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , 使得  $x$  可以表示为:

$$x = c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_n b_n$$

### 3.1.2 子空间的正交投影与夹角

#### 1. 子空间的正交投影

令向量  $x \in \mathbf{R}^n$ , 并且  $S$  和  $H$  是两个子空间。现在, 希望寻找一个线性变换矩阵  $P$ , 将向量  $x$  映射为子空间  $S$  的向量  $x_1$ 。这样的一组线性变换称为沿着子空间  $H$  的方向到  $S$  的投影算子, 用符号  $P_{S|H}$  表示。

如果子空间  $H$  是  $S$  的正交补, 即  $H = S^\perp$ , 则  $P_{S|S^\perp} x$  是将向量  $x$  沿着与子空间  $S$  垂直的方向到子空间  $S$  的投影, 故称  $P_{S|S^\perp} x$  为到子空间  $S$  的正交投影。

定义 3.4<sup>[29]</sup>: 对于  $m \times n$  维的复矩阵  $P$ , 如果满足条件  $\text{Range}(P) = S, P^2 = P, P^H = P$ , 则称  $P$  为到子空间  $S$  的正交投影算子。 ■

对上述定义中的三个条件进行解释如下:

(1) 条件  $\text{Range}(P) = S$  表示  $P$  的列空间与子空间  $S$  相同。如果子空间  $S$  是矩阵  $A_{m \times n}$  的  $n$  个列向量张成的子空间, 即  $S = \text{Span}(A)$ , 则  $\text{Range}(P) = \text{Span}(A) = \text{Range}(A)$ 。这表示若将矩阵  $A$  向子空间  $S$  作正交投影, 其结果  $PA$  一定等于原矩阵  $A$ , 即  $PA = A$ 。

(2) 条件  $P^2 = P$  要求正交投影算子必须是幂等算子。

(3) 条件  $P^H = P$  要求正交投影算子必须具有复共轭对称性, 即 Hermitian 性。

根据定义 3.4 给出的正交投影算子所满足的条件, 给出一种常用的正交投影算子的形式。

对于子空间  $S = \text{Span}(A_{m \times n})$ , 假如  $m \geq n$ , 并且  $\text{rank}(A) = n$ , 则到子空间  $S$  的正交投影算子为:

$$P_S = A(A^H A)^{-1} A^H \quad (3.1.1)$$

## 2. 子空间的夹角

记复向量空间  $\mathbf{C}^n$  内两个非零向量  $x$  和  $y$  之间的夹角记为  $\theta(x, y)$ ，它们之间的锐角的余弦值为：

$$\cos \theta(x, y) = \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\|_2 \|y\|_2} \quad (3.1.2)$$

向量  $x$  与子空间  $S$  之间的夹角定义为：向量  $x$  与子空间  $S$  中所有向量  $y$  之间的最小夹角，即  $\theta(x, S) = \min_{y \in S} \theta(x, y)$ 。

向量与子空间之间的夹角可以用来描述正交投影的优化性能。

定理 3.1.1<sup>[30]</sup>：令矩阵  $P$  是子空间  $S$  的正交算子，则对复向量空间  $\mathbf{C}^n$  内的任何向量  $x$  有

$$\min_{y \in S} \|x - y\|_2 = \|x - Px\|_2 \quad (3.1.3)$$

证明：令  $y$  是子空间  $S$  中的任意一向量，则它与向量  $x$  之间的距离的平方为  $\|x - y\|_2^2$ 。

因为  $y \in S$ ， $Px \in S$ ，所以  $Px - y \in S$ 。

又因为  $x - Px \perp S$ ，所以  $x - Px \perp Px - y$ 。

所以  $\|x - y\|_2^2 = \|x - Px\|_2^2 + \|Px - y\|_2^2 \geq \|x - Px\|_2^2$ 。

所以只有当  $\|Px - y\|_2^2 = 0$ ，即  $y = Px$  时， $\|x - y\|_2^2$  才能取得最小值，

即  $\min_{y \in S} \|x - y\|_2 = \|x - Px\|_2$ 。 ■

## 3.2 基于子空间的盲多用户检测

盲多用户检测利用的数据主要来源于实时更新的接收信号，我们将接收信号的自相关矩阵分解为信号子空间和噪声子空间，而基于子空间的盲多用户检测器只需要利用信号子空间的信息就可完成检测，无需噪声子空间的信息，这可简化盲多用户检测器。

### 3.2.1 信号子空间与噪声子空间

由 (2.1.3) 式可知同步接收机的接收信号为  $r(t) = \sum_{k=1}^K A_k b_k s_k(t) + \sigma n(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , 当扩频模型为直接扩频序列时, 第  $k$  个用户的特征波形为:

$$s_k(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j^k \psi(t - jT_c), \quad t \in [0, T] \quad (3.2.1)$$

式 (3.2.1) 中,  $N$  表示处理增益,  $(\beta_0^k, \beta_1^k, \dots, \beta_{N-1}^k)$  为第  $k$  个用户的特征序列, 并且  $\beta_j^k \in \{-1, 1\}$ ;  $\psi(t - jT_c)$  为归一化的码片波形, 其间隔为  $T_c$ , 且  $T_c = T/N$ 。

当用户信息到达接收端之后, 让其通过匹配滤波器组, 先进行匹配滤波, 然后再用码片速率进行采样, 即可得到滤波器组的输出向量  $r$ 。因此, 同步模型 (2.1.3) 可以表示为:

$$r = \sum_{k=1}^K A_k b_k s_k + \sigma n, \quad (3.2.2)$$

式 (3.2.2) 中  $s_k = \frac{1}{\sqrt{N}} [\beta_0^k, \beta_1^k, \dots, \beta_{N-1}^k]^T$  是用户  $k$  的归一化特征波形向量,  $n$  是均值为 0, 协方差为  $I_N$  的高斯白噪声向量。

假设  $K$  个用户的特征波形  $\{s_1, s_2, \dots, s_K\}$  是线性无关的, 记  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_K\}$ ,  $A = \text{diag}(A_1^2, A_2^2, \dots, A_K^2)$ , 则接收信号向量  $r$  的自相关矩阵可表示为:

$$R = E\{rr^T\} = \sum_{k=1}^K A_k^2 s_k s_k^T + \sigma^2 I_N = SAS^T + \sigma^2 I_N \quad (3.2.3)$$

如果  $\text{rank}(R) = n$ , 对相关矩阵  $SAS^T$  进行特征值分解可得:

$$R = SAS^T + \sigma^2 I_N = UAU^H + \sigma^2 I_N = U(A + \sigma^2 J_N)U^H = U\Lambda U^H \quad (3.2.4)$$

式 (3.2.4) 中

$$\Lambda = \Sigma + \sigma^2 I_N = \underbrace{\text{diag}(\sigma_1^2 + \sigma^2, \sigma_2^2 + \sigma^2, \dots, \sigma_K^2 + \sigma^2, \sigma^2, \dots, \sigma^2)}_{n \uparrow} \quad (3.2.5)$$

式 (3.2.5) 中,  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_K^2$  表示矩阵  $SAS^T$  的非零特征值, 令  $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_K^2$ ,  $K$  表示用户个数。

当信噪比较大的时候,  $\sigma_i^2 (1 \leq i \leq K)$  远远大于  $\sigma^2$ , 所以将相关矩阵  $\mathbf{R}$  的前  $K$  个较大的特征值  $\lambda_1 = \sigma_1^2 + \sigma^2, \lambda_2 = \sigma_2^2 + \sigma^2, \dots, \lambda_K = \sigma_K^2 + \sigma^2$  称为主特征值, 将剩余的  $n-K$  个较小的特征值  $\lambda_{K+1} = \sigma^2, \lambda_{K+2} = \sigma^2, \dots, \lambda_n = \sigma^2$  称为次特征值。

所以接收信号的相关矩阵  $\mathbf{R}$  的特征值分解形式可以表示为:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{U}_K, \mathbf{U}_{n-K}] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_K & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{n-K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_K^T \\ \mathbf{U}_{n-K}^T \end{bmatrix} = \mathbf{U}_K \mathbf{A}_K \mathbf{U}_K^T + \mathbf{U}_{n-K} \mathbf{A}_{n-K} \mathbf{U}_{n-K}^T \quad (3.2.6)$$

式 (3.2.6) 中  $\mathbf{A}_K = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K)$  是自相关矩阵  $\mathbf{R}$  的主特征值,  $\mathbf{U}_K = [u_1, u_2, \dots, u_K]$  是主特征值所对应的特征向量。  $\mathbf{A}_{n-K} = \text{diag}(\lambda_{K+1}, \lambda_{K+2}, \dots, \lambda_n)$  是自相关矩阵  $\mathbf{R}$  的次特征值,  $\mathbf{U}_{n-K}$  是次特征值所对应的特征向量。

**定义 3.2.1:** 若  $\mathbf{U}_K$  是接收信号自相关矩阵  $\mathbf{R}$  的主特征值所对应特征向量矩阵, 则其列空间  $\text{Span}(\mathbf{U}_K) = \text{Span}(u_1, u_2, \dots, u_K)$  称为接收信号空间  $\text{Span}(\mathbf{R})$  的信号子空间。

若  $\mathbf{U}_{n-K}$  是接收信号自相关矩阵  $\mathbf{R}$  的次特征值的特征向量矩阵, 则其列空间  $\text{Span}(\mathbf{U}_{n-K}) = \text{Span}(u_{K+1}, u_{K+2}, \dots, u_n)$  称为接收信号空间  $\text{Span}(\mathbf{R})$  的噪声子空间。 ■

由张成子空间的定义 3.1 可以看出, 接收信号空间  $\text{Span}(\mathbf{R})$  的信号子空间和噪声子空间正交, 即  $\text{Span}(u_1, u_2, \dots, u_K) \perp \text{Span}(u_{K+1}, u_{K+2}, \dots, u_n)$ 。根据正交投影算子的表达式

(3.1.1), 可以定义沿着噪声子空间的方向到信号子空间的正交投影算子为:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{U}_K} = \mathbf{U}_K (\mathbf{U}_K^H \mathbf{U}_K)^{-1} \mathbf{U}_K^H = \mathbf{U}_K \mathbf{U}_K^H \quad (3.2.7)$$

其中  $\mathbf{U}_K^H \mathbf{U}_K = \mathbf{I}$ 。

### 3.2.2 基于子空间的盲多用户检测器

在上节中将接收信号空间分解为信号子空间和噪声子空间, 本节将研究怎样利用信号子空间的参数  $\mathbf{U}_K$  和  $\mathbf{A}_K$  来设计多用户检测器。

#### 1. 解相关检测器

对于特征波形的相关矩阵  $\mathbf{R}_s = \mathbf{S}^T \mathbf{S}$ , 由于  $\text{rank}(\mathbf{S})=K$ , 所以  $\mathbf{R}_s$  是可逆矩阵, 令用户 1 为期望用户, 由 2.3.3 节中解相关检测器的理论可知, 检测器可以表示为

$$w_1 = \sum_{k=1}^K [R_s^{-1}]_{1k} s_k \quad (3.2.8)$$

式 (3.2.8) 中,  $[R_s^{-1}]_{ik}$  是逆矩阵  $R_s^{-1}$  的第  $(i, k)$  个元素。

引理 3.2.1: 式 (3.2.8) 的解相关检测器  $w_1$  是同时满足条件:  $c^T s_1 = 1$  和  $c^T s_k = 0$ ,  $k = 2, \dots, K$  的唯一线性检测器  $c \in \text{range}(U_s)$ 。

证明: 因为  $\text{rank}(U_K) = K$ ,

所以满足上述条件的向量  $c$  存在而且唯一。

由式 (3.2.8) 可以看出,  $w_1 \in \text{range}(S) = \text{range}(U_s)$ , 并且

$$w_1^T s_k = \sum_{i=1}^K [R_s^{-1}]_{1i} s_i^T s_k = \sum_{i=1}^K [R_s^{-1}]_{1i} [R_s]_{ik} = [R_s^{-1} R_s]_{1k} = \begin{cases} 1, k=1 \\ 0, k=2, \dots, K \end{cases} \quad (3.2.9)$$

所以  $w_1 = c$ 。 ■

命题 3.2.1: 解相关检测器  $w_1$  由信号子空间参数给出的表达形式为:

$$w_k = \frac{1}{s_k^T U_K (A - \sigma^2)^{-1} U_K^T s_k} U_K (A - \sigma^2)^{-1} U_K^T s_k \quad (3.2.10)$$

## 2. 线性 MMSE 检测器

用  $m_1$  表示期望用户 1 的线性 MMSE 检测器, 在约束条件  $m_1^T s_1 = 1$  下, 由

$$\text{MSE}(m_1) = E\{(A_1 b_1 - m_1^T r)^2\} \quad (3.2.11)$$

最小化确定的线性 MMSE 检测器也可以用信号子空间参数表示。

命题 3.2.2: 线性 MMSE 检测器  $m_1$  由信号子空间参数给出的表达形式为:

$$m_k = \frac{1}{s_k^T U_s A_s^{-1} U_s^T s_k} U_s A_s^{-1} U_s^T s_k \quad (3.2.12)$$

证明: 根据 Lagrange 乘子法, 定义代价函数

$$\begin{aligned} L(m) &= \text{MSE}(m) - 2\mu(m^T s_1 - 1) \\ &= m^T E\{r r^T\} m - 2A_1 m^T E\{b_1 r\} + A_1^2 - 2\mu(m^T s_1 - 1) \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

利用式 (3.2.2) 和 (3.2.12), 可以将代价函数修改为:

$$L(m) = m^T R m - 2(A_1^2 + \mu)m_1^T s_1 + (A_1^2 + 2\mu) \quad (3.2.14)$$

因为  $\mathbf{R}$  为正定矩阵,

所以  $L(m)$  是关于  $m$  的严格凸函数。

因此线性 MMSE 检测器  $m_1$  可以通过  $\frac{\partial L(m)}{\partial m} = 0$  求出。

$$\begin{aligned} m_1 &= (A_1^2 + \mu)\mathbf{R}^{-1}s_1 \\ &= (A_1^2 + \mu)(\mathbf{U}_K \mathbf{A}_K^{-1} \mathbf{U}_K^T)s_1 + (A_1^2 + \mu)\sigma^{-2}(\mathbf{U}_{n-K} \mathbf{U}_{n-K}^T)s_1 \\ &= (A_1^2 + \mu)\mathbf{U}_K \mathbf{A}_K^{-1} \mathbf{U}_K^T s_1 \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

将约束条件  $m_1^T s_1 = 1$  代入式 (3.2.15) 中, 可以得到:

$$(A_1^2 + \mu) = \frac{1}{s_1^T \mathbf{U}_K \mathbf{A}_K^{-1} \mathbf{U}_K^T s_1} \quad (3.2.16)$$

将式 (3.2.16) 代入式 (3.2.15) 中, 可以得到:

$$m_k = \frac{1}{s_k^T \mathbf{U}_K \mathbf{A}_K^{-1} \mathbf{U}_K^T s_k} \mathbf{U}_K \mathbf{A}_K^{-1} \mathbf{U}_K^T s_k \quad \blacksquare$$

