

摘 要

基于多相连续介质力学的理论,把土体抽象为叠合连续体,建立了有限变形下固一流耦合渗透固结问题的数学模型,模型中反映了固一流相的相互耦合作用。

在有限变形理论的前提下,导出了固一流两相介质耦合问题的非线性有限元方程。基于 IFEPG 有限元自动生成系统,编制了有限变形和小变形的计算程序。实例分析了不同土性参数情况下有限变形和小变形理论在压力场、位移场和应力场等方面的差异。数值计算的结果表明:在荷载水平不高,土体厚度不大,土体变形模量及泊松比、渗透系数比较大的情况下,有限变形与小变形差异甚小,采用小变形理论就可以达到理想的结果;反之,有限变形理论计算的地基垂直沉降、水平位移、孔隙水压力要精确于小变形理论的计算结果。

采用两种不同的土体模型,分析了大、小变形两种情况下土体应力的分布。计算结果充分体现了尺寸效应和应力集中现象;同时也说明考虑固一流耦合作用时,由于土中水的渗流,在应力分布区内出现了拉应力区,这样容易导致土体发生破坏、地基不稳定。

关键词 固流耦合;多相介质;有限变形;数学模型;非线性有限元;数值分析

ABSTRACT

Based on the theory of multi-phase continuous medium mechanics, soil is modeled as piled continuous body; further Solid-Fluid coupling mathematics model for permeating and consolidation problem under finite deformation is built up, which reflects Solid-Fluid mutual coupling.

The nonlinear finite element equations for Solid-Fluid biphasic medium coupling problem in finite deformation case are built according to the theory of finite deformation. Adopted the automated generating system of the finite element of IFPG, the corresponding computer programs are developed. The differences between finite deformation and small deformation in such aspects as pressure field, displacement field and stress field are analyzed with different soil parameters. The results of numerical stimulation show that under the conditions of not very large load, not very thick soil, higher deformation module and permeability of the soil, the difference between finite deformation and small deformation can be negligible. So adopting the small deformation theory can reach the ideal result. On the contrary, the results of vertical sedimentation, horizontal displacements and pore pressures obtained from the theory of finite deformation are more exact than those got from small deformation.

Using two different kinds of soil models, the stress distribution of the soil body caused by large and small deformation is analyzed. The results fully reflect the size effect and the phenomenon of stress concentration. It further indicates that considering Solid-Fluid coupling, the tensile stress occurs in the stress distributing districts, which is apt to leading to the soil's destruction and the foundation's instability because of the permeating of water in the soil.

Keywords Solid-Fluid coupling; multi-phase media; finite deformation; mathematics model; nonlinear FEM; numerical analysis

河北大学

学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得河北大学或其他教育机构的学位或证书所使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了致谢。

作者签名： 李凤莲 日期： 2005 年 6 月 20 日

学位论文使用授权声明

本人完全了解河北大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。学校可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文。

本学位论文属于

1、保密 ☐，在 _____ 年 _____ 月 _____ 日解密后适用本授权声明。

2、不保密 ☐。

（请在以上相应方格内打“√”）

作者签名： 李凤莲 日期： 2005 年 6 月 20 日

导师签名： 丁继红 日期： 2005 年 6 月 20 日

第1章 序言

1.1 固流耦合理论研究背景

自然界中存在着大量由流体和固体组成的系统,如由液相、气相和岩土组成的多孔介质系统等,多孔介质中流体要流动,对这个问题的研究经历了由非耦合研究到耦合研究的历程,非耦合研究即单纯的渗流力学研究,它一般假定流体流动的多孔介质是完全刚性的,在孔隙流体压力变化过程中,固体骨架不产生任何弹性或者塑性变形,即没有考虑流体渗流与岩土变形之间的双向相互作用,这种简化可以得到问题的近似解。但实际的多孔介质,大多为可变形体,在实际的渗流过程中,由于孔隙流体压力的变化,由此导致储层特性如渗透率、孔隙度等的变化,产生非线性固流耦合作用;另一方面,这些变化又反过来影响孔隙流体的流动和压力的分布。因此,在许多情况下,必须考虑孔隙流体在多孔介质中的流动规律及其对多孔介质本身的变形或者强度造成的影响,这就需要进行固流耦合研究。近年来,固流耦合问题越来越受到人们的重视,是当前岩土力学和流体力学研究的热门课题和重大课题^[1-3],也是多学科交叉性质的前沿研究课题。

固流耦合问题是流、固两场同时存在时的基本问题,它们之间的相互作用将在不同条件下产生形形色色的固流耦合作用,这使固流耦合问题广泛存在于许多工程问题中,如地下水抽放引起的地面沉降^[4]、垃圾填埋场污染气体扩散、软土地基固结^[5-6]、水库诱发地震^[7]、岩坡和堤坝稳定性^[8-11]、煤层瓦斯渗流^[12-17]、矿井突水^[1]等;固流耦合问题也广泛存在于石油工业中,如注采过程中的油藏渗流^[18-21]、井壁稳定、油井和套管的破坏、产层出砂、水力压裂、地层失稳坍塌等。在上述问题中,孔隙流体压力的变化会导致岩土有效应力的改变从而影响岩土骨架的变形,与此同时,岩土骨架的变形又会反过来导致储渗特性和孔隙流体压力的改变从而影响渗流过程。基于此,必须将经典的渗流力学和岩土力学结合起来,全面考虑渗流和岩土变形之间的耦合过程,建立固流耦合模型。

由此,固流耦合问题存在以下的特点^[22]:(1)普遍存在性:只要固体和流体同时存在于一个系统中,在这个系统中就一定有固流耦合现象发生;(2)动态性:固场和流场两场中的任一场都随时间和空间不断的发生变化,两场在某种条件下也可以处于

相对平衡的状态,但只要其中一场被扰动而发生变化,其余另一场即随之变化,并且往往是系统中一场或两场发生剧烈的和反复性扰动变化时,固流耦合效应非常强烈;

(3) 基础性:一方面,固流耦合理论研究耦合状态下固相变形和流体流动的最基本的规律;另一方面,固流耦合理论研究为大量相关问题提供流场和岩土应力场的原始性的基础性的参数;(4) 多学科多方法交叉性:固流耦合理论是一个涉猎范围非常广泛的学科,它涉及渗流力学、固体力学、动力学、计算力学、岩土力学、构造地质学、地球物理学、地下工程等学科,并且是将这些学科的知识交叉、综合运用;(5) 多工程应用性:固流耦合问题由于其研究范围甚广,在多工程技术领域应用,如土木、航空航天、船舶、动力、海洋、机械、核动力、地震地质、生物工程,石油、环境保护等均有联系,而且随着科学技术的发展,将更加广泛的应用。

固流耦合问题的研究无论在理论上还是在实际工程应用中都有重要的意义和价值,但是对地下固流耦合问题如土体(特别是非饱和土)^[23-24]固结过程中的固流耦合问题,由于人们对土的认识不够,这方面的研究还处于探索阶段,所以对土(特别是非饱和土)固结过程中的固流耦合问题的研究可以解决许多实际工程问题,推动整个固流耦合问题研究向前发展。

1.2 固流耦合理论研究现状

最早研究流体-固体变形耦合现象的是 Terzaghi^[25]关于地面沉降的研究。他首先将可变形、饱和的多孔介质中流体的流动作为流动-变形的耦合问题来看待,提出了著名的有效应力公式,该公式迄今仍是研究岩土和流体相互作用的基础公式之一。Terzaghi 最初提出的一维固结理论附有诸如土颗粒不可压缩、土的孔隙中含有不可压缩流体,按达西定律沿单相流动从而引起岩土单相压缩变形等条件,所以能解决的实际工程问题非常有限。Znidaric & Schiffman (1983) 在对 Terzaghi 一维固结理论的概念作进一步的研究后指出, Terzaghi 于 1923 年最早提出一维固结方程时,采用了基于有限变形的物质坐标描述土体变形,但是在引入边界条件时,为了求解的方便,又加上了小变形的假定。Terzaghi 等人随后将一维固结理论推广到三维情形,但由于假设了固结过程中全应力为常量,故与早期 Terzaghi 一维固结理论没有本质区别。20 世纪中期, Biot^[26-27]以饱和土体的全应力和孔隙压力为状态变量,将 Terzaghi 的 20 世纪中期, Biot^[26-27]以饱和土体的全应力和孔隙压力为状态变量,将 Terzaghi 的

工作推广到真正意义上的三维情形,进一步研究了三向变形材料与孔隙压力的相互作用,并在一些假设,如材料为各向同性、线弹性小变形,孔隙流体是不可压缩的且充满固体骨架的孔隙空间,而流体通过孔隙骨架的流动满足达西定律的基础上,建立了比较完善的三维固结理论,奠定了地下固流耦合理论研究的基础。而后 Biot 又将三维固结理论推广到各向异性多孔介质中^[28]和动力分析中^[29],并应用这个理论研究了具有表面载荷的土的固结问题和地震产生的体波在地质材料中的传播。