### 3.3 子空间跟踪算法

上节利用信号子空间的参数  $\mathbf{U}_K$  和  $\mathbf{A}_K$  表示解相关检测器和线性 MMSE 检测器。本节利用接收机接收的即时信息给出信号子空间特征值  $\mathbf{A}_K$  和特征向量  $\mathbf{U}_K$  的表示形式。

#### 3.3.1 目标函数的建立

根据定理 3.1.1 给出的子空间的优化性能, 对接收信号  $r(t)$  和其自相关矩阵

$\mathbf{R} = E\{rr^T\}$  建立目标函数

$$J(\mathbf{W}) = E\{\|r - \mathbf{W}\mathbf{W}^H r\|^2\} \quad (3.3.1)$$

将目标函数展开为:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{W}) &= E\{\|r - \mathbf{W}\mathbf{W}^H r\|^2\} \\ &= E\{(r - \mathbf{W}\mathbf{W}^H r)^H (r - \mathbf{W}\mathbf{W}^H r)\} \\ &= E\{r^H r\} - 2E\{r^H \mathbf{W}\mathbf{W}^H r\} + E\{r^H \mathbf{W}\mathbf{W}^H \mathbf{W}\mathbf{W}^H r\} \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

式 (3.3.2) 中各项的迹的形式为:

$$E\{r^H r\} = \sum_{i=1}^n |r_i|^2 = \text{tr}(E\{r r^H\}) = \text{tr}(\mathbf{R}) \quad (3.3.3)$$

$$E\{r^H \mathbf{W} \mathbf{W}^H r\} = \text{tr}(E\{\mathbf{W}^H r r^H \mathbf{W}\}) = \text{tr}(E\{\mathbf{W}^H \mathbf{R} \mathbf{W}\}) \quad (3.3.4)$$

$$E\{r^H \mathbf{W} \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{W}^H r\} = \text{tr}(E\{\mathbf{W}^H r r^H \mathbf{W} \mathbf{W}^H \mathbf{W}\}) = \text{tr}(E\{\mathbf{W}^H \mathbf{R} \mathbf{W} \mathbf{W}^H \mathbf{W}\}) \quad (3.3.5)$$

将式 (3.3.3), (3.3.4) 和 (3.3.5) 代入式 (3.3.2) 中可以得到目标函数关于迹的表示形式为:

$$J(\mathbf{W}) = \text{tr}(\mathbf{R}) - 2\text{tr}(E\{\mathbf{W}^H \mathbf{R} \mathbf{W}\}) + \text{tr}(E\{\mathbf{W}^H \mathbf{R} \mathbf{W} \mathbf{W}^H \mathbf{W}\}) \quad (3.3.6)$$

在求解目标函数最小化问题之前, 先考虑如下三个问题:

- (1) 目标函数  $J(\mathbf{W})$  是否存在的全局极小点  $\mathbf{W}$ ?
- (2) 如果存在极小点, 那么该极小点  $\mathbf{W}$  与自相关矩阵  $\mathbf{R}$  的信号子空间有何关系?
- (3) 如果存在极小点, 那么该极小点是否是唯一的?

**定理 3.3.1:** <sup>[34] [35]</sup> 当且仅当  $\mathbf{W} = \mathbf{U}_K \mathbf{Q}$  时,  $\mathbf{W}$  是目标函数  $J(\mathbf{W})$  的一个平稳点, 其中  $\mathbf{U}_K \in \mathbb{C}^{n \times K}$  由自相关矩阵  $\mathbf{R}$  的  $K$  个特征向量组成, 并且  $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{K \times K}$  为任意酉矩阵。

证明: 将式 (3.3.6) 对变量矩阵  $\mathbf{W}$  求偏导可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}} &= \frac{\partial (\text{tr}(\mathbf{R}) - 2\text{tr}(E\{\mathbf{W}^H \mathbf{R} \mathbf{W}\}) + \text{tr}(E\{\mathbf{W}^H \mathbf{R} \mathbf{W} \mathbf{W}^H \mathbf{W}\}))}{\partial \mathbf{W}} \\ &= [-2\mathbf{R} + \mathbf{R} \mathbf{W} \mathbf{W}^T + \mathbf{W} \mathbf{W}^T \mathbf{R}] \mathbf{W} \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

当  $\mathbf{W} = \mathbf{U}_K \mathbf{Q}$  时, 其中  $\mathbf{U}_K$  由自相关矩阵  $\mathbf{R}$  的任意  $K$  个不同的特征向量组成,  $\mathbf{Q}$  为正交矩阵, 则式 (3.3.7) 可以化为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}} &= [-2\mathbf{R} + \mathbf{R} \mathbf{U}_K \mathbf{U}_K^T + \mathbf{U}_K \mathbf{U}_K^T \mathbf{R}] \mathbf{U}_K \mathbf{Q} \\ &= (\mathbf{U}_K \mathbf{U}_K^T \mathbf{R} \mathbf{U}_K - \mathbf{R} \mathbf{U}_K) \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

将式 (3.2.6) 代入式 (3.3.8) 中, 由于  $\mathbf{U}_K^T \mathbf{U}_K = \mathbf{I}_K$ ,  $\mathbf{U}_K^T \mathbf{U}_{n-K} = \mathbf{0}_{K \times (n-K)}$ , 则式 (3.3.8) 可化为:

$$\frac{\partial J(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}} = (\mathbf{U}_K \mathbf{U}_K^T \mathbf{R} \mathbf{U}_K - \mathbf{R} \mathbf{U}_K) \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (3.3.9)$$

所以  $\mathbf{W} = \mathbf{U}_K \mathbf{Q}$  是代价函数  $J(\mathbf{W})$  的一个平衡点。 ■

**定理 3.3.2:** 代价函数  $J(\mathbf{W})$  的所有平稳点中, 只有当  $\mathbf{U}_K$  由自相关矩阵  $\mathbf{R}$  的主特征向量组成时,  $J(\mathbf{W})$  才能达到全局极小值, 即主特征向量  $\mathbf{U}_K$  为目标函数  $J(\mathbf{W})$  的极小点。

由定理 3.3.1 和定理 3.3.2 可以得出结论:当代价函数  $J(W)$  的变量  $W$  为接收信号  $r(t)$  自相关矩阵的主特征向量时, 代价函数取全局唯一的极小值。

所以信号子空间的参数  $U_k$  就是使目标函数最小时的变量  $W$  的值。

### 3.3.2 梯度下降法

在实际的通讯中, 由于接收信号  $r(t)$  是随着时间变化的, 所以自相关矩阵  $R$  的特征值和特征向量也是随着时间变化的。根据式 (3.3.7) 建立随时间变化的目标函数  $J(W(t))$  的梯度矩阵为:

$$\nabla J(W(t)) = [-2R(t) + R(t)W(t-1)W^T(t-1) + W(t-1)W(t-1)^T]W(t-1) \quad (3.3.10)$$

将  $R(t) = r(t)r(t)^T$  代入上式 (3.3.10) 中, 因为  $W(t)$  满足半正交化约束条件  $W(t)W(t)^T = I$ , 所以梯度矩阵可化简为:

$$\nabla J(W(t)) = -2[r(t) - W(t-1)W^T(t-1)r(t)]r^T(t)W(t-1) \quad (3.3.11)$$

令  $y(t) = W^T(t)r(t)$ , 求解极小化问题的梯度下降法如下:

#### 算法 3.1 (梯度下降法)

初始化矩阵  $W(0)$

for  $t = 1, 2, \dots$ , do

$$y(t) = W^T(t-1)r(t)$$

$$W(t) = W(t-1) + \mu[r(t) - W(t-1)y(t)]y^H(t)$$

end

其中,  $\mu$  是变化步长。当  $\mu$  增大时, 收敛速度加快, 但是迭代误差变大, 大过一定的值时, 算法开始发散; 当  $\mu$  减小时, 收敛速度变慢, 其迭代误差变小。

经研究发现, 梯度下降法中当前时刻的变量矩阵  $W(t)$  仅由前一时刻的数据来进行更新, 所以收敛速度慢, 且跟踪能力差。

### 3.3.3 投影逼近子空间(PAST)算法

由于距当前时刻不同的信号与当前信号之间的相关性不同, 一般情况下, 距离越远, 相关性越小, 距离越近, 相关性越大, 那么对不同时刻的接收信号赋予不同的相关系数来表示其相关性的强弱, 建立指数加窗目标函数为:

$$\begin{aligned}
 J(\mathbf{W}(t)) &= \sum_{i=1}^t \beta^{t-i} \|r - \mathbf{W}(t)\mathbf{W}^H(t)r\|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^t \beta^{t-i} \|r - \mathbf{W}(t)y(t)\|^2
 \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

式(3.3.12)中  $0 < \beta \leq 1$  称为遗忘因子, 其作用是对距当前时刻越远的信号加较小的权值, 以减小其相关性, 对距当前时刻越近的信号加较大的权值, 以增大其相关性。

根据自适应滤波器原理可知, 使式(3.3.12)目标函数达到最小值时, 变量  $\mathbf{W}(t)$  的解为维纳 (Wiener) 滤波器, 即

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{C}_{ry}(t)\mathbf{C}_{yy}^{-1}(t) \tag{3.3.13}$$

其中, 互相关矩阵  $\mathbf{C}_{ry}(t)$  和自相关矩阵  $\mathbf{C}_{yy}(t)$  的递推关系如下:

$$\mathbf{C}_{ry}(t) = \sum_{i=1}^t \beta^{t-i} r(i)y^H(i) = \beta\mathbf{C}_{ry}(t-1) + r(t)y^H(t) \tag{3.3.14}$$

$$\mathbf{C}_{yy}(t) = \sum_{i=1}^t \beta^{t-i} y(i)y^H(i) = \beta\mathbf{C}_{yy}(t-1) + y(t)y^H(t) \tag{3.3.15}$$

引理 3.1<sup>[31] [32]</sup>: 令  $\mathbf{A}$  是一个  $n \times n$  的可逆矩阵, 并且  $x$  和  $y$  是两个  $n \times 1$  向量, 使得  $(\mathbf{A} + xy^H)$  可逆, 则

$$(\mathbf{A} + xy^H)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}xy^H\mathbf{A}^{-1}}{1 + y^H\mathbf{A}^{-1}x} \tag{3.3.16}$$

根据引理 3.1 可以求出自相关矩阵  $\mathbf{C}_{yy}(t)$  的逆矩阵为:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_{yy}^{-1}(t) &= [\beta\mathbf{C}_{yy}(t-1) + y(t)y^H(t)]^{-1} \\
 &= \frac{1}{\beta} \left\{ \mathbf{C}_{yy}^{-1}(t-1) - \frac{\mathbf{C}_{yy}^{-1}(t)y(t)y^H(t)\mathbf{C}_{yy}^{-1}(t)}{\beta + y^H(t)\mathbf{C}_{yy}^{-1}(t)y(t)} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

将式(3.3.17)代入式(3.1.13)中可以得到变量矩阵  $\mathbf{W}(t)$  为:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W}(t) &= \mathbf{C}_{ry}(t)\mathbf{C}_{yy}^{-1}(t) \\
 &= \left( \beta \sum_{i=1}^t \beta^{t-i-1} r(i)y^H(i) + r(t)y^H(t) \right) \mathbf{C}_{yy}^{-1}(t) \\
 &= \left( \sum_{i=1}^t \beta^{t-i-1} r(i)y^H(i) \right) \beta \mathbf{C}_{yy}^{-1}(t) + r(t)y^H(t)\mathbf{C}_{yy}^{-1}(t)
 \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

$$\begin{aligned}
 \beta C_{yy}^{-1}(t) &= \beta C_{yy}^{-1}(t) C_{yy}(t-1) C_{yy}^{-1}(t-1) \\
 &= C_{yy}^{-1}(t) \beta C_{yy}(t-1) C_{yy}^{-1}(t-1) \\
 &= C_{yy}^{-1}(t) (C_{yy}(t) - y(t)y^H(i)) C_{yy}^{-1}(t-1) \\
 &= C_{yy}^{-1}(t-1) - C_{yy}^{-1}(t) y(t) y^H(i) C_{yy}^{-1}(t-1)
 \end{aligned} \tag{3.3.19}$$

将式 (3.3.19) 代入式 (3.3.18) 中可以得到:

$$\begin{aligned}
 W(t) &= \left( \sum_{i=1}^t \beta^{t-i-1} r(i) y^H(i) \right) \beta C_{yy}^{-1}(t) + r(t) y^H(i) C_{yy}^{-1}(t) \\
 &= \left( \sum_{i=1}^t \beta^{t-i-1} r(i) y^H(i) \right) (C_{yy}^{-1}(t-1) - C_{yy}^{-1}(t) y(t) y^H(i) C_{yy}^{-1}(t-1)) + r(t) y^H(i) C_{yy}^{-1}(t) \\
 &= \sum_{i=1}^t \beta^{t-i-1} r(i) y^H(i) C_{yy}^{-1}(t-1) - \sum_{i=1}^t \beta^{t-i-1} r(i) y^H(i) C_{yy}^{-1}(t) y(t) y^H(i) C_{yy}^{-1}(t-1) + \\
 &\quad r(t) y^H(i) C_{yy}^{-1}(t) \\
 &= W(t-1) + \left( r(t) - \sum_{i=1}^t \beta^{t-i-1} r(i) y^H(i) C_{yy}^{-1}(t-1) y(t) \right) y^H(i) C_{yy}^{-1}(t) \\
 &= W(t-1) + (r(t) - W(t-1) y(t)) h^H(t)
 \end{aligned} \tag{3.3.20}$$

令  $P(t) = C_{yy}^{-1}(t)$ ,  $h(t) = C_{yy}^{-1}(t-1) y(t)$ ,  $g(t) = \frac{h(t)}{\beta + y^H(i) h(t)}$ ,  $e(t) = r(t) - W(t-1) y(t)$ , 将

式 (3.3.20) 代入式 (3.3.13) 中可以得到向量  $W(t)$  的迭代更新算法, 即投影逼近子空间 (PAST) 算法如下:

**算法 3.2** (投影逼近子空间 (PAST) 算法)

初始化矩阵  $P(0), W(0)$ ,

for  $t=1, 2, \dots$ , do

$$y(t) = W^H(t-1) r(t)$$

$$h(t) = P(t-1) y(t)$$

$$g(t) = \frac{h(t)}{\beta + y^H(i) h(t)}$$

$$P(t) = \frac{1}{\beta} \text{Tri}\{P(t-1) - g(t) h^H(t)\}$$

$$e(t) = r(t) - W^H(t-1) y(t)$$

$$W(t) = W(t-1) + e(t) h^H(t)$$

end

上述算法中  $\text{Tri}(A)$  表示只计算矩阵  $A$  的上 (或下) 三角部分, 然后将上 (或下) 三角部分复制为矩阵的下 (或上) 三角部分。  $W(t)$  为当前时刻信号子空间的特征向量矩阵,

$P(t)$  为当前时刻信号子空间的特征值矩阵。

经分析可得, PAST 算法的计算复杂度为  $3NK + O(K^2)$ , 其中  $N$  为相关矩阵的秩,  $K$  为用户数。PAST 算法的计算复杂度较高, 且向量跟踪误差较大, 但是收敛速度快。

### 3.4 基于双边代价函数的子空间跟踪算法

在上一节中介绍了投影逼近子空间(PAST)算法, 在建立指数加窗代价函数时发现, 通过相关性来估测当前信号所用到的相关信号只有当前信号之前的信号。本节将从该代价函数入手, 在建立代价函数的时候, 加入后验信息对当前信号的影响, 并由此推导出相应的算法。

#### 3.4.1 双边代价函数

通过文献[39]发现, 时变信道的时间相关特性可以用相关时间  $T_{coh}$  来表示, 信道在相关时间  $T_{coh}$  内具有强的相关性。这表明时变信道也只在以当前时刻为中心的一段时间内具有强相关性。但是从式 (3.3.1) 所示的代价函数可以看出, 当前时刻信号只与从 0 到  $t-1$  时刻的信号相关, 这种相关性虽然可以通过遗忘因子  $\beta$  来调节, 但是只考虑了  $t$  时刻之前的相关性, 没有考虑  $t$  时刻之后的相关性。

通过上述分析, 代价函数如果包括  $t$  时刻以后一段时间内的相关信号会更合理。所以将式 (3.3.12) 的代价函数修改为:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{W}(t)) &= \sum_{i=t-M+1}^{t+M} \beta^{t-i} \|\mathbf{r} - \mathbf{W}(t)\mathbf{W}^H(t)\mathbf{r}\|^2 \\ &= \sum_{i=t-M+1}^{t+M} \beta^{t-i} \|\mathbf{r} - \mathbf{W}(t)\mathbf{y}(t)\|^2 \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

式 (3.4.1) 中  $M$  表示与  $t$  时刻的信号具有强相关的信号项数。修改后的代价函数既包括  $t$  时刻之前的信号, 又包括  $t$  时刻之后的信号, 故将其称之为双边代价函数<sup>[40]</sup>。

由定理 (3.3.1) 和定理 (3.3.2) 可知, 当变量矩阵  $\mathbf{W}(t)$  为信号子空间的特征向量矩阵时, 代价函数取得唯一最小值, 即使代价函数最小的变量矩阵  $\mathbf{W}(t)$  为信号子空间的特征向量矩阵, 可以用下式表示:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W}(t) &= \arg \min \{J(\mathbf{W}(t))\} \\
 &= \arg \min \left\{ \sum_{i=t-M+1}^{t+M} \beta^{t-i} \|\mathbf{r} - \mathbf{W}(t)\mathbf{W}^H(t)r\|^2 \right\} \\
 &= \arg \min \left\{ \sum_{i=t-M+1}^{t+M} \beta^{t-i} \|\mathbf{r} - \mathbf{W}(t)y(i)\|^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

上述代价函数无法使用矩阵求逆引理 3.1 求解，所以需要对其进行简单地修改，以便于求解，修改后的代价函数为：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W}(t) &= \arg \min \{J(\mathbf{W}(t))\} \\
 &= \arg \min \left\{ \sum_{i=1}^{t+M} \beta^{t-i} \|\mathbf{r} - \mathbf{W}(t)\mathbf{W}^H(t)r\|^2 \right\} \\
 &= \arg \min \left\{ \sum_{i=1}^{t+M} \beta^{t-i} \|\mathbf{r} - \mathbf{W}(t)y(i)\|^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

修改后的代价函数比原代价函数增加了  $t-M+1$  之前的所有信号，通过遗忘因子调整，对其赋予非常小的权值来降低其相关性，弱化对当前信号的相关程度，所以修改的双边代价函数还是合乎情理的。

#### 3.4.2 基于双边代价函数的子空间跟踪算法

上节已经建立了双边代价函数，本节将对其进行求解，推导出基于双边代价函数的子空间迭代算法。

根据维纳（Wiener）滤波器可知，上述双边代价函数的最优解为维纳解，即

$\frac{\partial J(\mathbf{W}(t))}{\partial \mathbf{W}(t)} = 0$  的解为：

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{R}_{yy}^{-1}(t)\mathbf{R}_{ry}(t) \tag{3.4.4}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{yy}^*(t) &= \sum_{i=0}^{t+M} \beta^{t-i} y(i)y^H(i) \\
 &= \sum_{i=0}^t \beta^{t-i} y(i)y^H(i) + \sum_{i=t+1}^{t+M} \beta^{t-i} y(i)y^H(i) \\
 &= \mathbf{R}_{yy}(t) + \mathbf{R}_{yy}^{\circ}(t)
 \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{ry}^*(t) &= \sum_{i=0}^{t+M} \beta^{t-i} r(i)y^H(i) \\
 &= \sum_{i=0}^t \beta^{t-i} r(i)y^H(i) + \sum_{i=t+1}^{t+M} \beta^{t-i} r(i)y^H(i) \\
 &= \mathbf{R}_{ry}(t) + \mathbf{R}_{ry}^{\circ}(t)
 \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

对式 (3.4.4) 进行简单地调整, 将其转化为:

$$\mathbf{R}_{yy}^{\circ}(t)\mathbf{W}(t) = \mathbf{R}_{ry}^{\circ}(t) \quad (3.4.7)$$

将式 (3.4.5) 和 (3.4.6) 代入式 (3.4.7) 中可得:

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_{yy}(t) + \mathbf{R}_{yy}^{\circ}(t))\mathbf{W}(t) &= \mathbf{R}_{ry}(t) + \mathbf{R}_{ry}^{\circ}(t) \\ \mathbf{R}_{yy}(t)\mathbf{W}(t) - \mathbf{R}_{ry}(t) &= -[\mathbf{R}_{yy}^{\circ}(t)\mathbf{W}(t) - \mathbf{R}_{ry}^{\circ}(t)] \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

与原代价函数的求解过程进行对比发现, 在原代价函数式 (3.3.12) 的求解过程中, 只需使式 (3.4.8) 等号左边为零即可, 在双边代价函数求解过程中, 不但要使等号左边为零, 还要使右边为零, 相当于对原代价函数的求解过程增加一个限制条件, 即

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{yy}(t)\mathbf{W}(t) - \mathbf{R}_{ry}(t) = 0 \\ \mathbf{R}_{yy}^{\circ}(t)\mathbf{W}(t) - \mathbf{R}_{ry}^{\circ}(t) = 0 \end{cases} \quad (3.4.9)$$

该方程组采用最小二乘法的解为:

$$\mathbf{W}(t) = (\mathbf{Y}_{yy}^H(t)\mathbf{Y}_{yy}(t))^{-1} (\mathbf{Y}_{ry}^H(t)\mathbf{Y}_{ry}(t)) \quad (3.4.10)$$

其中

$$\mathbf{Y}_{yy}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{yy}(t) \\ \mathbf{R}_{yy}^{\circ}(t) \end{bmatrix} \quad (3.4.11)$$

$$\mathbf{Y}_{ry}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ry}(t) \\ \mathbf{R}_{ry}^{\circ}(t) \end{bmatrix} \quad (3.4.12)$$

通过上述推导发现, 求解双边代价函数式 (3.4.3) 的主要任务就是对  $\mathbf{Y}_{yy}^H(t)\mathbf{Y}_{yy}(t)$  进行求逆, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(t) &= (\mathbf{Y}_{yy}^H(t)\mathbf{Y}_{yy}(t))^{-1} \\ &= (\mathbf{R}_{yy}^H(t)\mathbf{R}(t) + \mathbf{R}_{yy}^{\circ H}(t)\mathbf{R}_{yy}^{\circ}(t))^{-1} \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

当  $M=1$  时,  $\mathbf{R}_{yy}^{\circ}(t) = \beta r(t+1)r^H(t+1)$ , 所以

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{yy}^{\circ H}(t)\mathbf{R}_{yy}^{\circ}(t) &= (\beta r(t+1)r^H(t+1))^H (\beta r(t+1)r^H(t+1)) \\ &= r(t+1) [\beta^2 r^H(t+1)r(t+1)] r^H(t+1) \\ &= \beta^2 \|r(t+1)\|^2 r(t+1)r^H(t+1) \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

由矩阵的求逆引理 3.1 可知:

$$\begin{aligned}
 D(t) &= \left( R_{yy}^H(t)R(t) + R_{yy}^{\circ H}(t)R_{yy}^{\circ}(t) \right)^{-1} \\
 &= \left( R_{yy}^H(t)R(t) + \beta^2 \|r(t+1)\|^2 r(t+1)r^H(t+1) \right)^{-1} \\
 &= R^{-1}(t) \left[ R_{yy}^{-1}(t) \right]^H - \frac{R^{-1}(t) \left[ R_{yy}^{-1}(t) \right]^H r(t+1)r^H(t+1)R^{-1}(t) \left[ R_{yy}^{-1}(t) \right]^H}{\frac{1}{\beta^2 \|r(t+1)\|^2} + r^H(t+1)R^{-1}(t) \left[ R_{yy}^{-1}(t) \right]^H r(t+1)} \\
 &= B^{-1}(t) - B^{-1}(t)r(t+1)\zeta(t)r^H(t+1)B^{-1}(t)
 \end{aligned} \tag{3.4.15}$$

式 (3.4.15) 中

$$B(t) = R_{yy}^H(t)R(t) \tag{3.4.16}$$

$$B^{-1}(t) = R^{-1}(t) \left[ R_{yy}^{-1}(t) \right]^H \tag{3.4.17}$$

$$\zeta(t) = \frac{1}{\frac{1}{\beta^2 \|r(t+1)\|^2} + r^H(t+1)R^{-1}(t) \left[ R_{yy}^{-1}(t) \right]^H r(t+1)} \tag{3.4.18}$$

式 (3.4.17) 中  $R^{-1}(t)$  的迭代过程可以由投影逼近子空间 (PAST) 算法中的

$$h(t) = P(t-1)y(t)$$

$$g(t) = \frac{h(t)}{\beta + y^H(t)h(t)}$$

$$P(t) = \frac{1}{\beta} \text{Tri}\{P(t-1) - g(t)h^H(t)\}$$

来给出。

对于式 (3.4.10) 中的  $Y_{ry}(t), Y_{yy}(t)$  可以由下列递推关系给出：

$$\begin{aligned}
 Y_{ry}(t) &= \sum_{i=0}^{t+1} \beta^{t-i} r(i) y^H(i) \\
 &= \sum_{i=0}^n \beta^{t-i} r(i) y^H(i) + \beta r(t+1) y^H(t+1) \\
 &= \beta \sum_{i=0}^{t-1} \beta^{t-1-i} r(i) y^H(i) + r(t) y^H(t) + \beta r(t+1) y^H(t+1) \\
 &= \beta R_{ry}(t-1) + r(t) y^H(t) + \beta r(t+1) y^H(t+1)
 \end{aligned} \tag{3.4.19}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{yy}(t) &= \sum_{i=0}^{n+1} \beta^{t-i} y(i) y^H(i) \\
 &= \sum_{i=0}^n \beta^{t-i} y(i) y^H(i) + \beta y(t+1) y^H(t+1) \\
 &= \beta \sum_{i=0}^{t-1} \beta^{t-1-i} y(i) y^H(i) + y(t) y^H(t) + \beta y(t+1) y^H(t+1)
 \end{aligned}$$

$$= \beta \mathbf{R}_{yy}(t-1) + y(t)y^H(t) + \beta y(t+1)y^H(t+1) \quad (3.4.20)$$

当  $M=1$  时, 基于双边代价函数的子空间迭代算法为:

**算法 3.3** ( $M=1$  双边代价函数的子空间跟踪算法)

初始化矩阵  $\mathbf{P}(0)$ ,  $\mathbf{R}_{yy}(0)$ ,  $\mathbf{R}_{yy}(0)$  和向量  $r(t+1)$

for  $t=1, 2, \dots$ , do

$$y(t) = \mathbf{W}^H(t)r(t)$$

$$h(t) = \mathbf{P}(t-1)y(t)$$

$$g(t) = \frac{h(t)}{\beta + y^H(t)h(t)}$$

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{\beta} \text{Tri}\{\mathbf{P}(t-1) - g(t)h^H(t)\}$$

$$\zeta(t) = \zeta(t) = \frac{1}{\frac{1}{\beta^2 \|r(t+1)\|^2} + r^H(t+1)\mathbf{P}(t)\mathbf{P}^H(t)r(t+1)}$$

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{P}^H(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{P}^H(t)r(t+1)\zeta(t)r^H(t+1)\mathbf{P}(t)\mathbf{P}^H(t)$$

$$\mathbf{Y}_{yy}(t+1) = \beta \mathbf{R}_{yy}(t-1) + y(t)y^H(t) + \beta y(t+1)y^H(t+1)$$

$$\mathbf{Y}_{ry}(t+1) = \beta \mathbf{R}_{ry}(t-1) + r(t)y^H(t) + \beta r(t+1)y^H(t+1)$$

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{D}(t)\mathbf{Y}_{yy}^H(t)\mathbf{Y}_{ry}$$

end

当  $M \neq 1$  时, 对  $\mathbf{Y}_{yy}^H(t)\mathbf{Y}_{yy}(t)$  进行求逆需要用到以下引理。

**引理 3.2:** 对于  $n^*n$  的矩阵  $\mathbf{A}$ ,  $n^*m$  的矩阵  $\mathbf{U}$  和  $m^*u$  的矩阵  $\mathbf{V}$ , 其中  $m \geq n$ , 则矩阵  $\mathbf{A} + \mathbf{UV}$  的逆矩阵为:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{UV})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{I} - \mathbf{VA}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{VA}^{-1} \quad (3.4.21)$$

根据引理 3.2,  $\mathbf{Y}_{yy}^H(t)\mathbf{Y}_{yy}(t)$  的逆矩阵为:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(t) &= (\mathbf{Y}_{yy}^H(t)\mathbf{Y}_{yy}(t))^{-1} \\ &= (\mathbf{R}_{yy}^H(t)\mathbf{R}(t) + \mathbf{R}_{yy}^{\wedge H}(t)\mathbf{R}_{yy}^{\wedge}(t))^{-1} \\ &= (\mathbf{R}_{yy}^H(t)\mathbf{R}(t))^{-1} - \\ &\quad (\mathbf{R}_{yy}^H(t)\mathbf{R}(t))^{-1}\mathbf{R}_{yy}^{\wedge}(t)\left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_{yy}^{\wedge}(t)(\mathbf{R}_{yy}^H(t)\mathbf{R}(t))^{-1}\mathbf{R}_{yy}^{\wedge}(t)\right)\mathbf{R}_{yy}^{\wedge}(t)(\mathbf{R}_{yy}^H(t)\mathbf{R}(t))^{-1} \\ &= \mathbf{B}(t) - \mathbf{E}(t)(\mathbf{I} - \mathbf{R}_{yy}^{\wedge}(t)\mathbf{E}(t))\mathbf{E}^H(t) \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