20 世纪 50 年代, Lubinski^[30]和 Geertsman^[31]在关于多孔介质^[32]的弹性理论中都曾讨论过 Biot 方程。Verrujit 进一步发展了多相饱和渗流与孔隙介质耦合的理论模型。Mikasa, Gibson^[33]等把小变形的理论推广至更普遍的大变形固结理论。

20 世纪 70 年代以来,在石油开发领域相继提出了一系列新研究课题。如注蒸汽引致的地应力变化、水力压裂、软地层井壁稳定、产层出砂以及油气开采引起的地面沉降问题等。有些学者针对这些问题开展了油藏工程地质问题的研究,在开发机理、固流耦合理论及工程应用方法的研究进行了创造性的研究工作,并在某些方面取得了一定的研究成果。此外, Savage^[34]等将 Biot 的三维固结理论应用到了横观各向同性的孔隙弹性介质中。Zienkiewicz 等^[35]考虑了几何非线性和材料的非线性,并在 Biot 的三维固结理论上提出了广义 Biot 公式。国内李锡夔^[36]等讨论了考虑饱和土壤固结效应的结构-土壤相互作用问题;张洪武和钟万勰^[37]等利用了 Zienkiewicz 等建立的广义 Biot 公式对饱和土壤固结的非线性问题的理论和算法进行了研究。

近年来,地下固流耦合的研究又有了长足的发展,其特点是:由单相流到多相流,由单一介质向更复杂的双重连续介质及拟连续或非连续的裂隙网格模型发展;放弃了固相介质小变形的假设,改为考虑更为实际的非线性本构关系,新的数学理论方法得到更为广泛的应用从而改善了对理论模型的评定和求解能力。国内董平川^[38]等人将 Biot 理论推广到多相流体和岩体弹塑性情形,冉启全等人则用同相质点速度为耦合变量,分别建立了弹塑性饱和储层中多相渗流耦合模型,并得到了数值解,且在石油工程一些领域中有了一定程度的应用。

在土壤固结的研究方面,陈正汉^[23]把非饱和土视为不溶混的三相混合物,用混合物理理论的观点研究了非饱和土的固结问题。他所用的控制方程组以增量形式给出,包

含的未知数和材料参数少,为工程应用提供了方便,并且分别给出了一维问题和二维问题的解析解和有限元解。李宁,陈飞熊^[39]考虑了土体中土骨架的动态响应与土中孔隙水的渗流固结之间的相互耦合作用,在时间域内利用 NEWMARK 法系统推导了三维固一液两相介质动力响应有限元解析格式与数值分析方法,并且利用日本学者的实验结果对其力学模型与分析系统进行了检验与验证。杨林德^[40]把饱和土视为均质、连续的各向异性弹塑性多孔介质,根据虚位移原理推导出饱和土体内各向异性渗流直接耦合的有限元计算公式,用 MATLAB 语言编写出平面条件下的计算程序,对各向异性弹性多孔介质中 Mandel 效应进行了数值模拟。

但传统的固结理论是基于小变形假定建立的,虽然在实际中有较好的适用性,但对于软粘土和吹填土,当荷载水平较高,土体变形模量、泊松比及渗透系数发生变化时,采用小变形假定已经不能满足实际要求,会带来较大的误差,因此,有必要引入有限变形固结理论的研究。

近二十年来,基于连续介质力学基本理论的大变形固结理论有了较好的研究。Cater^[41]等基于欧拉描述建立了一般三维形式的大变形固结理论,并用有限元法进行了数值求解,讨论了大变形的影响,但是该理论采用 Green 应变率张量和 Jaumann 应变率张量建立本构方程,表达形式复杂,不便于建立计算模式。Chopra^[42]等基于物质描述,应用虚功原理推导了一组修正拉格朗日(Updated Lagrangian)描述的大变形固结有限元方程,但是其中的应力度量采用非对称的第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量,由于这一张量的物质导数受刚体旋转影响,不是客观的应力度量,无法纳入到本构方程中,在本构方程中又要选择其它客观应力度量,这样多次转换后使其物理概念变得模糊,不便于推广应用,也不便于直接与小变形的结果进行比较。周正明^[43]用加权残数法离散了一组大变形固结方程,在已有的小变形固结分析程序中,增加了一个考虑大变形影响的子块,并初步分析了大变形的影响,但是其中引入线弹性的本构关系时没有考虑刚体旋转不变性的影响。谢新宇^[44]基于连续介质力学基本原理,分析了大小变形固结理论基本方程的差别,建立了物质描述和空间描述下以位移为变量的一维大变形固结微分方程,说明了不同方法得到的固结微分方程的差异,并讨论了不同计算模式下的地表沉降,超静孔隙水压力和固结度的发展规律。何开胜等^[45]采用

Jaumann 应变率和 Green 应变率建立本构方程, 并建立了增量有限元方程, 比较了大变形法以及小变形方法的计算沉降和计算孔压的差异, 并认为大小变形分析结果的比较应当采用总应力法, 大变形的最终沉降小于小变形的计算沉降, 时间步长对计算沉降值有严重影响, 但是没有对侧向位移的计算结果给予比较, 而侧向位移的计算值在大变形中往往能反映土体单元产生的大位移旋转性状。

1.3 有限元法在固流耦合理论中的应用

Terzaghi 固结方程的求解, 只有对简单的几何形状和边界条件可以求得解析解。Biot 固结理论虽然更普遍更合理, 但是由于数学上难以求解, 只能对少数简单的边值问题求出解析解、半解析解, 因此, 在很长的时间里, 并没有得到很好的应用。

自六十年代以来, 计算机的应用和普及产生发展了一些基于计算机应用的数值方法, 如有限单元法, 边界元法, 离散元法, 无单元法等。而有限元法对于复杂边界条件, 非线性, 非均质材料等问题具有突出的优势。Sandhu 首先用有限元法求解 Biot 固结方程, Christian 用虚功原理推出了 Biot 固结理论的有限元方程, 拓展了研究思路及有限元应用的深度。国内沈珠江^[46]首先进行了 Biot 固结方程的有限元求解, 他采用了线性插值模式及变分原理。

由于大变形固流耦合问题具有高度的非线性, 使得求解数值解的工作繁琐甚至是不可能的。有限元法的应用使这类问题的求解成为可能并具有较高的精度。Cater^[41]采用应变率张量表示变形量, 对土壤固结问题进行研究, 并分析了有限元计算结果。Provest 使用空间描述有限元分析, 在研究饱和和多孔介质的非线性瞬态现象时, 给出了一维大变形和小变形固结最终沉降量的差别。周正明^[43]采用 T.L 有限元方法, 用加权残数法离散得到了一组大变形固结方程, 并编制程序对其分析。His. P. & Small J. C.^[47]对多孔介质弹性介质进行了数值模拟。Chop & Dagush 采用 U.L 法分析了桩打入土中时超静孔隙水压力消散的问题。丁继辉^[48-50]等人运用有限元法对有限变形下瓦斯媒体进行了分析, 但没有采用完全耦合的理论, 只是用半耦合数值解法对其进行了分析。王志亮^[51-52]用无单元伽辽金法进行了土体固结分析。

对大变形固结问题, 也有人采用近似或半解析解的方法进行研究, 郭志强^[53]将大变形的固结过程看成由一系列的小变形线性固结分过程组成, 对每一个分过程采用

Terzaghi 理论求解,并取得比较满意的结果。李冰河^[54]等以孔压为控制变量采用半解析法进行了一维大变形固结分析得到的结论与 Gibson^[33]用有限差分方法得到的结论相一致。

由于固流耦合问题的复杂性,对数学模型求解析解是非常困难的,甚至是不可能的,因此,只能借助于计算机求其数值解。但是在前人的研究方法中一般都采用了半耦合理论求解,用全耦合的甚少,这样得出的结论有一定差异。

1.4 本文研究内容

基于固流耦合存在的问题,本文做以下研究内容:

(1)在连续介质力学和混合物理论的基础上,建立有限变形下固-流耦合问题的力学模型及固-流耦合渗透固结问题的数学模型。

(2)在有限变形理论的前提下,推导固-流两相介质耦合问题的非线性有限元公式。

(3)编制固-流两相介质耦合问题的有限变形非线性有限元计算程序及小变形有限元程序,用全耦合理论进行求解。

(4)对已有的固结问题进行数值模拟,并对数值结果和小变形计算结果进行分析比较。

第2章 多相介质力学基础

2.1 多相介质连续化模型

多相连续介质力学理论是建立在连续介质力学和混合物理论的基础上, 因此, 本章首先建立多相介质的连续化模型。

多相介质混合物是由几种不同性质的单一物质混合形成的复杂介质。这些物质的混合可以是局部和整体都均匀的混合, 也可以是局部不均匀但整体均匀的混合。组成混合物的单一物质是混合物的组分, 混合物组分之间不仅可能存在相对运动, 而且可能存在相互作用, 甚至可能存在物质转化。混合物理论就是研究混合物各组分之间运动规律、相互作用和相互转化规律以及混合物整体运动变化与外界对混合物作用之间关系的理论体系^[55]。