式 (3.4.20) 中,

$$\mathbf{B}(t) = (\mathbf{R}_{yy}^H(t)\mathbf{R}(t))^{-1} = \mathbf{R}^{-1}(t)[\mathbf{R}^{-1}(t)]^H = \mathbf{P}(t)\mathbf{P}^H(t) \quad (3.4.23)$$

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{R}_{yy}^{\Delta}(t) \quad (3.4.24)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{yy}^{\Delta}(t) &= \sum_{i=t+1}^{t+M-1} \beta^{i-n} y(i)y^H(i) \\ &= \frac{1}{\beta} \sum_{i=t}^{t+M-2} \beta^{i-(t-1)} y(i)y^H(i) + \beta^{M-1} y(t+M-1)y^H(t+M-1) - y(t)y^H(t) \\ &= \frac{1}{\beta} \mathbf{R}_{yy}^{\Delta}(t-1) + \beta^{M-1} y(t+M-1)y^H(t+M-1) - y(t)y^H(t) \end{aligned} \quad (3.4.25)$$

对于式 (3.4.10) 中的  $Y_{yy}(t), Y_{ry}(t)$  可以由下列递推关系给出:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{ry}(t) &= \sum_{i=0}^{t+M-1} \beta^{t-i} r(i)y^H(i) \\ &= \sum_{i=0}^t \beta^{t-i} r(i)y^H(i) + \sum_{i=t+1}^{t+M-1} \beta^{t-i} r(i)y^H(i) \\ &= \beta \sum_{i=0}^t \beta^{t-1-i} r(i)y^H(i) + \frac{1}{\beta} \sum_{i=t}^{t+M-2} \beta^{i-t+1} r(i)y^H(i) + \beta^{M-1} r(t+M-1)y^H(t+M-1) \\ &= \beta \mathbf{R}_{ry}(t-1) + \frac{1}{\beta} \mathbf{R}_{ry}^{\Delta}(t-1) + \beta^{M-1} r(t+M-1)y^H(t+M-1) \end{aligned} \quad (3.4.26)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{yy}(t) &= \sum_{i=0}^{t+M-1} \beta^{t-i} y(i)y^H(i) \\ &= \sum_{i=0}^t \beta^{t-i} y(i)y^H(i) + \sum_{i=t+1}^{t+M-1} \beta^{t-i} y(i)y^H(i) \\ &= \beta \sum_{i=0}^t \beta^{t-1-i} y(i)y^H(i) + \frac{1}{\beta} \sum_{i=t}^{t+M-2} \beta^{i-t+1} y(i)y^H(i) + \beta^{M-1} y(t+M-1)y^H(t+M-1) \\ &= \beta \mathbf{R}_{yy}(t-1) + \frac{1}{\beta} \mathbf{R}_{yy}^{\Delta}(t-1) + \beta^{M-1} y(t+M-1)y^H(t+M-1) \end{aligned} \quad (3.4.27)$$

所以基于双边代价函数的子空间跟踪算法如下:

**算法 3.4** (双边代价函数的子空间迭代算法)

初始化向量  $\mathbf{P}(0), \mathbf{R}_{yy}(0), \mathbf{R}_{yy}^{\Delta}(0), \mathbf{R}_{ry}(0), \mathbf{R}_{ry}^{\Delta}(0)$

for  $t=1, 2, 3, \dots$ , do

$$x(n+M-1) = r(n+M-1)$$

$$y(t) = \mathbf{W}^H(t-1)x(t)$$

$$h(t) = \mathbf{P}(t-1)y(t)$$

$$g(t) = h(t) / [\beta + y^H(t)h(t)]$$

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{\beta} [\mathbf{P}(t-1) - g(t)h^H(t)]$$

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{P}^H(t)$$

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{R}_{yy}^{\wedge}(t)$$

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{B}(t) - \mathbf{E}(t)(\mathbf{I} - \mathbf{R}_{yy}^{\wedge}(t)\mathbf{E}(t))\mathbf{E}^H(t)$$

$$\mathbf{Y}_{xy}(t) = \beta\mathbf{R}_{xy}(t-1) + \frac{1}{\beta}\mathbf{R}_{xy}^{\wedge}(t-1) + \beta^{M-1}r(n+M-1)y^H(n+M-1)$$

$$\mathbf{Y}_{yy}(t) = \beta\mathbf{R}_{yy}(t-1) + \frac{1}{\beta}\mathbf{R}_{yy}^{\wedge}(t-1) + \beta^{M-1}y(n+M-1)y^H(n+M-1)$$

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{D}(t)\mathbf{Y}_{yy}^H(t)\mathbf{Y}_{xy}(t)$$

end

上述的子空间跟踪算法是基于双边代价函数的子空间跟踪算法。我们简称为 DSSTA (Double-sided Subspace Tracking Algorithm)。

经分析研究, DSSTA 算法的复杂度为  $3MNK + O(MK^2)$ , 其中  $M$  的范围为  $0 \leq M \leq 5$ , 当  $M=0$  时, DSSTA 算法变为 PAST 算法, 所以说 PAST 算法为 DSSTA 算法的一种特殊形式。

### 3.4.3 性能仿真

本节从两个方面对基于双边代价函数的子空间迭代算法的性能进行仿真: 一是将双边代价函数子空间跟踪算法 (DSSTA) 的误码率和 PAST 算法的误码率进行比较, 验证改进算法性能的优越性; 二是将双边代价函数的子空间迭代算法 (DSSTA) 的误码率和新信息准则 (NIC) 算法的误码率进行比较, 比较由不同代价函数改进方法所得算法的性能。

首先对新信息准则进行介绍。通过对式 (3.3.6) 所示的代价函数进行等价代换得到新信息准则为:

$$J_{NIC}(\mathbf{W}) = \frac{1}{2} \left\{ \log [\det(\mathbf{W}^T \mathbf{R} \mathbf{W})] - \text{tr}(\mathbf{W}^T \mathbf{W}) \right\} \quad (3.4.28)$$

其中,  $\det(\mathbf{A})$  表示矩阵  $\mathbf{A}$  的行列式。

本仿真实验采用的参数为: 发送的码元个数  $N=10000$ , 采用 31 位的 Gold 码作为扩频波形, 用户 1 为期望用户, 系统中使用 10 个干扰用户, 干扰用户的能量相同, 为期望用户的 8 倍, 噪声为加性高斯白噪声, 其方差  $\sigma^2 = 0.8$ , 误码率的计算采用蒙塔卡罗方法计算 200 次求平均。

仿真 1: 基于双边代价函数的子空间跟踪算法 (DSSTA) 的误码率和 PAST 算法的误码率进行比较, 其仿真曲线如图 3.4.1~3.4.3 所示。

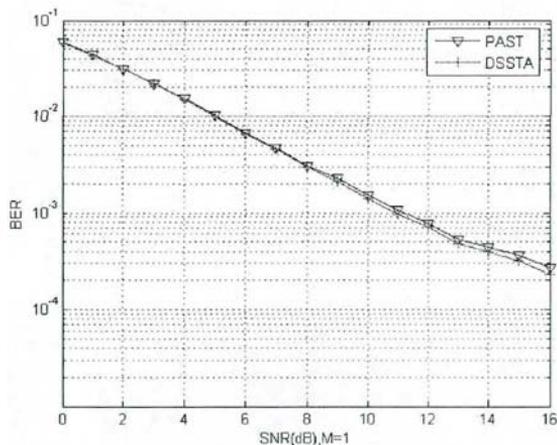


图 3.4.1 当  $M=1$  时, 各种算法的误码率随着信噪比的变化情况

Fig3.4.1 When  $M=1$ , the BER performance diagram as number of users changes

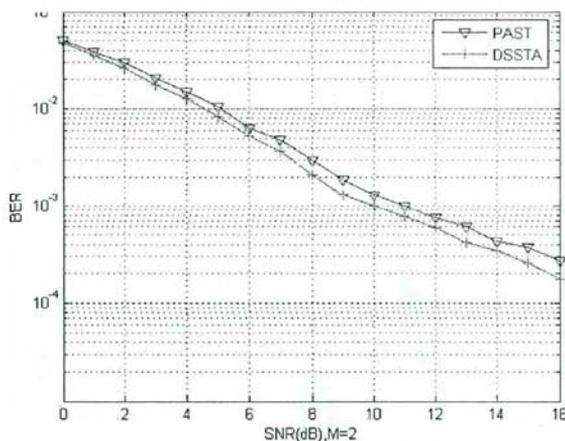


图 3.4.2 当  $M=2$  时, 各种算法的误码率随着信噪比的变化情况

Fig3.4.2 When  $M=2$ , the BER performance diagram as number of users changes

从图 3.4.1~3.4.3 中可以看出, 基于双边代价函数的子空间跟踪算法的误码率要低于 PAST 算法的误码率。图 3.4.1 中双边代价函数的当前时刻之后的相关信息数  $M=1$ , 其误码率和 PAST 算法的误码率几乎相同, 当信噪比为 10dB 时, DSSTA 算法的误码率开始明显小于 PAST 算法, 其主要原因是  $t$  时刻之后的相关数为仅仅取 1, 采用的后验信息较少。在图 3.4.2 中, 代价函数中当前时  $t$  之后的相关信息数  $M=2$ , 可以看出 DSSTA 算

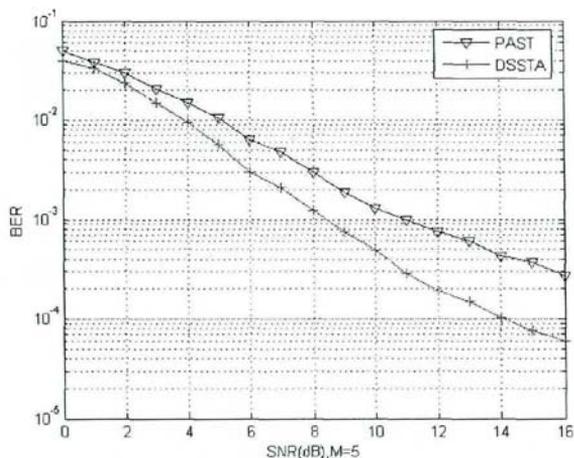


图 3.4.3 当  $M=5$  时, 各种算法的误码率随着信噪比的变化情况

Fig3.4.3 When  $M=5$ , the BER performance diagram as number of users changes

法的误码率明显低于 PAST 算法。在图 3.4.3 中, 代价函数当前时刻之后的相关信息数  $M=5$ , 可以看出 DSSTA 算法的误码率显著低于 PAST 算法, 误码率为  $10^{-3}$  时, DSSTA 算法比 PAST 算法节省 3dB 的信噪比。当信噪比  $SNR=16\text{dB}$  时, DSSTA 算法的误码率低于为  $10^{-4}$ 。

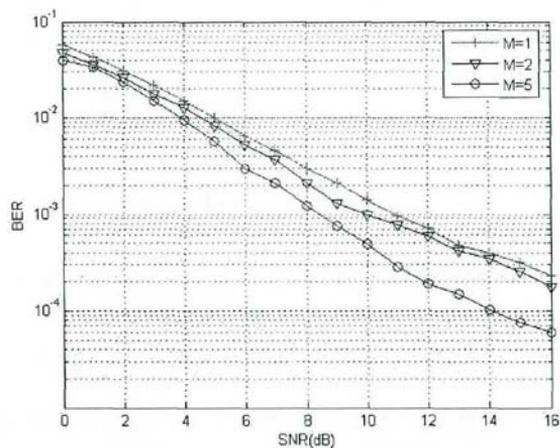


图 3.4.4 当  $M$  取不同值时, DSSTA 算法的误码率随着信噪比的变化情况

Fig3.4.4 When  $M$  is different, the BER performance diagram as number of users changes

由图 3.4.4 可以看出, 随着  $M$  值的增大, DSSTA 算法的误码率越来越小。在误码率为  $10^{-3}$  时,  $M=2$  的 DSSTA 算法比  $M=1$  的 DSSTA 算法节省 1dB,  $M=5$  的 DSSTA 算法

比  $M=2$  的 DSSTA 算法节省 2dB。

仿真 2：基于双边代价函数的子空间跟踪算法（DSSTA）的误码率和新信息准则（NIC）算法的误码率进行比较，其仿真曲线如图 3.4.4~图 3.4.5 所示。

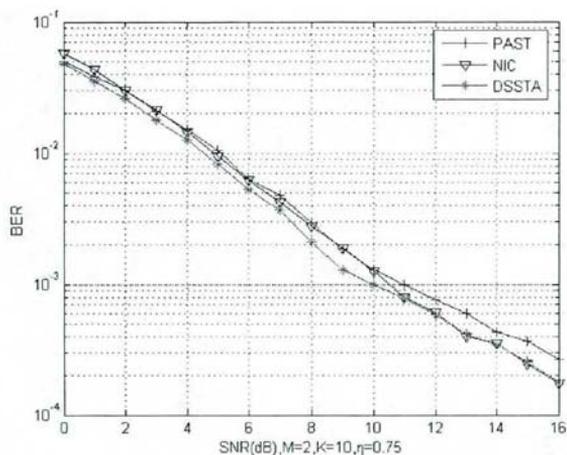


图 3.4.5 当  $M=2$  时，各种算法的误码率随着信噪比的变化情况

Fig3.4.5 When  $M=2$ , the BER performance diagram as number of users changes

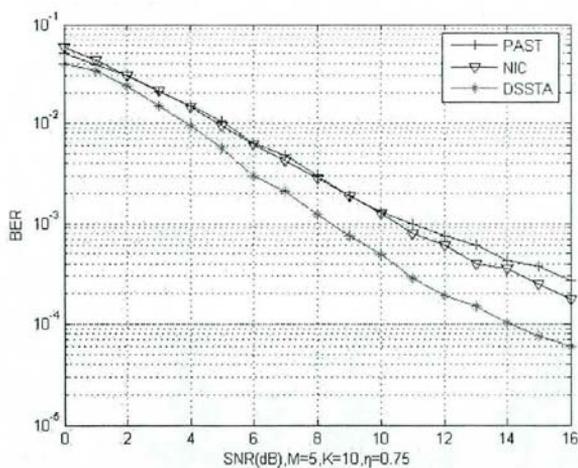


图 3.4.6 当  $M=5$  时，各种算法的误码率随着信噪比的变化情况

Fig3.4.6 When  $M=5$ , the BER performance diagram as number of users changes

图 3.4.5 和 3.4.6 表示基于双边代价函数的子空间跟踪算法（DSSTA）与新信息准则（NIC）算法的误码率的比较。从图 3.4.5 可以看出，当  $M=2$  时，DSSTA 算法的误码