多相混合物介质力学^[56]中, 每相介质都是一个物质连续统, 每相介质都由它在三维物理空间中所占的区域显现出来, 如同单一介质一样。在岩土工程中, 混合物多为以固相为宿主相的多相介质混合物, 即固相为多孔性固体, 而流相(液相和气相)则以一定的方式赋存于固相孔隙中。对于渗流中的固流耦合问题, 就表现出一个明显的特点: 固体区域与流体区域互相包含、互相缠绕, 难以明显的划分开, 因此, 必须将流体相和固体相视为相互重叠在一起的连续介质, 在不同相的连续介质之间可以发生相互作用。这个特点使得固流耦合问题的控制方程需要针对具体的物理现象来建立, 而固流耦合作用也是通过控制方程反映出来的。即在描述流体运动的控制方程中有体现固体变形影响的项, 而在描述固体运动或平衡的控制方程中有体现流体流动影响的项。有鉴于渗流的固流耦合问题这个特点, 在流体和固体的边界面上确定边界条件比较困难, 一般采用宏观连续介质方法来研究固流耦合渗流问题。

连续介质力学是建立在物体的连续介质模型之上的, 连续介质模型是对变形体进行连续化处理得到的。其连续化方法为: 将实际物质的一个微团作为连续介质的一个质点, 微团的选取保证:

- (1) 微团的尺寸与所研究的宏观问题尺度相比是微小的;
- (2) 实际物质的不连续尺寸与微团尺寸相比是微小的, 这样, 连续介质的模型中各量即成为连续化的宏观量。

2.2 基本定义

考虑固、流、气三相介质，质量分别为： M_s 、 M_f 、 M_g ，体积分别为： V_s 、 V_f 、 V_g 。其中， M 代表质量； V 代表体积； s 代表固相； f 代表液相； g 代表气相。

孔隙总体积：

$$V_v = V_f + V_g \quad (2.2.1)$$

介质总体积 V_t 定义为：

$$V_t = V_f + V_g + V_s \quad (2.2.2)$$

孔隙比 e 定义为：

$$e = \frac{V_v}{V_s} \quad (2.2.3)$$

孔隙率 n 定义为：

$$n = \frac{V_v}{V_t} \quad (2.2.4)$$

饱和度 S 定义为：

$$S = \frac{V_f}{V_v} \quad (2.2.5)$$

或者也可定义体积比：

$$\Phi_m = \frac{V_m}{V_t} \quad (m = s, f, g) \quad (2.2.6)$$

各相介质的质量密度定义为介质在实际状态时的真实密度 r_m ，即

$$r_m = \frac{M_m}{V_m} \quad (m = s, f, g) \quad (2.2.7)$$

各相介质的名义密度定义为每一相介质的质量与介质总体积的比值，即

$$\rho_m = \frac{M_m}{V_t} \quad (m = s, f, g) \quad (2.2.8)$$

在多相介质力学中, 将以 ρ_m 表示 m 相的密度出现在各种方程中。

r_m 与 ρ_m 之间存在下列关系式

$$\rho_s = (1-n)r_s \quad (2.2.9)$$

$$\rho_f = S n r_f \quad (2.2.10)$$

$$\rho_g = (1-S) n r_g \quad (2.2.11)$$

介质密度为:

$$\rho = \sum_m \rho_m \quad (2.2.12)$$

体积比可以写成:

$$\Phi_m = \frac{\rho_m}{r_m} \quad (2.2.13)$$

由公式 (2.2.8) 和 (2.2.13) 有:

$$\Phi_f + \Phi_s + \Phi_g = 1 \quad (2.2.14)$$

体积比是一个重要的概念, 其变化反映了各相的相对体积变形, 表征着相间的相互作用。

2.3 多相介质的运动描述

多相连续介质的运动由各相的运动所组成, 如同单相介质理论一样, 每一相都可以选一种固定的参考位形和一种运动。

几何非线性的描述可以概括为两种方法: 物质描述 (Lagrange 描述) 和空间描述 (Euler 描述)。Lagrange 描述法又分为完全的 Lagrange 法 (Total Lagrangian Formulation 或 T.L) 和修正的 Lagrange 法 (Updated Lagrangian Formulation 或 U.L)。T.L 法中始终采用初始坐标为参考坐标。U.L 法中在每一增量步结束时把参考系更新一次, 然后再从变化后的新坐标出发进行下一增量步的计算。在 Euler 描述中采用瞬时构形描述, 此时空间坐标点在不同时刻由不同物质点占据。

由于 Lagrange 描述法的坐标附着在物质点上, 易于引入本构关系和处理自由表面外载问题, 因此, 在岩土工程中, 常采用 Lagrange 描述法。

Lagrange 描述法：物质是质点的集合体，每一相的每个质点都可以 X_m 来表示，最简单的是选择该相质点的初始位置为 X_m ，称为 Lagrange 坐标，也叫物质坐标，如图 2.1 所示。 m 相物质在初始位形中的任一点的位置为：

$$R_m = R_m(X_m^1, X_m^2, X_m^3) \quad (2.3.1)$$

物体运动和变形后的任一时刻对应点的位置矢为

$$r_m = r_m(R_m, t) \quad (2.3.2)$$

或者

$$x_m = \chi_m(X_m, t) \quad (m = s, f, g) \quad (2.3.3)$$

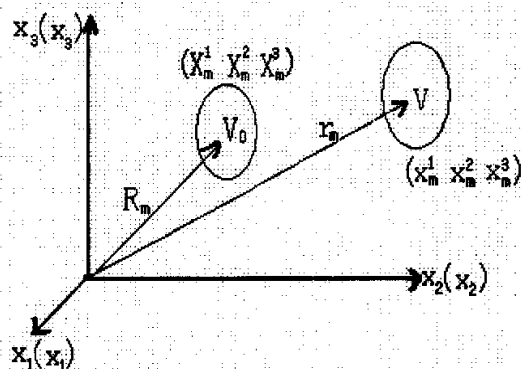


图 2.1 相在空间的位置

(2.3.3) 式建立了物体的初始位形来描述物质运动和变形的一种形式，称为物质运动的 Lagrange 描述。它表示 m 相物质质点 X_m ，在 t 时刻所占据的空间点为 x_m ， x_m 为单值，且是连续可微的，同时在区域 V_0 内雅可比行列式不等于 0。

Euler 描述法：物体中任一物质点在物体运动和变形的不同时刻将占据空间的不同位置，若用该物质现实位形中的位置矢 r_m 或其分量 x_m^i ，则 x_m^i 叫 Euler 坐标或空间坐标，用 Euler 坐标 x_m^i 描述现时时刻 t 的各相物质的运动和变形状态的方法，称为 Euler 描述。

Euler 描述的运动方程为：

$$X_m = g_m(x_m, t) \quad (m = s, f, g) \quad (2.3.4)$$

上式表示 t 时刻空间点 x_m 被物质质点 X_m 所占据, 物质点 X_m 同样为单值、连续可微的, 同时在区域 V 雅可比行列式不等于0。Lagrange法以物质点(物质坐标)和时间 t 为自变量来描述运动, 其注意力集中在一个特定的物质点的运动, 而Euler法以空间点(空间坐标)和时间 t 为自变量, 其注意力集中在某一空间点上的运动状态。

2.4 质点的位移、速度与物质导数

质点的位移表征其位置的相对移动, 用 u_m 表示, 当初始位形的Lagrange坐标与Euler坐标重合时, 则位移的物质描述为:

$$u_m = x_m(X_m, t) - X_m \quad (x_m = x_m(X_m, t)) \quad (2.4.1)$$

质点的速度为该质点的位移对时间的变化率, 用 V_m 表示:

$$V_m = \left. \frac{\partial u_m}{\partial t} \right|_{X_m} \quad (2.4.2)$$

式中 $\left. \frac{\partial u_m}{\partial t} \right|_{X_m}$ 表示固定物质点不变时对时间求导数, 即物质导数。场量 F 的物质导数用 $\frac{DF}{Dt}$ 或 $\dot{F}$ 表示。

在Lagrange描述的位移(2.4.1)中, 固定物质点 X_m 不变, u_m 仅为时间 t 的函数, 则对物质描述有

$$V_m = \left. \frac{\partial u_m}{\partial t} \right|_{X_m} = \frac{\partial x_m(X_m, t)}{\partial t} \quad (2.4.3)$$

在Euler描述中, 通常用速度 $V_m(x_m, t)$ 为基本未知量, 任一点的加速度定义为:

$$\frac{DV_m^i}{Dt} = \frac{\partial V_m^i}{\partial t} + V_m^j \frac{\partial V_m^i}{\partial x_m^j} \quad (2.4.4)$$

令 $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_m^j \frac{\partial}{\partial x_m^j}$ 称为物质导数。对于任何与运动着的质点相关联的物理量 F , 其

物质导数为：

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + V_m^j \frac{\partial F}{\partial x_m^j} \quad (2.4.5)$$

2.5 有限变形与应变

物体受到一定作用，其形状发生改变，即产生变形，变形引起质点间的距离变化、线元的大小和方向变化，微元体的畸变等。

多相介质混合物中的流相（包括液相和气相）由于它的易动性，因而与固相在力学意义上的不同点在于其对外力的抵抗能力不同。固体可以承受拉、压、剪，而流体则不能承受拉，在静止状态时也不存在剪切，承剪时流体不能保持形状，只能承受压力。此外流体也没有固定的形状，其形状取决于对其施加约束的边界形状。因此对于固相为宿主相的多相介质混合物来说，其变形由固相骨架的变形来表征。

1. 变形梯度张量

在固相运动方程中代入固定时间 T ，就可以得到 T 时刻的构形，即

$$\mathbf{x} = \chi_s(\mathbf{X}_s, T) \quad (2.5.1)$$

此构形对物质坐标的导数，则反映此构形相对于初始构形的变形（初始时刻 Lagrange 坐标与 Euler 坐标重合），称之为变形梯度。

变形梯度张量为：

$$F_{s,j}^i = x_{s,j}^i = \frac{\partial x_s^i}{\partial X^j} \quad (2.5.2)$$

其逆分量为：

$$(F_s^{-1})_i^j = X_{s,i}^j = \frac{\partial X^j}{\partial x_s^i} \quad (2.5.3)$$

式 (2.5.2) 和 (2.5.3) 分别称为物质变形张量和空间变形张量，二者均为非对称的二阶张量。

变形梯度张量与线元、面元、体积元的变换关系为：

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}, \quad d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.5.4)$$

F 刻划了整个变形, 它既包含了变形物体中任意两相邻质点的线元伸缩, 也包含了该元的转动。

$$da = J(F^{-1})^T \cdot dA, \quad dA = JF^T \cdot da \quad (2.5.5)$$

$$dv = JdV, \quad dV = jdv \quad (2.5.6)$$

由式 (2.5.6) 可以看出, 变形梯度矩阵的 Jacobian 行列式 $J = \frac{dv}{dV}$ 表示变形期间体积比。如果用 ρ 和 ρ' 分别表示初始状态和现实状态中单元介质的密度, 由质量守恒有: $\rho dV = \rho' dv$, 因而, $J = \frac{dv}{dV} = \frac{\rho}{\rho'}$ 。当介质不可压缩时, $J=1$ 。

对变形梯度张量分解为:

$$F = R \cdot U = V \cdot R \quad (2.5.7)$$

其中 $R \cdot R^T = R^T \cdot R = I$, $U = (F^T \cdot F)^{1/2}$, $V = (F \cdot F^T)^{1/2}$

R 表示刚体转动, U 、 V 表示纯变形, 分别称为左、右 Cauchy-Creen 伸长张量。

由上述分解知, 变形梯度张量含有刚体转动因素, 因而不能作为局部变形的度量。

2. 变形张量

利用变形梯度张量可以表示变形张量, 常用的变形张量有:

Green (格林) 变形张量:

$$C = F^T F \quad (2.5.8)$$

Cauchy 变形张量:

$$c = (F^{-1})^T (F^{-1}) \quad (2.5.9)$$

Finger 变形张量:

$$B = F \cdot F^{-1} = c^{-1} \quad (2.5.10)$$

Piola 变形张量:

$$b = F^{-1} \cdot F^{-T} = C^{-1} \quad (2.5.11)$$

上述变形张量均为二阶对称的正定张量。利用变形张量, 可以定义应变张量。目

前度量有限变形的应变张量很多, 这里仅给出基于初始状态的格林 (Green) 应变张量和基于现实状态的阿尔曼西 (Almansi) 应变张量。

3. 应变张量

Green (格林) 应变张量定义为:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C}_s - \mathbf{I}) \quad (2.5.12)$$

分量形式为:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_s^i}{\partial X_s^i} \frac{\partial x_s^j}{\partial X_s^j} - \delta_{ij} \right) \quad (2.5.12a)$$

用位移分量表示为:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_s^i}{\partial X_s^i} + \frac{\partial u_s^j}{\partial X_s^j} + \frac{\partial u_s^k}{\partial X_s^i} \frac{\partial u_s^k}{\partial X_s^j} \right) \quad (2.5.12b)$$

它是定义在物质描述中, 以初始状态的坐标 X_s^i 和时间 t 为变量, 且

$$u_s^i = \chi_s^i(X_s^i, t) - X_s^i \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.5.13)$$

为坐标 X_s^i 的函数。

Almansi - Hamel (阿尔曼西), 应变张量定义为:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{c}_s) \quad (2.5.14)$$

分量形式为

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_s^i}{\partial x_s^i} \frac{\partial X_s^j}{\partial x_s^j} \right) \quad (2.5.14a)$$

用位移分量表示为

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_s^i}{\partial x_s^i} + \frac{\partial u_s^j}{\partial x_s^j} - \frac{\partial u_s^k}{\partial X_s^i} \frac{\partial u_s^k}{\partial X_s^j} \right) \quad (2.5.14b)$$

它是定义在空间描述中的, 以现时构形的坐标 x_s^i 和时间 t 为自变量, 此时

$$u_s^i = \chi_s^i - g_s^i(x_s^i, t) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.5.15)$$

为 x_s^i 的函数。

从式(2.5.12)和(2.5.14), 对换坐标 i, j , 有

$$E_{ij} = E_{ji} \quad e_{ij} = e_{ji} \quad (2.5.16)$$

由此可以知道, 格林 (Green) 应变张量和阿尔曼西 (Almansi) 应变张量都是对称的应变张量。

4. 变形率张量和旋率张量

考察瞬时位置坐标分别为 x_i 和 $x_i + dx_i$ 的两相邻点 $P(x_i)$ 和 $P'(x_i + dx_i)$, P 点的速度为 $V_i(x_i)$, P' 点的速度为 $V_i(x_i + dx_i)$, 则两点的速度差为:

$$dV_i = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} dx_j \quad (2.5.17)$$

式中, 令 $L_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$ 称为速度梯度, 利用 Cauchy-stokes 分解定理, 将它分解为对称和

反对称两部分之和:

$$L_{ij} = D_{ij} + W_{ij} \quad (2.5.18)$$

D_{ij} 为 Euler 变形率张量分量, W_{ij} 为旋率张量分量。

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (L_{ij} + L_{ji}) \quad (2.5.19)$$

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (L_{ij} - L_{ji}) \quad (2.5.20)$$

D_{ij} 为二阶对称张量, $D_{ij} = D_{ji}$, W_{ij} 二阶反对称张量, $W_{ij} = -W_{ji}$ 。

变形率张量 D_{ij} 是相对于现实构形定义的 Green 应变张量的速率, 即

$$\dot{E}_{ij}(t) = D_{ij}(t) \quad (2.5.21)$$

由上式可知, 当物体仅发生刚体运动时, 格林应变的物理变化率为零, 所以本构关系中使用 Green 应变率作为应变速率的合理度量。

对于阿尔曼西应变张量, 由于其物质变化率与刚体转动有关, 为了使用阿尔曼西

应变张量，必须换掉刚体的转动效应，使用麻烦，应用不多。

2.6 应变张量、应力率

设微元体变形前后的位形如图 2.2 所示。变形前的面元 $A_0B_0C_0D_0$ 的面积为 dA^0 ，其法向矢量为 N ，其上作用力矢量为 dt^0 ，该面元变形后成为 $ABCD$ ，面积为 dA ，单位法向矢量为 n ，其上作用力为 dt ，则以下三种应力张量的定义：

Cauchy 应力张量（也称 Euler 应力张量） σ 定义为 $\frac{dt}{dA}$ ，即 $dt = n \cdot \sigma dA$ ；

Lagrange 名义应力张量（又称为第 I 类皮奥拉-克希荷夫（Piola-Kirchhoff）应力张量） T 定义为 $\frac{dt}{dA^0}$ ， $dt = N \cdot T dA^0$ ；

Kirchhoff 应力张量（又称第 II 类皮奥拉-克希荷夫应力张量） S 定义为： $\frac{dt^0}{dA^0}$ ，

即 $dt^0 = NS dA^0$ ，其中， $dt^0 = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dt_j$ 。