率整体上低于变化步长  $\eta=0.75$  时的 NIC 算法的误码率，当信噪比 SNR=11dB 时，其误码率几乎等于 NIC 的误码率。从图 3.4.6 可以看出，当  $M=5$  时，DSSTA 的误码率明显小于变化步长  $\eta=0.75$  时的 NIC 算法的误码率。在误码率为  $10^{-3}$  时，DSSTA 算法比 NIC 算法节省 2dB。

## 第四章 基于可变遗忘因子的 PASTd 算法

上一章阐述了 PAST 算法的推导过程，并对其进行了改进，提出了基于双边代价函数的子空间跟踪算法。本章将介绍投影逼近子空间的两种改进算法，正交投影逼近子空间 (OPAST) 算法和压缩投影逼近子空间 (PASTd) 算法。通过对压缩投影逼近子空间 (PASTd) 算法的研究发现，PASTd 算法的收敛性受到遗忘因子的影响，本章将遗忘因子修改为一个可变函数，提出了基于可变遗忘因子的 PASTd 算法。

### 4.1 投影逼近子空间的改进算法

研究表明投影逼近子空间 (PAST) 算法的跟踪误差大且计算复杂度高，针对这两个缺点，文献[8][10]分别提出了改进算法。

#### 4.1.1 正交投影逼近子空间 (OPAST) 算法

正交投影逼近子空间 (OPAST) 算法是针对 PAST 算法向量跟踪误差大的缺点提出的改进算法。文献[10]分析表明 PAST 算法在每次迭代过程中不能完全满足约束条件  $W^H(t)W(t) = I$  的要求，因此收敛误差较大。针对这一原因，OPAST 算法在每一次迭代过程中对  $W(t)$  进行一次正交化运算，以保证  $W(t)$  每次都满足约束条件的要求。

首先给出正交化因子  $(W^H(t)W(t))^{-\frac{1}{2}}$ ，在每次迭代过程中与  $W(t)$  相乘来使变量矩阵  $W(t)$  正交，即

$$W(t) = W(t)(W^H(t)W(t))^{-\frac{1}{2}} \quad (4.1.1)$$

在 PAST 算法中变量矩阵  $W(t)$  的迭代过程为  $W(t) = W(t-1) + e(t)h^H(t)$ ，将其代入式 (4.1.1) 中可以得到：

$$\begin{aligned} W^H(t)W(t) &= (W(t-1) + e(t)h^H(t))^H (W(t-1) + e(t)h^H(t)) \\ &= W(t-1)^H W(t-1) + W(t-1)^H e(t)h^H(t) + e^H(t)h(t)W(t-1) + \\ &\quad \|e(t)\|^2 h(t)h^H(t) \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

由于  $W(t-1)$  满足正交约束条件，即  $W^H(t-1)W(t-1) = I$ ，在此，近似地取

$W^H(t-1)W(t) = I$ ，则

$$\begin{aligned}
 W^H(t-1)W(t) &= W^H(t-1)(W(t-1) + e(t)h^H(t)) \\
 &= W^H(t-1)W(t-1) + W^H(t-1)e(t)h^H(t) \\
 &= I + W^H(t-1)e(t)h^H(t) \\
 &= I
 \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

由式 (4.1.3) 可知， $W^H(t-1)e(t)h^H(t) = \mathbf{0}$ ，将其代入式 (4.1.2) 中，可以得到：

$$\begin{aligned}
 W^H(t)W(t) &= W(t-1)^H W(t-1) + \|e(t)\|^2 h(t)h^H(t) \\
 &= I + \|e(t)\|^2 h(t)h^H(t) \\
 &= I + x(t)x^H(t)
 \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

式 (4.1.4) 中  $x(t) = \|e(t)\|h(t)$ 。

由式 (4.1.4) 可以得出  $W^H(t)W(t)$  的均方根的逆矩阵为：

$$\begin{aligned}
 (W^H(t)W(t))^{-\frac{1}{2}} &= I + \frac{1}{\|x(t)\|^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \|x(t)\|^2}} - 1 \right) x(t)x^H(t) \\
 &= I + \tau(t)h(t)h^H(t)
 \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

式 (4.1.5) 中  $\tau(t) = \frac{1}{\|h(t)\|^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \|e(t)\|^2 \|h(t)\|^2}} - 1 \right)$ 。

将 (4.1.5) 式代入 (4.1.1) 式中可得

$$\begin{aligned}
 W(t) &= W(t)(W^H(t)W(t))^{-\frac{1}{2}} \\
 &= (W(t-1) + e(t)h^H(t))(I + \tau(t)h(t)h^H(t)) \\
 &= W(t-1) + e(t)h^H(t) + W(t-1)\tau(t)h(t)h^H(t) + e(t)h^H(t)\tau(t)h(t)h^H(t) \\
 &= W(t-1) + (e(t) + W(t-1)\tau(t)h(t) + e(t)h^H(t)\tau(t)h(t))h^H(t) \\
 &= W(t-1) + (W(t-1)\tau(t)h(t) + (\tau(t)\|h(t)\|^2 + 1)e(t))h^H(t) \\
 &= W(t-1) + E(t)h^H(t)
 \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

式 (4.1.6) 中  $E(t) = W(t-1)\tau(t)h(t) + (\tau(t)\|h(t)\|^2 + 1)e(t)$ 。

将式 (4.1.6) 代入 PAST 算法中就可得到正交投影逼近子空间 (OPAST) 算法如下：

**算法 4.1 (正交投影压缩逼近子空间 (OPAST) 算法)**

```

for  $t = 1, 2, \dots$ , do
     $y(t) = W^H(t-1)r(t)$ 
     $h(t) = P(t-1)y(t)$ 
     $g(t) = \frac{h(t)}{\beta + y^H(t)h(t)}$ 
     $P(t) = \frac{1}{\beta} \text{Tri}\{P(t-1) - g(t)h^H(t)\}$ 
     $e(t) = r(t) - W^H(t-1)y(t)$ 
     $\tau(t) = \frac{1}{\|h(t)\|^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \|e(t)\|^2 \|h(t)\|^2}} - 1 \right)$ 
     $E(t) = W(t-1)\tau(t)h(t) + (\tau(t)\|h(t)\|^2 + 1)e(t)$ 
     $W(t) = W(t-1) + E(t)h^H(t)$ 
end
    
```

经分析可知, OPAST 算法的计算复杂度为  $4NK + O(K^2)$ , 比 PAST 算法的计算复杂度只有稍微的提高, 但是其向量跟踪误差且明显低于 PAST 算法。

OPAST 算法要求  $P(t)$  满足 Hermitian 正定条件, 但是在迭代过程中  $P(t)$  并不完全满足 Hermitian 正定性, 并且随着迭代次数的累加,  $P(t)$  的 Hermitian 正定性越来越弱, 所以随着迭代次数的增加, OPAST 算法开始发散。针对该问题, 文献[13]对 OPAST 算法的  $P(t)$  只计算其上三角或者下三角, 然后再复制过去, 即上述算法中 Tri 运算, 这使矩阵  $P(t)$  在每次迭代过程中都能严格满足 Hermitian 正定条件, 从而保证 OPAST 算法始终收敛。

**4.1.2 压缩投影逼近子空间 (PASTd) 算法**

通过研究表明, PAST 算法和 OPAST 算法的计算复杂度很高, 分别为  $3NK + O(K^2)$  和  $4NK + O(K^2)$ , 文献[33]针对这一缺点提出了改进算法——压缩投影逼近子空间 (PASTd), 其具体的改进思想如下:

$W(t)$  是接收信号自相关矩阵的主特征向量矩阵, 在每次迭代更新过程中进行的都是矩阵运算, 所以计算复杂度高。在此, 令主特征矩阵  $W(t)$  的秩为 1, 那么  $W(t)$  只是

代表自相关矩阵的一个特征向量，那么在迭代过程中进行的是向量运算，其复杂度将会降低。通过这种方法对  $W(t)$  进行更新，第一次将迭代出特征值最大的特征向量，然后将其从接收信号空间中减去，再进行迭代，迭代出特征值次大的特征向量，这样依次进行  $K$  次迭代，可以将信号子空间的  $K$  个特征向量全部迭代出来。其迭代算法如下：

**算法 4.2 (压缩投影逼近子空间 (PASTd) 算法)**

```

选择初始化向量  $d_i(0)$  和  $w_i(0)$ 
for  $t = 1, 2, \dots$ , do
     $x_i(t) = r(t)$ 
    for  $i = 1, 2, \dots, r$ , do
         $y_i(t) = w_i^H(t-1)x_i(t)$ 
         $d_i(t) = \beta d_i(t-1) + |y_i(t)|^2$ 
         $e_i(t) = x_i(t) - w_i(t-1)y_i(t)$ 
         $w_i(t) = w_i(t-1) + e_i(t)[y_i^H(t) / d_i(t)]$ 
         $x_{i+1}(t) = x_i(t) - w_i(t)y_i(t)$ 
    end
end
    
```

经分析可知，PASTd 算法的计算复杂度为  $4NK + O(K)$ ，比 PAST 算法的计算复杂度要低的多，而且其向量跟踪误差也明显降低。但是其收敛速度且明显变慢，究其原因，在建立目标函数的时候要求变量矩阵  $W(t)$  具有正交性，即  $W(t)W^T(t) = I$ ，但是在 PASTd 算法的每一次迭代中并不能保证  $W(t)$  的正交性，所以其收敛速度变慢。针对上述问题，文献[11][12]在 PASTd 算法每次迭代过程中，对向量  $W(t)$  进行斯密特正交化计算，来保证目标函数满足正交约束条件，从而提高了 PASTd 算法的收敛速度。

**4.1.3 性能仿真**

本节对 PAST, OPAST 和 PASTd 算法的性能进行仿真，仿真参数为：采用 31 位的 Gold 码作为扩频波形，发送码元个数为 10000 个，干扰用户分别取 10 个和 15 个，其能量为噪声能量的 8 倍，高斯白噪声的标准差为  $\sigma = 0.8$ ，误码率的计算采用蒙特卡罗方法计算 200 次的平均值。

PAST, PASTd 和 OPAST 算法的误码率 (BER) 随着信噪比 (SNR) 的变化情况的比较，其变化曲线如图 4.1.1~4.1.4 所示。

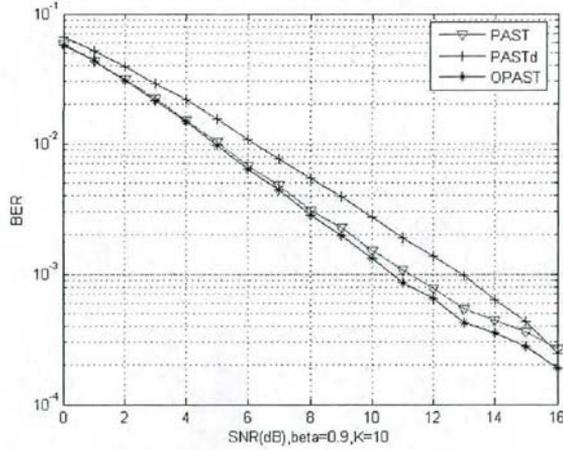


图 4.1.1 干扰用户  $K=10$ , 遗忘因子  $\beta=0.9$  时, 各种算法的误码率随着信噪比的变化情况  
 Fig4.1.1 When  $K = 10$ , forgetting factor  $\beta = 0.9$ , the BER performance diagram as SNR changes

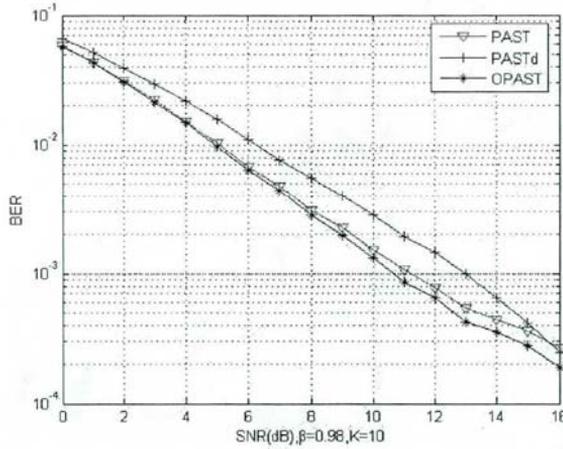


图 4.1.2 干扰用户  $K=10$ , 遗忘因子  $\beta=0.98$  时, 各种算法的误码率随着信噪比的变化情况  
 Fig4.1.2 When  $K = 10$ , forgetting factor  $\beta = 0.98$ , the BER performance diagram as SNR changes

图 4.1.1 和 4.1.2 表示 10 个干扰用户的 PAST 算法, PASTd 算法和 OPAST 算法的误码率随着信噪比的变化情况。从图中可以看出, 随着信噪比的增大 PAST 和 OPAST 算法的误码率几乎相同, 其中 OPAST 算法的误码率稍低, 其原因是 OPAST 算法对 PAST 算法中的特征向量矩阵进行了正交化运算。PASTd 算法的误码率要明显高于其他两种算法, 究其原因, PASTd 算法中的特征向量是通过  $K$  迭代产生, 每次迭代都存在迭代误差, 经过  $K$  次累加, 误差变大。当遗忘因子  $\beta=0.9$  和  $\beta=0.98$  时, 三种算法的误码率几乎相通, 这说明 PAST, OPAST 和 PASTd 算法受遗忘因子影响较小。

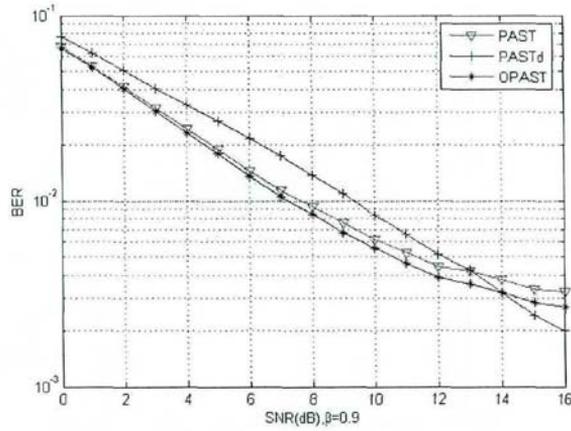


图 4.1.3 干扰用户  $K=15$ , 遗忘因子  $\beta=0.9$  时, 各种算法的误码率随着信噪比的变化情况  
 Fig4.1.3 When  $K=15$ , forgetting factor  $\beta=0.9$ , the BER performance diagram as SNR changes

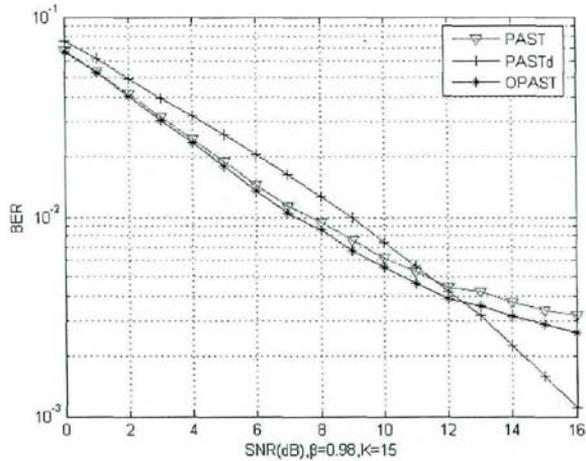


图 4.1.4 干扰用户  $K=15$ , 遗忘因子  $\beta=0.98$  时, 各种算法的误码率随着信噪比变化情况  
 Fig4.1.4 When  $K=15$ , forgetting factor  $\beta=0.98$ , the BER performance diagram as SNR changes