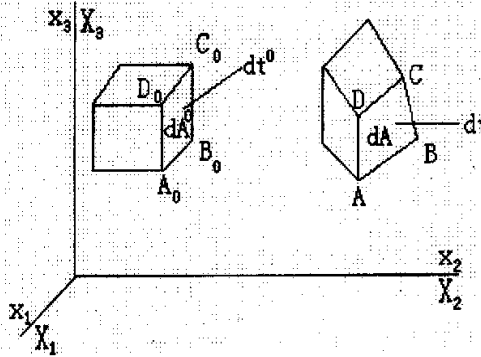


图 2.2 单元体变形前后的面力矢量

由上述定义可以看出，Cauchy 应力张量是定义在现实位形的每单位面积上的接触力，是与变形相关的真实应力，是对称的，其分量形式为

$$dt_i = \sigma_{ij} n_j dA \quad (2.6.1)$$

名义应力张量 T_{ij} 一般不是对称的，其分量形式为：

$$dt_i = T_{ji} N_j dA^0 \quad (2.6.2)$$

Kirchhoff 应力张量是定义在初始位形上的对称应力, 它在随刚体转动中不发生变化, 其分量形式为:

$$dt^0 = S_{ji} N_j dA^0 \quad (2.6.3)$$

名义应力张量 T_{ij} 和 Kirchhoff 应力张量 S_{ij} 与 Cauchy 应力张量 σ_{ij} 之间的关系为:

$$T_{ij} = J \frac{\partial X_j}{\partial x_k} \sigma_{ik} \quad (2.6.4)$$

$$S_{ik} = J \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_l}{\partial x_j} \sigma_{jl} \quad (2.6.5)$$

而名义应力张量 T_{ij} 与 Kirchhoff 应力张量 S_{ij} 的关系为:

$$S_{ij} = J \frac{\partial X_l}{\partial x_k} T_{jk} \quad (2.6.6)$$

而 Euler 描述中的变形率张量 D_{ij} 是应变对时间的物质导数, 当物体无应变地改变而瞬时地做刚体运动时, D_{ij} 为零; 而前面所定义的 Cauchy 应力的变化率, 无论是对时间的导数, 还是对物质的导数都不等于零。这就需要定义一个应力对时间的导数在刚体转动为零时的应力率。焦曼 (Jaumann) 应力率就符合这个要求。

Cauchy 应力的 Jaumann 率定义:

$$\hat{\sigma} = \frac{D}{Dt} \sigma - W \cdot \sigma + \sigma \cdot W \quad (2.6.7)$$

它是不受刚体转动影响的客观张量。

Kirchhoff 应力的 Jaumann 率定义为:

$$\hat{S} = \frac{D}{Dt} S - W \cdot S + S \cdot W \quad (2.6.8)$$

Kirchhoff 应力的 Jaumann 率与 Cauchy 应力的 Jaumann 率的关系为:

$$\hat{S} = \det(F) (\hat{\sigma} + \sigma \cdot D_{kk}) \quad (2.6.9)$$

2.7 多相介质力学基本守恒定律

基本守恒定律是解决多相介质力学理论的物理基础，是介质所共同遵循的规律。这些基本定律来自混合物理论，它包括：(1) 质量守恒定律；(2) 动量守恒定律；(3) 动量矩守恒定律；(4) 能量守恒定律（热力学第一定律）。

2.7.1 质量守恒定律

多相介质守恒定律有两部分组成，第一部分是每一相的质量守恒；第二部分是整个介质的总质量守恒。

第 m 相介质的质量守恒定律为：

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_m dV = - \int_S \rho_m V \cdot n dS + \int_V \hat{C}_m dV \quad (2.7.1)$$

这里， dV 是体积元， dS 为向量方向外的面积元，而 S 是体积 V 的边界。 $\hat{C}_m(x, t)$ 表示相间质量转换定律。也就是说， $\hat{C}_m$ 是从各相之间的物理化学反映得到的。 ρ_m 为 m 相的相对质量密度， V_m 为 m 相的速度。

对 (2.7.1) 式利用散度定理，并注意物质导数 $\dot{\rho}_m = \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + V_m \cdot \text{grad} \rho_m$ ，得到

$$\int_V (\dot{\rho}_m + \rho_m \text{div} V_m) dV = \int_V \hat{C}_m dV \quad (m = s, f, g) \quad (2.7.2)$$

由 (2.7.2) 可以得到质量守恒定律的微分形式：

$$\dot{\rho}_m + \rho_m \text{div} V_m = \hat{C}_m \quad (2.7.3)$$

对 (2.7.2) 式求和即可以得到多相介质总质量守恒定律；注意到 $\sum \hat{C}_m = 0$ ，得到

$$\int_V \sum (\dot{\rho}_m + \rho_m \text{div} V_m) dV = 0 \quad (2.7.4)$$

其局部化形式为：

$$\sum (\dot{\rho}_m + \rho_m \text{div} V_m) = 0 \quad (2.7.5)$$

当相之间没有物质转换即 $\hat{C}_m = 0$ ($m = s, f, g$)，将 $\hat{C}_m = 0$ 代入上述有关各式，便可以得到单相连续介质的有关方程。

2.7.2 动量守恒定律

动量守恒定律又称为线动量守恒定律。

动量守恒定律：在惯性坐标系中，物体 B 内的任一空间 V 内的 m 相质量的物质时间变化率等于作用在其上的合力，即

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho_m \mathbf{V}_m dV = \int_S \boldsymbol{\sigma}_m \cdot \mathbf{n} dS + \int_V (\rho_m \mathbf{b}_m + \hat{\mathbf{P}}_m + \hat{\mathbf{C}}_m \mathbf{V}_m) dV \quad (2.7.6)$$

式中： $\boldsymbol{\sigma}_m$ 是偏应力张量， $\hat{\mathbf{P}}_m$ 由相间作用力引起的相间传递，而 $\mathbf{b}_m$ 是外体力密度。

对 (2.7.6) 式利用散度定理以及质量守恒形式，上式变为：

$$\int_V \rho_m \dot{\mathbf{V}}_m dV = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_m dV + \int_V (\rho_m \mathbf{b}_m + \hat{\mathbf{P}}_m) dV \quad (2.7.7)$$

其局部形式为：

$$\rho_m \dot{\mathbf{V}}_m = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_m + \rho_m \mathbf{b}_m + \hat{\mathbf{P}} \quad (2.7.8)$$

上式即为 m 相的广义平衡方程。

介质内的相互作用要求：

$$\sum_m \hat{\mathbf{P}}_m = 0 \quad (2.7.9)$$

对 (2.7.8) 式求和，有：

$$\sum_m \left[\rho_m \dot{\mathbf{V}}_m - (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_m + \rho_m \mathbf{b}_m) \right] = 0 \quad (2.7.10)$$

上式即为整个介质的动量守恒定律的局部形式。

2.7.3 动量矩守恒定律

动量矩守恒定律又称为角动量守恒定律。

动量矩守恒定律：在惯性系中，物体 B 的位形里任一空间 V 内第 m 相介质的动量矩的物质时间变化率等于作用在第 m 相上的和力矩。

m 相的动量矩守恒定律形式为：

$$\frac{D}{Dt} \int_V \bar{\mathbf{r}} \times \mathbf{V}_m \rho_m dV = \int_S \bar{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\sigma}_m \cdot \mathbf{n}) dS + \int_V [\bar{\mathbf{r}} \times (\rho_m \mathbf{b}_m + \hat{\mathbf{P}}_m + \hat{\mathbf{C}}_m \mathbf{V}_m) + \hat{\mathbf{M}}_m] dV \quad (2.7.11)$$

单一物质的动量矩守恒定律常常反应在应力张量是对称的这一结果上。对于多相混合物介质，一般说来允许偏应力有一斜对称部分，这是由于每一相引起动量传递时相间

相互作用力 $\hat{p}_m + \hat{C}_m V_m$ 所产生的动量矩引起的结果。 $\hat{m}_m$ 是动量矩供给量, 它与 $\hat{p}_m$ 起着同样的作用。

式 (2.7.11) 可以化为:

$$\int_V \bar{r} \times \dot{V}_m \rho_m dV = \int_S \bar{r} \times (\sigma_m \cdot n) dS + \int_V [\bar{r} \times (\rho_m b_m + \hat{p}_m) + \hat{m}_m] dV \quad (2.7.12)$$

若不计 m 相的微转效应 m_m (即 $m_m = 0$), 与单相连续介质力学中处理相类似, 由式 (2.7.12) 可以得到动量矩守恒定律的局部形式为:

$$\sigma_m = \sigma_m^T \quad (2.7.13)$$

即 m 相的应力张量为对称应力张量。

2.7.4 能量守恒定律

能量守恒定律可以表述为: 多相介质 B 任一部分 V 内动能 K 和内能 U 的物质时间变化率等于作用其上的机械功率 W 和非机械功率 P 之和。即

$$\dot{K} + \dot{U} = W + P \quad (2.7.14)$$

若非机械功率仅考虑热能功率 Q , 即 $P = Q$, 上式变为:

$$\dot{K} + \dot{U} = W + Q \quad (2.7.15)$$

对热力学系统, $\dot{K} = 0$, 并取 $dE = E dt, \delta W = W dt, \delta Q = Q dt$

式 (2.7.15) 变为:

$$dE = \delta W + \delta Q \quad (2.7.16)$$

式 (2.7.16) 即为热力学第一定律。

对热力学系统, 式 (2.7.15) 中的各能量表达式为:

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int_V \rho V \cdot V dV \\ U &= \int_V \rho e dV \\ W &= \int_V \rho b \cdot V dV + \int_S V \cdot n dS \\ Q &= \int_V \rho h dV - \int_S q \cdot n dS \end{aligned} \right\} \quad (2.7.17)$$

式中, e ——单位质量内能; q ——单位面积热流向量; h ——单位质量分布的热源功率。其余符号同前。

仅讨论热力学系统时, 能量守恒定律即为热力学第一定律。象质量和动量守恒定律一样, 能量守恒定律包括两部分: 一是对各相介质的, 二是对整个总介质的。

在固定体积 V 中, 第 m 相介质的能量守恒为:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho_m (e_m + \frac{1}{2} V_m \cdot V_m) dV = \\ \int_S V_m \cdot (\sigma_m \cdot n) dS + \int_V [(\rho_m V_m \cdot b_m + V_m \cdot p_m + m_m (e_m + \frac{1}{2} V_m \cdot V_m) + \hat{\varepsilon}_m)] dV \quad (2.7.18) \\ + \int_V \rho_m h_m dV - \int_S q_m \cdot n dS \end{aligned}$$

其中: e_m ——第 m 相单位质量内能;

q_m ——第 m 相单位面积热流向量。

h_m ——第 m 相单位质量的分布热源功率;

$\hat{\varepsilon}_m$ ——相间能量传递。

(2.7.18) 式表明: 多相介质 B 中的任一部分 V 内, 第 m 相的动能与内能的物质时间变化率等于作用在第 m 相上的机械功率和热能功率以及相间能量传递。

利用前面的守恒定律及散度定理, (2.7.18) 式可变为:

$$\int_V \rho_m \dot{e}_m dV = \int_V (\sigma_m : L_m - \nabla \cdot q_m + \rho_m h_m + \hat{\varepsilon}_m) dV \quad (2.7.19)$$

这是第 m 相能量守恒的整体形式, 其局部形式为:

$$\rho_m \dot{e}_m = \sigma_m : L_m - \nabla \cdot q_m + \rho_m h_m + \hat{\varepsilon} \quad (2.7.20)$$

式中, L 为速度梯度张量, 符号 “:” 表示张量双点积, 二阶张量的双点积为一数量,

即二阶张量 A, B 的数量积为:

$$\Phi = A : B = A_{ij} B_{ij} \quad (2.7.21)$$

整个介质中, 相间能量转换满足下式:

$$\sum_m \hat{\varepsilon}_m = 0 \quad (2.7.22)$$

当相间没有能量转换时, 即 $\hat{\varepsilon}_m = 0$, 此时, 多相介质各相的能量守恒方程与单相连续介质相同。

由 (2.7.19) 和 (2.7.22) 式便可以得到整个总介质的能量守恒定律的局部形式:

$$\sum_m (\rho_m \dot{e}_m - \sigma_m : L_m - \nabla \cdot q_m + \rho_m h_m) = 0 \quad (2.7.23)$$

2.8 多相介质的本构方程

本构关系描述物质的固有属性, 用以反映不同物质对外部作用产生不同响应的特性 (即反映材料的应力与应变之间的关系), 本构关系 (物性方程) 是基于经验和试验并抽象化的物质的数学描述。从数学上讲这种关系是一种映射, 如果这种关系 (映射) 仅是一种线性映射, 即为平常所讨论的线弹性本构方程; 如果这种关系 (映射) 是一种非线性映射, 此时存在两种非线性, 即几何非线性和物理非线性。

多相介质的本构关系与单相相比复杂得多, 然而对固相为宿主相的多相介质来说, 其变形和应变由固相的变形和应变来表征, 而流相 (气相和液相) 的运动以其在固相中的相对运动来描述。流相的压力、流相在固相中赋存的状态及其变化 (吸附与解吸等)、流相的流动场等均对固相的应力和变形产生影响; 同时, 固相的变形又对流相的应力、流动等产生影响。因固流相力学性质不同, 在变形和运动过程中, 固流相体积发生变化, 亦即各相的体积比要发生变化。

2.8.1 固相特点

在多孔介质的孔隙空间中充满流体时, 流体的压力为均匀作用于孔隙周边的法向压力, 如图 2.3 所示, 这种压力称为流体的孔隙压力 (pore pressure), 图中 p 为孔隙压力。由流体和岩土骨架所组成的多相介质受到外力的作用以后, 岩土骨架将发生变形, 同时, 流体要发生流动或原来的流动状态发生改变, 岩土骨架的变形是在外部载荷与孔隙流体的共同作用下发生的, 因此, 在研究岩土骨架的变形时, 引入有效应力的概念, 即岩土骨架的变形受有效应力的控制。

如图 2.3 所示, 假设流体孔隙压力使岩土骨架产生均匀的体积应变 (volumetric strain), 而孔隙骨架的变形主要由有效应力控制, 则有效应力原理可以表示为

$$\sigma = \sigma' - mp \quad (2.8.1)$$

其中, σ 为总应力, σ' 为有效应力, 都是以拉应力为正, p 为流体应力, 以压应力为正, $m_{ij} = \delta_{ij}$ (δ_{ij} 为克曼内尔记号)。

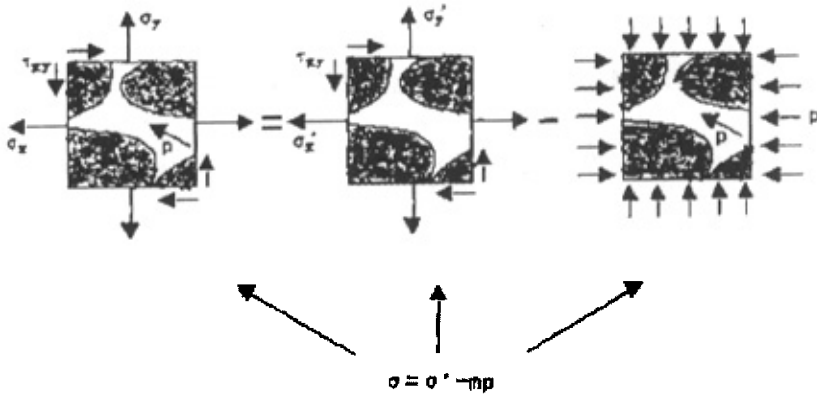


图 2.3 多孔介质中的总应力和有效应力

有效应力的物理意义表示了岩土骨架中流体流动状态对岩土变形的影响, 而有效应力原理建立了流体流动与岩土变形之间相互耦合的关系, 但它只适用于单相流体的流动问题, 对于多相流体流动与固体变形的耦合问题, 根据平均孔隙压力的概念, 将 Terzaghi 有效应力推广到多相固流耦合的情况。

考虑到可变形多孔介质中水和气并存时, 气相以两种形式存在, 即自由气和溶解气。为此, 引入 π 相 ($\pi = w, g$) 流体的地层体积系数 $B_\pi(p_\pi)$ 和溶解水气比 $R_{\pi\pi}$ ($\pi = w, g$), 具体定义见 2.8.2。根据有效平均孔隙压力的概念: 有效平均孔隙压力 p 是指固相周围混合物 (水和气) 的压力, 这样可以得到它的表达式

$$p = S_w p_l + S_g p_g \quad (2.8.2)$$

式中, S_w, S_g 分别为水相和气相流体的饱和度, 而 p_w, p_g 分别为岩土中水相压力和气相压力。

按固有相的平均值意义, 对于单相流 π 来说, 有^[57]

$$\langle \sigma \rangle = \sigma' - m \langle p_\pi \rangle^\pi \quad (2.8.3)$$

其中

$$\sigma' = (1 - \phi) \left(\langle \sigma_s \rangle^s + m \langle p_\pi \rangle^\pi \right) \quad (2.8.4)$$

σ' 为固相骨架产生应变的应力, 根据 Terzaghi 定义为有效应力, 它是压力与固相平均应力之和。

同样的情况可以推广到多于一种流相占据的孔隙空间情况。

$$\langle \sigma \rangle = \sigma' - m \langle p_f \rangle^f \quad (2.8.5)$$

其中

$$\sigma' = (1 - \phi) \left(\langle \sigma_s \rangle^s + m \langle p_f \rangle^f \right) \quad (2.8.6)$$