图 4.1.3 和图 4.1.4 是干扰用户  $K=15$  时 PAST, PASTd 和 OPAST 算法的误码率随着信噪比的变化情况。从图中可以看出随着信噪比的增大, OPAST 算法的误码率低于 PAST 算法, PASTd 算法的误码率在信噪比小于 13dB 时高于 PAST 算法, 当信噪比大于 13dB 时, PASTd 算法的误码率要低于 PAST 算法和 OPAST 算法, 这说明随着信噪比的增大, PASTd 算法的性能越来越好。在图 4.1.1 和图 4.1.2 中, 当干扰用户数为 10 个, 信噪比

SNR=16dB 时, 误码率在  $10^{-3}$  到  $10^{-4}$  之间, 在图 4.1.3 和图 4.1.4 中, 当干扰用户为 15 个, 信噪比 SNR=16dB 时, 误码率在  $10^{-2}$  到  $10^{-3}$  之间。由此可以看出, PAST, OPAST 和 PASTd 算法的性能受用户数的影响较为明显。

## 4.2 基于可变遗忘因子的 PASTd 算法

通过文献[36]对 PASTd 算法的收敛性能仿真分析可知, 压缩投影逼近子空间(PASTd) 算法的收敛性能受到遗忘因子  $\beta$  的影响。当 PASTd 算法的遗忘因子  $\beta$  取较大的常数时, 其向量跟踪误差小, 收敛速度慢; 当 PASTd 算法的遗忘因子取较小的常数时, 其向量跟踪误差大, 收敛速度快。本节对 PASTd 算法的这一特性进行改进, 使 PASTd 算法既有较快收敛速度又有较小跟踪误差。

### 4.2.1 可变遗忘因子的选取

经上述分析可知, 向量跟踪误差受到遗忘因子的影响。将遗忘因子修改为关于跟踪误差的可变函数<sup>[37]</sup>, 当向量跟踪误差较大的时候, 遗忘因子取较小的值, 从而提高收敛速度, 当向量跟踪误差较小的时候, 遗忘因子取较大的值, 从而降低向量跟踪误差。这样在子空间迭代的过程中, 既可以提高 PASTd 算法的收敛速度, 又可以降低跟踪误差。这种关于跟踪误差的函数是一种钟形函数, 当跟踪误差趋于 0 时, 遗忘因子趋于 1, 当跟踪误差趋于无穷大时, 遗忘因子趋于 0。

钟形函数有很多种, 下面将介绍几种常用的钟形函数, 并给出函数图形, 比较其性能特征, 选取合适的钟形函数作为可变遗忘因子函数。

#### 1. 高斯 (Gauss) 函数

自变量为误差  $e(t)$  的高斯函数形式为:

$$G(e(t)) = \exp\left(-\frac{(e(t)-a)^2}{\delta^2}\right) \quad (4.2.1)$$

其中,  $a$  表示高斯函数图形的中心,  $\delta$  表示高斯函数图形的扩展常数或者宽度,  $\delta$  的值越大, 高斯函数的图形越宽,  $\delta$  的值越小, 高斯函数图形的值越窄。PASTd 算法要求在误差  $e(t)$  趋于 0 时, 可变遗忘因子趋于 1, 所以令高斯函数的中心为纵坐标, 即  $a=0$ 。

高斯函数的图形如图 4.2.1 所示。

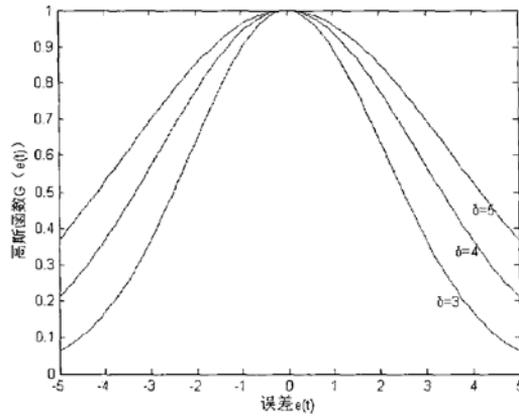


图 4.2.1 不同  $\delta$  值的高斯函数图形

### 2. 逆多二次函数

自变量为误差  $e(t)$  的逆多二次函数形式为：

$$M(t) = \frac{1}{(e^2(t) + \delta^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.2.2)$$

其中， $\delta$  表示逆多二次函数图形的峰值， $\delta$  的值越大，逆多二次函数的峰值越小，图形越低； $\delta$  的值越小，逆多二次函数的峰值越大，图形越高。由于 PASTd 算法的遗忘因子介于 0 到 1 之间，所以逆多二次函数中  $\delta$  应取 1。逆多二次函数的图形如图 4.2.2 所示。

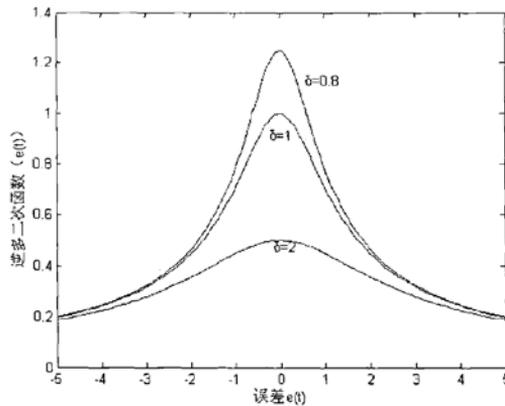


图 4.2.2 不同  $\delta$  值的逆多二次函数图形

### 3. Sigmodal 函数

自变量为误差  $e(t)$  的 Sigmodal 函数形式为：

$$S(e(t)) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{1}{e^2(t)}\right)} \quad (4.2.3)$$

其中, 当  $e(t)$  趋于 0 时, Sigmodal 函数值趋于 1, 当  $e(t)$  趋于无穷大时, Sigmodal 函数值趋于  $\frac{1}{2}$ 。其函数图形如图 4.2.3 所示。

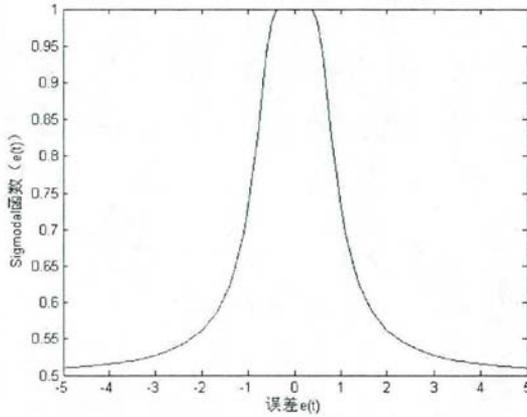


图 4.2.3 Sigmodal 函数随自变量  $e(t)$  的变化曲线

#### 4.2.2 可变遗忘因子的 PASTd 算法

遗忘因子  $\beta$  的作用是对距当前信号不同时刻的信号赋予不同的相关系数, 根据实际通信的情况可知, 所有信号之间的相关程度不可能都趋于 0, 所以在误差较大时可变遗忘因子不应趋于 0, 因此选取第三种钟形函数 Sigmodal 函数作为可变遗忘因子函数<sup>[38]</sup>。

根据 Sigmodal 函数定义可变遗忘因子为:

$$\beta(e(n)) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{1}{(\text{sum}|e(n)|/\text{length}(e(n)))^2}\right)} \quad (4.2.4)$$

其中,  $e(n)=x(n)-w(n)y(n)$ ,  $\text{sum}|e(n)|$  表示误差向量  $e(n)$  的各元素之和,  $\text{length}(e(n))$  表示误差向量  $e(n)$  的元素个数。

由图 4.2.3 可以看出, Sigmodal 函数的图形变化曲线非常陡峭, 自变量  $e(n)$  在很小的范围内, 函数值很快从 1 降低到 0.5, 这使可变遗忘因子随向量误差变化速度太快。

当遗忘因子非常小时，跟踪向量将发散。在此，给 Sigmodal 函数设立一个临界值  $\mu$ ，使可变遗忘因子有一个下界，避免 PASTd 算法出现发散现象。因此可变遗忘因子可修改为：

$$\beta(e(n)) = \mu + \frac{1 - \mu}{1 + \exp\left(-\frac{1}{(\sum |e(n)| / \text{length}(e(n)))^2}\right)} \quad (4.2.5)$$

其中  $0 < \mu < 1$ 。其函数图形如图 4.2.4 所示。

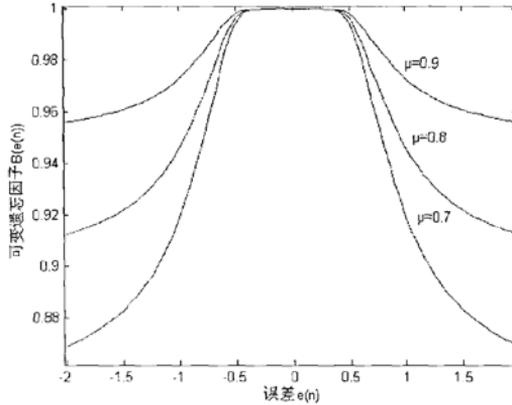


图 4.2.4 不同临界值  $\mu$  的可变遗忘因子函数

由图 4.2.4 可知，当  $\mu=0.9$  时， $0.9 < \beta(e(n)) < \mu$ ，当  $\mu=0.8$  时， $0.8 < \beta(e(n)) < \mu$ ，当  $\mu=0.7$  时， $0.7 < \beta(e(n)) < \mu$ ，所以设立临界值的可变遗忘因子  $\beta(e(n)) \geq \mu$ ，并且随着临界值  $\mu$  的增大，可变遗忘因子的变化区间越来越小，随向量误差的变化速度变慢，其向量跟踪误差降低，收敛速度变慢。改进的 PASTd 算法如下：

**算法 4.3 (可变遗忘因子的 PASTd 算法)**

选择初始化向量  $d_i(0)$  和  $w_i(0)$

for  $t = 1, 2, \dots$ , do

$$x_i(t) = x(t)$$

for  $i = 1, 2, \dots, r$ , do

$$y_i(t) = w_i^H(t-1)x_i(t)$$

$$e_i(t) = x_i(t) - w_i(t-1)y_i(t)$$

$$\beta(n) = \mu + (1 - \mu) / (1 + e^{-1/(\sum |e(n)| / \text{length}(e(n)))^2})$$

$$d_i(t) = \beta d_i(t-1) + |y_i(t)|^2$$

$$w_i(t) = w_i(t-1) + e_i(t)[y_i^H(t) / d_i(t)]$$

$$x_{i+1}(t) = x_i(t) - w_i(t)y_i(t)$$

end

end

### 4.2.3 性能仿真

本实验从两个方面对可变遗忘因子 PASTd 算法的性能进行仿真比较。一是对不同临界值  $\mu$  的可变遗忘因子 PASTd 算法的收敛性能进行对比, 以及可变遗忘因子与遗忘因子为常数的 PASTd 算法的收敛性能进行对比, 研究改进算法的收敛速度和跟踪误差的变化情况; 二是对不同临界值  $\mu$  的 PASTd 算法的误码率进行比较, 以及可变遗忘因子与遗忘因子为常数的 PASTd 算法的误码率进行比较。为了记述方便, 将可变遗忘因子的 PASTd 算法简称为 newPASTd 算法。

#### 1. 收敛性能的比较

本仿真实验的参数为: 扩频码采用 31 位的 Golg 码, 用户 1 为期望用户, 系统中干扰用户数为 5 个, 其能量都相等, 为期望用户的 20 倍, 迭代次数为 2000 次, 向量跟踪误差的计算采用蒙特卡罗方法为 200 次试验结果的平均值。

仿真 1: 不同临界值的 newPASTd 算法的收敛性能的比较, 其仿真曲线如图 4.2.5 所示。

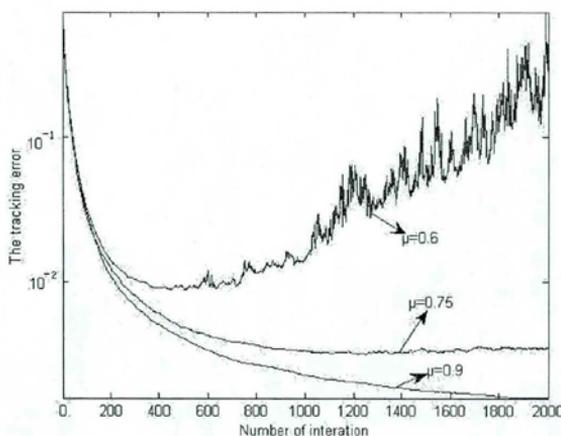


图 4.2.5 不同的临界值  $\mu$  的 newPASTd 算法是向量跟踪误差  
Fig4.2.5 The tracking error of different  $\mu$

由图 4.2.5 可知, 随着临界值的减小, newPASTd 算法的向量跟踪误差越来越大, 收敛速度也越来越快, 当临界值小于一定值时, newPASTd 算法开始发散。由图可知, 当

临界值  $\mu=0.9$  时, newPASTd 算法迭代约 1000 次收敛, 向量跟踪误差接近  $10^{-3}$ 。当  $\mu=0.75$  时, newPASTd 算法迭代约 600 次收敛, 向量跟踪误差比  $\mu=0.9$  时稍高。当  $\mu=0.6$  时, 迭代 1000 次之后开始发散。

仿真 2: newPASTd 算法与 PASTd 算法的收敛性能的比较, 其仿真曲线如图 4.2.6-4.2.7 所示。

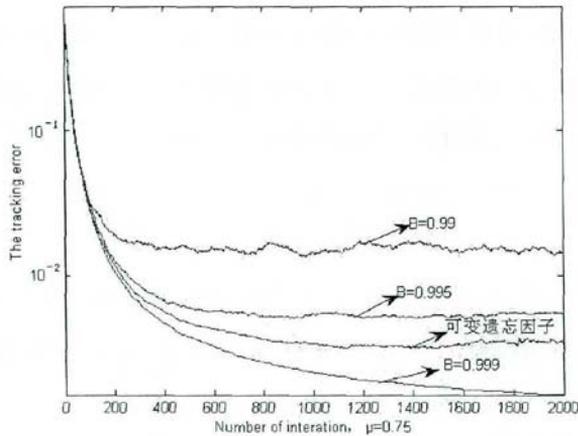


图 4.2.6 newPASTd 算法和不同遗忘因子的 PASTd 算法向量跟踪误差  
Fig4.2.6 The tracking error of different forgetting factor and variable forgetting factor PASTd algorithm