$\langle p_f \rangle^f$ 为平均压力, 以同时存在液相和气相为例有:

$$\langle p_f \rangle^f = S_l \langle p_l \rangle^l + S_g \langle p_g \rangle^g \quad (2.8.7)$$

把有效应力与骨架变形联系起来的本构方程与孔隙压力无关。

1. 弹性固体的本构方程

弹性固体的本构方程可以是线性的, 也可以是非线性的。其共同点是变形可以恢复, 与加载和变形历史无关, 对于等温情况来说材料的变形仅取决于当前的应力状态。

(1) 空间描述下的本构方程

假设一个无应力的自然状态, 在这个状态的一个适当确定的有限邻域内, 欧拉应力 σ_{ij} 与阿尔曼西应变 e_{ij} 之间存在一一对应的关系

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} e_{kl} \quad (2.8.8)$$

如果四阶材料张量 D_{ijkl} 是应变 e_{ij} 的函数则称为非线性弹性; 如果 D_{ijkl} 为常数, 则是线弹性, 但与小变形不同的是 (2.8.8) 中的量是相对于现实构形定义的。

式 (2.8.8) 转换为用克希荷夫应力和格林应变表示定义在现时构形下的材料性质张量, 有

$$S_{ij} = D_{ijkl}^0 E_{kl} \quad (2.8.9)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} D_{mnpq}^0 &= J \frac{\partial X_m}{\partial x_i} \frac{\partial X_n}{\partial x_j} D_{ijkl} \frac{\partial X_p}{\partial x_k} \frac{\partial X_q}{\partial x_l} \\ D_{mnpq} &= J^{-1} \frac{\partial x_i}{\partial X_m} \frac{\partial x_j}{\partial X_n} D_{ijkl}^0 \frac{\partial x_p}{\partial X_k} \frac{\partial x_q}{\partial X_l} \end{aligned} \right\} \quad (2.8.10)$$

(2) 物质描述下的本构方程

如果用 ω 表示在变形过程中的应变能密度, 它表示为:

$$\omega = \omega(E_{ij}) \quad (2.8.11)$$

此时有:

$$S_{ij} = \frac{\partial \omega}{\partial E_{ij}} \quad (2.8.12)$$

再次微分就得到增量形式的本构方程为:

$$\Delta S_{ij} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \Delta E_{kl} \quad (2.8.13)$$

记

$$C_{ijkl}^0 = \frac{\partial^2 \omega}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (2.8.14)$$

则

$$\Delta S_{ij} = C_{ijkl}^0 \Delta E_{kl} \quad (2.8.15)$$

式 (2.8.15) 为超弹性材料的本构方程。

2. 弹塑性介质本构方程

(1) 空间描述下的弹塑性本构方程

大变形问题中, Prandtl-Reuss 关于应变增量等于弹性加塑性应变之和的假设一般不成立, 如果弹性应变比塑性应变小得多, 可以近似的应用 Prandtl-Reuss 的假设。

大变形本构方程为

$$\hat{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}^{ep} V_{kl} \quad (2.8.16)$$

其中, $\hat{\sigma}_{ij}$ 为欧拉应力的焦曼导数。

对于各向同性强化的米塞斯材料，在弹性加载或塑性卸载、中性变载时有：

$$D_{ijkl}^e = \frac{E}{1+\nu} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij}\delta_{kl}) \quad (2.8.17)$$

在塑性加载时有：

$$D_{ijkl}^p = \frac{E}{1+\nu} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij}\delta_{kl}) - \frac{3\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}(\frac{E}{1+\nu})}{2\sigma'^2(1.5H + \frac{E}{1+\nu})} \quad (2.8.18)$$

其中

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}, \quad \bar{\sigma}'^2 = \frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}$$

E 和 ν 为弹性常数， H 是塑性模量，即简单拉伸试验下的欧拉应力—对数塑性应变曲线的斜率。

(2) 物质描述下的弹塑性本构方程

在物质描述下，塑性材料的屈服函数为：

$$f(S_{ij}, k) = 0 \quad (2.8.19)$$

其中， S_{ij} 为克希荷夫应力， k 为内变量。本构关系为

$$\dot{S}_{ij} = D_{ijkl}^e \dot{E}_{kl} \quad (2.8.20)$$

其中， $\dot{E}_{kl}$ 为格林应变张量的物质导数， $\dot{S}_{ij}$ 为克希荷夫应力张量的物质导数， D_{ijkl}^e 同前面的表达式。

2.8.2 在变形多孔介质中的流相特性

由于多孔介质的几何性质的复杂性，在孔隙空间内给一个严格的流速分析是不可能的，为了克服这个困难，假设渗流速度满足达西定律：

$$V = -\frac{K}{\mu} \text{grad}(p) \quad (2.8.21)$$

其中： V —— 渗流速度；

μ —— 流体的动力粘性系数；

K —— 介质的绝对渗透系数，为对称矩阵，对于孔隙介质的渗透系数 K_{ij} 尽管

有很多管理公式，但在实际应用中特别是在考虑变形影响时，只能通过宏观试验确定。

如果多孔介质的孔隙中的流相多于一种，实验证明^[57]：多相流与单相流相比，减少了介质的渗透性。

如果多孔介质的孔隙中同时存在液相（l）和气相（g），则液相相对于固相骨架的渗流速度的表达式为：

$$V_{sl} = -\frac{K_f k_{lf} \rho_l}{\mu_l B_l(P_l)} \text{grad}(p_l) \quad (2.8.22)$$

气相相对于固相骨架的渗流速度的表达式为

$$V_{sg} = -K_g \rho_g \left(\frac{k_{rg}}{\mu_g B_g} + \frac{R_{sl} k_{lf}}{\mu_l B_l} \right) \text{grad}(p_g) \quad (2.8.23)$$

其中：

$$B_\pi(P_\pi) = \frac{V_\pi(P_\pi)}{V_{\pi STC}} \quad \pi \text{ 为干相} \quad (2.8.24)$$

$$B_\pi(P_\pi) = \frac{V_\pi(P_\pi) + \bar{V}_\pi(P_\pi)}{V_{\pi STC}} \quad \pi \text{ 为湿相} \quad (2.8.25)$$

式中： V_π 为压力 P_π 作用下， π 相单位质量的体积；

$V_{\pi STC}$ 为在标准状态下， π 相单位质量的体积；

$\bar{V}_\pi(P_\pi)$ 为压力 P_π 作用下，溶解的干- π 相的体积定义要求 $\bar{V}_\pi(P_\pi)=0$ ；

$R_{s\pi}$ 为溶解率，定义为： $R_{s\pi} = \frac{V_{dgSTC}}{V_{\pi STC}}$ ，若液相和气相互不相容，则 $R_{s\pi}=0$ ，式

(2.8.23)变为：

$$V_{sg} = -\frac{K_g \rho_g k_{rg}}{\mu_g B_g} \text{grad}(p_g) \quad (2.8.26)$$

其中： V_{dgSTC} 为溶解在 π 相的单位体积质量中的气体在标准压力下占有的体积。

第 3 章 固-流耦合渗流模型的建立

在土体固结过程中, 由于孔隙压力的变化, 一方面要引起土骨架应力变化, 由此导致岩土特性变化; 另一方面, 这些变化又反过来影响孔隙流体的流动和压力的分布, 因此, 在土体固结过程中, 必须考虑流体 (包括液体和气体) 在多孔介质中的流动规律及其对岩土本身的变形和强度造成的影响, 即应考虑土体内应力场与渗流场之间的相互耦合作用, 因此, 土体固结过程中的流体的渗流是固流耦合渗流, 而土体固结过程中的土骨架变形则是固流耦合变形。

本章根据固流耦合渗流理论的基本思想, 将渗流力学与岩土力学相结合, 考虑土体固结过程中流体的渗流和土骨架的变形的固流耦合特征, 建立有限变形下土体的固流耦合数学模型, 为土体固结中固流耦合渗流数值模拟奠定理论基础。首先根据连续介质理论, 建立固流渗流的运动方程, 进而根据连续介质的质量守恒原理建立流体渗流的控制方程; 在此基础上获得有限变形下固流耦合变形问题的场方程, 并给出了定解条件。

3.1 基本假设

在以固相为宿主相的三相介质固结问题中, 作如下假设:

- (1) 平衡及临界状态以前, 固相骨架为准静态的;
- (2) 流相在固相骨架中的渗流服从达西定律;
- (3) 固相骨架处理为均质各向同性体;
- (4) 流相为理想流体。

3.2 有效应力原理

有效应力的概念最早是由 *Terzaghi* 在研究饱和土壤的固结、水与土壤的相互作用时, 在试验的基础上于 1923 年提出的, 接着 *Skempton* (1961) 证明了它对工程上的应用是足够精确的。*Terzaghi* 在提出有效应力概念的同时, 提出了著名的 *Terzaghi* 有效应力原理。