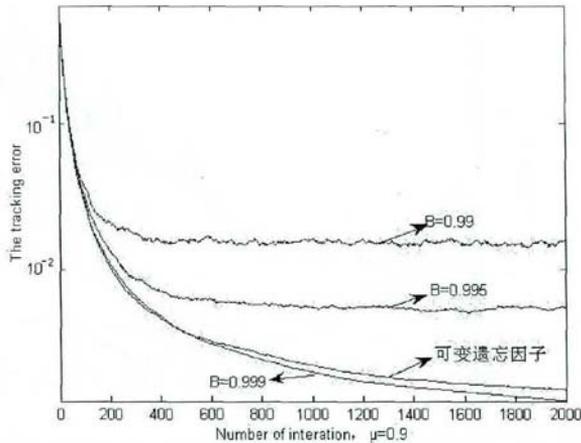


图 4.2.7 newPASTd 算法和不同遗忘因子的 PASTd 算法向量跟踪误差  
Fig4.2.7 The tracking error of different forgetting factor and variable forgetting factor PASTd algorithm

由图 4.2.6 和图 4.2.7 可以看出, newPASTd 算法的向量跟踪误差和收敛速度是遗忘因子为不同常数的 PASTd 算法的折中。由图可以看出, 当遗忘因子为 0.99 时, PASTd 算法迭代约 200 次收敛, 其收敛误差在  $10^{-1}$  与  $10^{-2}$  之间; 当遗忘因子为 0.995 时, PASTd 算法迭代约 400 次收敛, 其收敛误差为  $10^{-2}$ ; 当遗忘因子为 0.999 时, PASTd 算法迭代约 1600 次收敛, 其收敛误差接近  $10^{-3}$ 。图 4.2.6 中 newPASTd 算法的临界值为 0.75, 迭代约 600 次开始收敛, 其跟踪误差明显低于遗忘因子常数为 0.99 和 0.995 的误差。图 4.2.7 中 newPASTd 算法的临界值为 0.9, 迭代约 1200 次开始收敛, 其跟踪误差接近遗忘因子常数为 0.999 的误差, 但是收敛速度比其快约 400 次。

## 2. 误码率的比较

本仿真实验的参数为: 采用 31 位的 Gold 码作为扩频波形, 用户 1 为期望用户, 系统中使用 10 个和 15 个干扰用户, 干扰用户的能量相同, 为期望用户的 8 倍, 发送码元个数为 10000 个, 噪声为随机加性高斯白噪声, 其标准差  $\sigma = 0.8$ , 误码率的计算采用蒙特卡罗方法求 200 次误码率的平均值。

仿真 3: 10 个干扰用户时 newPASTd 算法与 PAST, PASTd 和 OPAST 算法的误码率的比较, 变化曲线如图 4.2.8~4.2.9 所示。

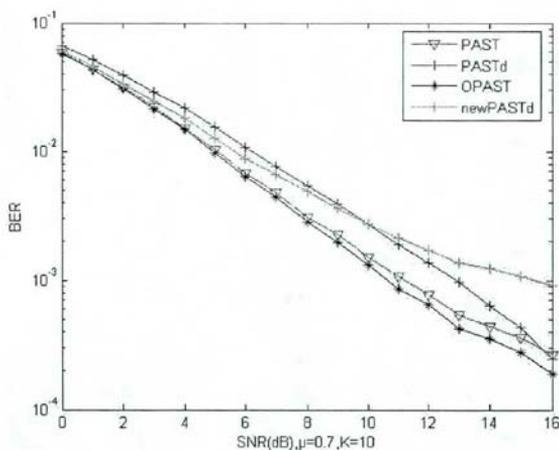


图 4.2.8 干扰用户  $K=10$ , 临界值  $\mu=0.7$  时, 各种算法的误码率随着信噪比变化曲线

Fig4.2.8 When  $K=10$ , threshold  $\mu=0.7$ , the BER performance diagram as number of users changes

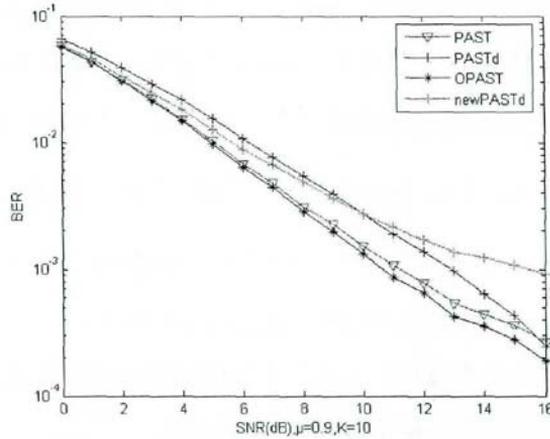


图 4.2.9 干扰用户  $K=10$ , 临界值  $\mu=0.9$  时, 各种算法的误码率随着信噪比变化曲线

Fig4.2.9 When  $K = 10$ , threshold  $\mu = 0.9$ , the BER performance diagram as number of users changes

图 4.2.8 和 4.2.9 表示 10 个干扰用户时的 newPASTd 算法和 PAST, OPAST 和 PASTd 算法的误码率曲线。由图可以看出, newPASTd 算法的误码率整体上要低于 PASTd 算法的误码率, 但是比 PAST 算法和 OPAST 算法误码率要高。当信噪比不断增大时, newPASTd 算法的误码率大于 PASTd 算法的误码率, 当信噪比  $SNR=10dB$  时, newPASTd 算法的误码率开始高于 PASTd 算法的误码率。这说明可变遗忘因子 PASTd 算法受信噪比的影响比 PASTd 算法小。

仿真 4: 15 个干扰用户时 new PASTd 算法与 PAST, PASTd 和 OPAST 算法的误码率的比较, 变化曲线如图 4.2.10~4.2.11 所示。

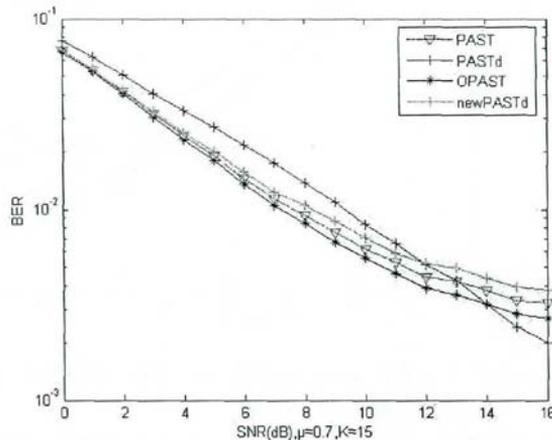


图 4.2.10 干扰用户  $K=15$ , 临界值  $\mu=0.7$  时, 各种算法的误码率随着信噪比变化曲线

Fig4.2.10 When  $K = 15$ , threshold  $\mu = 0.7$ , the BER performance diagram as number of users changes

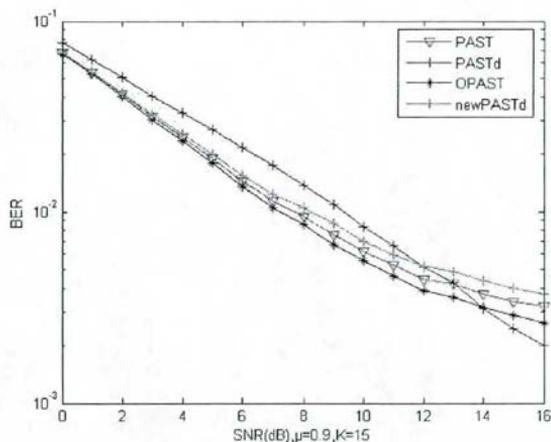


图 4.2.11 干扰用户  $K=15$ , 临界值  $\mu=0.9$  时, 各种算法的误码率随着信噪比变化曲线

Fig4.2.11 When  $K = 15$ , threshold  $\mu = 0.9$ , the BER performance diagram as number of users changes

图 4.2.10 和 4.2.11 是干扰用户  $K=15$  时 newPASTd 算法的误码率与 PAST, OPAST 和 PASTd 算法的误码率比较。由图可以看出, 其误码率的变化情况和图 4.2.8 和 4.2.9 基本相同。当信噪比  $SNR=12dB$  时, newPASTd 算法的误码率开始远远小于 PASTd 算法的误码率, 比干扰用户数为 10 的要大 2 个 dB。在图 4.2.8 和图 4.2.9 中, 干扰用户数  $K=10$ , 当信噪比  $SNR=16dB$  时, newPASTd 算法的误码率略高于  $10^{-3}$ 。在图 4.2.10 和图 4.2.11 中, 干扰用户数  $K=15$ , 当信噪比  $SNR=16dB$  时, newPASTd 算法的误码率在  $10^{-2}$  和  $10^{-3}$  之间, 与 PAST, OPAST 和 PASTd 算法相比, newPASTd 算法受用户数的影响要小的多。

总结: newPASTd 算法的性能在整体上要优于 PASTd 算法, 而且受干扰用户的影响小。

## 第五章 总结与展望

### 5.1 总结

从 1986 年 Verdu 在他的博士论文中提出最优多用户检测算法至今, 多用户检测的发展已经经历了二十多年的历史。在此期间, 多位学者从不同的方向对多用户检测技术进行各种各样的研究, 例如基于子空间的盲多用户检测, 基于神经网络的多用户检测, 基于空时编码的多用户检测等等。现今, 第三代移动通信已经在世界各地成功的运行起来, 我国也于 2008 年 12 月 12 日颁布了 3G 牌照。虽然我国的 3G 网络刚刚起步, 但是多用户检测技术已经日趋成熟了。笔者三年来致力于从子空间方面对盲多用户检测进行改进, 期望提高多用户检测的性能。

本文根据子空间迭代算法的特点对基于子空间的盲多用户检测提出了改进方法, 其主要工作如下:

(1) 研究了几种基本的多用户检测器, 介绍各种检测器的设计原理, 给出各种检测器的表达形式, 分析各种检测器的优缺点, 并通过计算机仿真实验来验证其检测性能。

(2) 对基于优化理论子空间迭代算法进行了深刻的研究, 分析了各种算法的基本思想和推导过程, 阐述了算法中各个参数的意义, 并对各种算法进行计算机性能仿真, 比较其收敛性能的优缺点, 提出改进的思路。

(3) 提出了基于双边代价函数的子空间跟踪 (DSSTA) 算法。通过对信道的相关性研究表明, 时变信道的相关性可以用相关时间来表示, 在当前时刻附近的相关时间里, 信道具有强的相关性。但是传统的代价函数只考虑当前时刻之前信息的相关性, 没有考虑当前时刻之后的相关性。本文将代价函数加入后验信息, 建立了双边代价函数, 推导出基于双边代价函数的子空间跟踪算法。最后通过计算机仿真, 表明 DSSTA 算法的性能明显好于 PAST 算法, 比新信息准则 (NIC) 算法的性能也好。

(4) 对压缩投影逼近子空间 (PASTd) 算法进行了改进。通过研究发现, PASTd 算法的收敛性能受到遗忘因子的影响。当遗忘因子较大时, 算法收敛快, 但是跟踪误差大; 当遗忘因子较小时, 算法收敛慢, 但是跟踪误差低。本文将遗忘因子修改为关于向量跟踪误差的函数, 在迭代之初, 使遗忘因子取较大的值, 提高收敛速度, 在迭代之末, 使遗忘因子取较小的值, 降低跟踪误差。通过仿真实验表明, newPASTd 算法的收敛速度

高于遗忘因子  $\beta = 0.999$  的 PASTd 算法的收敛速度, 向量跟踪误差低于遗忘因子  $\beta = 0.99$  和  $\beta = 0.995$  的 PASTd 算法。

## 5.2 展望

本文对基于子空间跟踪算法的盲多用户检测进行了改进, 提出了基于双边代价函数的子空间迭代算法和可变遗忘因子的 PASTd 算法, 仿真表明其性能比原算法有了一定的提高, 从目前的工作来看, 仍有以下一些问题和想法需要进一步研究和完善:

(1) 基于双边代价函数的子空间迭代算法在相同信道下误码率有了明显的降低, 但是其计算复杂度却高达  $3MNK + O(MK^2)$ , 为原算法复杂度的  $M$  倍。为了降低其计算复杂度, 可根据 PASTd 算法的原理, 令双边代价函数子空间迭代算法的特征向量矩阵的秩为 1, 首先迭代出最大特征值所对应的特征向量, 然后从接收信号空间中减去, 依次迭代  $K$ , 从而得到信号子空间的所有特征向量。

(2) 本文将 PASTd 算法的遗忘因子修改为关于跟踪误差的 Sigmoidal 函数, 提出了可变遗忘因子的 PASTd 算法。其可变遗忘因子亦可为高斯函数或者逆二次函数, 通过仿真比较不同可变遗忘因子的 PASTd 的性能, 选择最合适的可变遗忘因子函数。

(3) 研究表明, 子空间跟踪算法的特点和径向基神经网络的训练过程很相似, 可以利用径向基神经网络对信号子空间进行跟踪, 实现径向基与子空间相结合的盲多用户检测, 从而简化子空间跟踪的过程, 提高盲多用户检测的精度。

论文到此告一段落, 由于作者经验不足水平有限, 文中难免有漏洞和不足之处, 在此敬请各位专家、老师及同学批评指正。

## 参考文献

- [1]K.S.Schneider. Optimum Detection of Code Division Multiplexed Signals [J].IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems,1979,15(1):18-21.
- [2]R.Kohno,H.Imai,M.Hatori. Cancellation Techniques of Co-Channel Interference in Asynchronous Spread Spectrum Multi-user Access System [J].IEICE Transactions on communications,1983,65:533-544.
- [3]S.Verdu. Minimum Probability of Error for Asynchronous Gaussian Multiple-access Channels [J].IEEE Transactions on Information Theory, 1986,32(1):85-96.
- [4]Parris B P. Finite precision decorrelating receivers for multiuser CDMA communication systems[J].IEEE Trans.Commun,1996,44:496-507.
- [5]Madhow U. MMSE interference suppression for timing acquisition and demodulation indirect-sequence CDMA systems[J],IEEE Trans. Commun, 1998, 46:1065-1075.
- [6]Honing M, Madhow U, Verdu S. Blind adaptive multiuser detection[J].IEEE Trans.Inform.Theory,1995,41:944-960
- [7]Wang X, Poor H V. Blind multiuser detection: A subspace approach. IEEE, J, Select. Areas Commun, 1998, 46:91-103
- [8]张贤达.矩阵分析与应用[M], 北京: 清华大学出版社, 1998, 621~622.
- [9]B Yang. Projection Approximation Subspace Tracking.[J],IEEE Trans.on Signal Processing,1995,43(1):95-107.
- [10]Abend-Meraim K, Chkeif A, Hua Y. Fast Orthonormal PAST Algorithm.[J].IEEE Signal Processing Letters,2000,7:60-62
- [11]孟艳, 汪晋宽, 宋昕. 基于改进的 PASTd 子空间跟踪的半盲多用户检测. [J] 东北大学学报, 2007 第 28 卷第 5 期, 648-651.
- [12]贺宁蓉, 吕善伟, 常戎. 子空间跟踪 PASTd 算法的改进及其应用. [J] 现代雷达, 2005 年第 27 卷第 11 期, 75-78.
- [13]张晋, 张辉. 对子空间跟踪 OPAST 算法的分析和改进[J].现代电子技术, 2003 年第 6 期, 46-50.

- [14]Yongfeng Miao,Yingbo Hua. Fast Subspace Tracking and Neural network Learning by a Information Criterion[J].IEEE,Trans Access on Signal Processiom.1998,46,1967-1979.
- [15]R.Baseau,K.Abed-Meraim,G.Richard,B. David. Sliding Window Orthonormal PAST Algorithm[J].IEEE,International Conferece on.2003 ,5,261-264
- [16]谢韬, 刘宏立. 基于 APA 和子空间跟踪的盲自适应多用户检测器[J]. 计算机测量与控制. 2009, 17 (8) 1605-1607.
- [17]钱林杰, 石斌斌等.一种复快速数据投影子空间跟踪算法.信号处理, 2009 年第 25 卷第 11 期, 1799-1803.
- [18]温静, 李洁, 高新波.基于增量张量子空间学习的自适应目标跟踪[J].电子学报, 2009 年第 7 期, 1618-1622.
- [19]史永超, 王华奎. 基于子空间跟踪算法的盲多用户检测技术研究[J].信号处理, 2008 年第 24 卷第 4 期, 644-647.
- [20]刘欣, 赵晓晖. 改进的基于子空间跟踪的盲多用户检测算法[J].系统工程与电子技术, 2008 年第 30 卷第 2 期, 218-221.
- [21]Roland Badeau,Gael Richard,Bertrand David. Approximated Power Iterations For Fast Subspace Tracking[A].ISSPA,Processings of The Seventh International Symposium,2003,583-586.
- [22]Roland Badeau,Member. Fast Approximated Power Iteration Subspace Tracking[J].IEEE,Transactions on Signal Processing,2005,8,2931-2941.
- [23]郭冬临, 刘宏立. 基于子空间跟踪的盲自适应多用户检测技术研究.计算测量与控制, 2009,17 (9) ,1701-1704.
- [24]Verdu.S. Optimum probabihty of error for asynchronous Gaussian multi-access channels.[J]IEEE Trans Inform.Theory,1986,32:85~96.
- [25]Verdu S. Multiuser detection[M].Cambridge University Press,1998.
- [26]Miller S L.Training analysis of adaptive interference suppression for direct-sequence code-division multiple-access systems.[J]IEEE Trans.Commun, 1995,44:488~494
- [27]Wong t F,Lok T M,Lehnert J S.Asynchronous multiple-access interference suppression and chirp waveform selection with aperiodic random sequence.[J]IEEE Trans.Commun,1999,47:103~114.
- [28]Woodward G,Vucetic B S.Adaptive dective for DS-CDMA.Proc[J].IEEE,1998,86:

1413~1434

- [29]Golub G H, Van Loan C F. Matrix Computation[M]. 2<sup>nd</sup> ed. Baltimore: The John Hopkins University Press. 1989, 75
- [30]Saad Y, Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems[M]. New York: Manchester University Press, 1992, 63.
- [31]Sherman J, Morrison W J. Adjustment of an inverse matrix corresponding to change in the elements of a given column or a given row of the original matrix[M]. Ann Math Statist, 1949, 20: 621
- [32]Sherman J, Morrison W J. Adjustment of an inverse matrix corresponding to change in the elements of a given matrix. [M] Ann Math Statist, 1950, 21: 124~127
- [33]Yang B. An extension of the PASTd algorithm to both rank and subspace tracking[J]. IEEE Signal Processing Lett, 1995, 2: 170~182
- [34]Abbott D. The Biographical Dictionary of Sciences[M]. New York: P. Bedrick Books, 1986.
- [35]Stiefel. E. Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. [J] Commentarii Math Helvetici, 1936, 8: 305~353
- [36]李艳萍. CDMA 移动通信系统上下行链路多用户检测算法研究[D]. 太原, 太原理工大学, 2008. 100~101
- [37]陈涵, 刘会金, 李大路, 代静. 基于可变遗忘因子广义 RLS 算法的频率估计[J]. 电力自动化设备, 2008, 7 (28) 45~48.
- [38]陈国础, 宋文涛, 罗汉文, 陈强. 一种改进 RLS 算法的性能研究及应用[J]. 无线电通信技术, 2005, 3 (31) 42~43
- [39]P. A. Bello, Characterization of Randomly Time-Variant Linear Channels[J]. IEEE Trans on Communications Systems, 1963; CS-11(12) 360~393
- [40]邓拥军, 杨知行, 郭兴波. 一种基于 RLS 算法的改进自适应算法 DSRLS[J]. 无线电工程, 2004, 6 (34) 10~12
- [41]周晓彦, 郑文明. 基于核的双子空间方法及其快速求解算法[J]. 模式识别与人工智能, 2010 年 12 月, 23 (6), 829~835.
- [42]李少远, 吴永玲. 时变遗忘因子的子空间辨识及预测控制器设计[J]. 同济大学学报, 2010 年 11 月, 38 (11), 1651~1655.

- [43]李娜,赵慧洁.基于形态学与正交子空间投影的端远提取方法[J].北京航空航天大学学报, 2010年12月, 36(12), 1457~1460

## 致谢

经过三年的努力,我圆满完成了研究生期间开设的各门课程和各项研究课题。在此,我向三年来所有帮助和关注我的人表示深深的感谢。

首先,我要衷心地感谢太原理工大学研究生院,她给了我继续学习的机会,让我受到了更多的教育,让我学习了更丰富的知识,让我结识了更多的朋友。本科毕业之后,我参加了工作,因此这个机会对于我来说尤为珍贵,在此,我表示诚挚的谢意。

特别感谢我的导师李艳萍教授。李老师知识渊博,眼界开阔,学风严谨,待人谦和。李老师对我的辛勤培育和精心指导,使我的人生目标更加明确,使我的理想更快实现。李老师对科学的不懈追求,对生活的艰苦朴素鞭策着我在学习和生活中不断前进。在此,谨向李老师致以最崇高的敬意。您永远是我的楷模。

感谢实验室的同门师兄弟:赵彦龙,李万昌,闫伟才,宗恒山,刘荣华,张婵。三年的相处,他们与我结下了深深的友谊。困难时他们的援助,使我度过了一个个难关。现今,他们是我最好的朋友,愿这份友谊永存!

感谢我的父母。他们踏实勤劳、善良朴素的品质深深影响着我。他们对知识的渴望深深地感动着我,他们对我的期望永远激励着我。他们节衣缩食,给我提供学习机会和生活费用。他们是我前进的最大动力。愿我的父母健康长寿,永远幸福!

感谢我的姐姐赵晓黎。感谢姐姐对我的资助,对我的鼓励。当我遇到困难的时候,她总是设身处地为我考虑。愿姐姐生活幸福!

最后,向本文的评阅老师和答辩委员会的老师致谢!

作者:赵三伟

2011年3月

## 攻读学位期间发表的学术论文目录

赵三伟, 李艳萍. 可变遗忘因子的 PASTd 算法. 科技论文在线[OL], (<http://www.paper.edu.cn>). 2010.09.08

## 本文所用的主要符号说明

$r(t)$	接收到的多用户信号
$y(i)$	经过第 $i$ 个匹配滤波器的输出信号
$T$	字符间隔(即码元间隔)
$b_k(j)$	第 $k$ 个用户发送的字符序列 (信息序列)
$A_k$	第 $k$ 个用户的信号幅值
$s_k$	第 $k$ 个用户的特征波形
$n(t)$	单位功率谱密度的高斯白噪声
$\rho_{jk}$	第 $j$ 个用户与第 $k$ 个用户特征波形的互相关
$P_{k, su}(\sigma)$	单用户的误码率
$P_k(\sigma)$	多用户系统中期望用户的误码率
$\eta_k$	渐近多用户有效性
$\tilde{\eta}_k$	抗远近能力
$E_{j,i}$	第 $j$ 个用户第 $i$ 个比特的接收能量
$K$	干扰用户数
SNR	信噪比
BER	误码率
$E_i / E_1$	干扰用户与期望用户的能量之比
Span	张成子空间
$S^\perp$	子空间 $S$ 的正交补
$P_{S S^\perp} x$	从子空间 $S$ 到 $S^\perp$ 的正交投影
Range	矩阵的值域
Rank	矩阵的秩

$U_K$	信号子空间
$U_{n-K}$	噪声子空间
$\Lambda_K$	主特征值
$\Lambda_{n-K}$	次特征值
$R$	接收信号的自相关矩阵
$I_K$	$K \times K$ 的单位矩阵
$\beta$	遗忘因子
$\text{Tri}(A)$	计算矩阵 $A$ 的上三角矩阵或者下三角矩阵
$\delta$	钟形图形的扩展常数或者宽度
$\mu$	可变遗忘因子的临界值
$T_{coh}$	相关时间

## 声 明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在指导教师的指导下，独立进行研究所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律责任由本人承担。

论文作者签名： 赵三伟 日期： 2011.6.1

### 关于学位论文使用权的说明

本人完全了解太原理工大学有关保管、使用学位论文的规定，其中包括：①学校有权保管、并向有关部门送交学位论文的原件与复印件；②学校可以采用影印、缩印或其它复制手段复制并保存学位论文；③学校可允许学位论文被查阅或借阅；④学校可以学术交流为目的，复制赠送和交换学位论文；⑤学校可以公布学位论文的全部或部分内  
容（保密学位论文在解密后遵守此规定）。

签 名： 赵三伟 日期： 2011.6.1

导师签名： 李艳萍 日期： 2011.6.1

## 基于改进子空间跟踪算法的盲多用户检测

### 摘要

第三代移动通信(3G)的核心技术之一码分多址(CDMA: Code Division Multiple Access)是对不同的用户分配不同的扩频码,从而实现多用户共享信道。与 FDMA 系统和 TDMA 系统相比,CDMA 系统具有很多优点,如频谱利用率高,低能耗,软切换,软容量,保密性好等。然而,CDMA 系统仍然存在一些不足,主要表现为受码间干扰和多址干扰影响大。其中码间干扰可以通过均衡技术来进行补偿。多址干扰是由于多个用户共享一个信道时,不同用户的扩频码之间不完全正交而产生的,抑制多址干扰的方法就是多用户检测。

盲多用户检测是只需使用观测数据,不需要训练序列的自适应多用户检测。因其需要的先验数据较少,可以充分利用频带资源而得到广泛应用。其中基于子空间的盲多用户检测将接收信号的自相关矩阵分解为信号子空间和噪声子空间,在检测时只需用到信号子空间的数据,无需噪声子空间的数据,从而简化了盲多用户检测。

本文从信号的时间相关特性和遗忘因子两个方面对基于子空间的盲多用户检测算法进行改进,主要工作如下:

(1) 分析了多用户检测的基本原理、性能测度、算法分类以及基于子空间的盲多用户检测算法的国内外研究现状和研究热点,对几种典型的多用户检测算法进行了仿真比较。

(2) 通过研究基于优化理论的子空间迭代算法发现,该算法的代价函

数只考虑了当前时刻之前的相关信号，没有考虑当前时刻之后的相关信息。而 BELLO 在研究时变信道的时变相关性时指出，其相关性可以用相干时间来表示，信道在当前时刻附近的一段相干时间里具有强的相关性。因此本文提出了基于双边代价函数的子空间迭代算法，在代价函数中加入当前时刻之后的相关信息。通过 Matlab 仿真表明，改进算法的误码率要低于原算法的误码率。

(3) 通过研究 PASTd 算法的收敛性能发现，其向量跟踪误差和收敛速度与遗忘因子的大小有关。对较小的遗忘因子，PASTd 算法的向量跟踪误差较大，收敛速度较快；对较大的遗忘因子，PASTd 算法的向量跟踪误差较小，收敛速度较慢。因此本文将遗忘因子修改为关于向量跟踪误差的可变遗忘因子，这样既能保证向量跟踪误差足够小，又能加快其收敛速度。当信道发生突变时，可根据向量跟踪误差及时地调节遗忘因子的大小。通过 Matlab 仿真表明，可变遗忘因子的 PASTd 算法的跟踪误差和收敛速度介于遗忘因子为 0.995 和 0.999 的 PASTd 算法之间。

**关键词:**子空间迭代算法, 盲多用户检测, PASTd 算法, 可变遗忘因子, 双边代价函数

# BLIND MUTIUSER DETECTION BASED ON IMPROVED SUBSPACE TRACKING ALGORITHM

## ABSTRACT

The CDMA is the key technologies of third generation mobile communications. As to achieve multi-user shared channel approach, it assign different spreading code to different users. Compared to FDMA and TDMA systems, the CDMA system has many advantages such as high bandwidth efficiency, soft capacity, soft switching, low power, security and so on. However, CDMA systems are still some shortcomings, the main interferences are the ISI and multiple access interference. The ISI is compensated through balanced technology. The MAI was produced by multiple users sharing a channel, while spreading code of different users is not completely orthogonal. The primary method of inhibiting multiple access interference is called multi-user detection.

Blind multi-user detection only needs observations, without getting the training sequence. Because of needing less data, we can make full use of bandwidth resources. Blind multi-user detection based on subspace divided the received signal autocorrelation matrix into signal subspace and noise subspace. The data of signal subspace are only used in the detection, the data of noise subspace can be ignored. These will simplify the blind multi-user detection.

The paper improved the subspace-based blind multi-user detection algorithm from the correlation of the signal and the forgetting factor, the main

work is as follows:

Firstly, this paper analyzes the basic principles, performance measurement and classification of multi-user detection, research status and current on blind multiuser detection based on subspace algorithms in the world, and simulates the capability of several typical multi-user detection algorithm.

Secondly, via studying the subspace-based iterative algorithm based on optimization theory , we found the cost function only considers information before the current time without taking into information after the current time. But BELLO tells us that time-varying channel correlation can be showed by coherent time, and the channel is only related in the coherence time. So we design a subspace tracking algorithm based on double-side cost function by adding information after the current time in the cost function .The simulation indicates the improved algorithm's BER is smaller than the Original.

Thirdly, via studying PASTd algorithm, we found that its the tracking error and the convergence rate are due to the forgetting factors. For smaller forgetting factor, the tracking error is bigger, and the convergence rate is faster; For larger forgetting factor, the tracking error is smaller, and its convergence rate is slower. When forgetting factor will be revised as the function of the tracking error, it can decrease the tracking error, but also to speed up its convergence. When the channel is mutated, forgetting factor can be adjusted by the tracking error in time. The Matlab simulation shows that the convergence error and rate of the variable-forgetting-factor PASTd are between the two PASTd algorithms

for the forgetting factor  $\beta=0.995$  and  $\beta=0.999$ .

KEY WORDS: subspace, blind multi-user detection, PASTd algorithm, variable forgetting factor, double-sides cost function