以固相为宿主相的骨架的变形主要由有效应力控制, 由 (2.8.1) 可知, 有效应力原理表示为

$$\sigma = \sigma' - pm \quad (3.2.1)$$

其中, σ 为总应力, σ' 为有效应力, 都是以拉应力为正, p 为流体应力, 以压应力为正。

对于充满孔隙空间的单相体, 有效应力按 (2.8.1) 给出, 假设每一固相颗粒由周围的流体所包围, 进一步说, 在这种情况下, 宏观的流体压力作用在每一颗粒的流—固接触面上, 在颗粒中仅引起均匀的体积应变。

对于多相流, 假设流体平均孔隙压力 $\bar{P}$ 使岩土骨架产生均匀的体积应变, 而孔隙骨架的变形和强度主要由有效应力 σ' 控制, 则 Terzaghi 有效应力原理可以推广到

$$\sigma = \sigma' - \bar{p}m \quad (3.2.2)$$

以后, 许多学者提出了适用于岩土修正的有效应力原理

$$\sigma = \sigma' - \alpha \bar{p}m \quad (3.2.3)$$

其中, α 为修正系数。

3.3 固相骨架的应力平衡方程

由假设 1, 忽略固相骨架的惯性力, 利用多相介质的动量守恒定律, 得到固相骨架的有效应力表示的平衡方程为:

$$\nabla \cdot \sigma_{sc} + \rho_s b_s - \text{grad}(p) = 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \quad (3.3.1)$$

该方程是基于现实构形的平衡方程, σ_{sc} 为固相骨架的有效应力, 以拉应力为正, P 为平均孔隙压力, 其表达式为

$$p = S_f p_f + S_g p_g \quad (3.3.2)$$

$$S_g + S_f = 1 \quad (3.3.3)$$

式中: S_w, S_g 分别为水相和气相流体的饱和度, 而 p_w, p_g 分别为岩土中水相压力和气相

压力。方程 (3.3.1) 是以固相骨架为脱离体建立的平衡方程, σ_{se} 实际上是有效应力。

由于现实状态, 通常都是需要求解的状态, 一般知道的是初始状态的边界条件和状态, 对现实状态的初始条件和状态是未知的, 是需要求解的。为了求解, 还需要把方程 (3.2.1) 转化到初始状态下的物质描述中。

假设体力和面力在物体的变形过程中保持不变, 可以用 Lagrange 应力得到平衡方程:

$$T_{se\ y,j} + \rho_{s0} b_{s0i} - p_{,i} = 0 \quad (3.3.4)$$

Lagrange 应力张量是非对称的应力张量, 使用起来很不方便, 把上式变换到 Kirchhoff 应力所表示的平衡方程为:

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \left(S_{se\ ki} \frac{\partial x_j}{\partial X_k} \right) + \rho_{s0} b_{s0i} - p_{,i} = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \quad (3.3.5)$$

式中, X_i 为 Lagrangian 坐标, x_i 为 Eulerian 坐标; ρ_s 和 ρ_{s0} 分别为现实构形和初始构形的固体质量密度; b_s , b_{s0} 分别为现实构形和初始构形的外体力密度; S_{se} 表示固相有效的 Kirchhoff 应力。

3.4 在变形多孔介质中的流相控制方程

流体渗流运动是由流体流动的连续方程 (质量守恒)、流体状态方程、流体渗流方程组成。

由 (2.8.21), 假设渗流速度满足达西定律:

$$V = -\frac{K}{\mu} \text{grad}(p) \quad (3.4.1)$$

其中符号意义同式 (2.8.21)。

由多相介质的质量守恒定律, 流相的连续方程为:

$$\dot{\rho}_m + \rho_m \text{div}(V_m) = \hat{C}_m \quad (3.4.2)$$

3.4.1 气相控制方程

令式 (3.4.2) 中 $m = g$, 便得到气相流动的连续方程:

$$\dot{\rho}_g + \rho_g \operatorname{div}(V_g) = \hat{C}_g \quad (3.4.3)$$

式中: $\hat{C}_g$ 为气体的质量增加速率, 它可以反映相之间的相互作用。

由 V_{sg} 的物理意义, 有:

$$V_g = V_s + V_{sg} = V_s - K_g \rho_g \left[\frac{k_{rg}}{\mu_g B_g} + \frac{R_g k_{rf}}{\mu_f B_f} \right] \operatorname{grad}(p_g) \quad (3.4.4)$$

代入上式 (3.4.3), 有:

$$\dot{\rho}_g + \rho_g \operatorname{div}(V_s - K_g \rho_g \left[\frac{k_{rg}}{\mu_g B_g} + \frac{R_g k_{rf}}{\mu_f B_f} \right] \operatorname{grad}(p_g)) = \hat{C}_g \quad (3.4.5)$$

$$\operatorname{div}\{K_g \rho_g \left[\frac{k_{rg}}{\mu_g B_g} + \frac{R_g k_{rf}}{\mu_f B_f} \right] \operatorname{grad}(p_g)\} - \dot{\theta}_s - \frac{\dot{\rho}_g}{\rho_g} + \frac{\hat{C}_g}{\rho_g} = 0 \quad (3.4.6)$$

式中: $\dot{\theta}_s = V_{s,k,k}^s = \frac{\partial}{\partial t}(m^T e) = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u_x^s}{\partial x} + \frac{\partial u_y^s}{\partial y} + \frac{\partial u_z^s}{\partial z})$ 为固相骨架的体积变形。

若液相和气相互不相容, 不考虑气相的吸附与解吸等, 作用式 (3.4.6) 变为:

$$\operatorname{div}\left\{\frac{K_g k_{rg} \rho_g}{\mu_g B_g} \operatorname{grad}(p_g)\right\} - \dot{\theta}_s - \frac{\dot{\rho}_g}{\rho_g} = 0 \quad (3.4.7)$$

方程 (3.4.7) 即为以孔隙气相压力和固相骨架体积变形表示的连续方程, 方程中的 $\dot{\theta}_s$ 项反映固相骨架变形对孔隙气相压力的作用。

假设气相流动是等温的, 这样气体密度仅为压力的函数, 假设气相为理想气体, 故气体状态方程为:

$$\rho_g = \frac{\rho_{gn}}{P_{gn}} p_g \quad (3.4.8)$$

其中, ρ_{gn} 为标准状态下气体密度, p_{gn} 为一个工程大气压, 压力值为 0.101325MPa。

这时, 式 (3.4.7) 变为:

$$\operatorname{div}\left\{\frac{K_g k_{rg} \rho_g}{\mu_g B_g} \operatorname{grad}(p_g)\right\} - \dot{\theta}_s - \frac{1}{p_g} \dot{p}_g = 0 \quad (3.4.9)$$

3.4.2 液相控制方程

令式 (3.4.2) 中 $m=l$, 便得到液相流动的连续方程:

$$\rho_l + \rho_l \operatorname{div}(V_l) = \hat{C}_l \quad (3.4.10)$$

式中: $\hat{C}_l$ 为液相的质量增加速率, 它可以反映相之间的相互作用。

由 V_{sl} 的物理意义, 有:

$$V_l = V_s + V_{sl} = V_s - \frac{K_l k_n \rho_l}{\mu_l B_l} \operatorname{grad}(p_l) \quad (3.4.11)$$

代入式 (3.4.10), 有:

$$\rho_l + \rho_l \operatorname{div} \left[V_s - \frac{K_l k_n \rho_l}{\mu_l B_l} \operatorname{grad}(p_l) \right] = \hat{C}_l \quad (3.4.12)$$

化简后, 得

$$\operatorname{div} \left\{ \frac{K_l k_n \rho_l}{\mu_l B_l} \operatorname{grad}(p_l) \right\} - \dot{\theta}_s - \frac{\dot{\rho}_l}{\rho_l} + \frac{\dot{\hat{C}}_l}{\rho_l} = 0 \quad (3.4.13)$$

方程 (3.4.13) 即为以孔隙液相和固相骨架体积变形表示的连续方程, 方程中的 $\dot{\theta}_s$ 项反映固体变形对孔隙液相压力的作用。

假设液相流动是等温的, 且液体是不可压缩的理想流体, 因此固结过程中 $\hat{C}_l = 0$, 上式变为:

$$\operatorname{div} \left\{ \frac{K_l k_n \rho_l}{\mu_l B_l} \operatorname{grad}(p_l) \right\} - \theta_s = 0 \quad (3.4.14)$$

3.5 物性方程和几何方程

在多相连续介质中, 把有效应力和骨架变形联系起来的本构方程与孔隙压力无关。在有限变形理论中, 对于次弹性类物质增量形式的本构关系为:

$$\Delta S_{seij} = D_{ijkl}^T E_{kl} \quad (3.5.1)$$

式中, ΔS_{seij} 是 Kirchhoff 应力增量, ΔE_{kl} 是 Green 应变增量, D_{ijkl}^T 是参考初始位形的

本构张量。在本文中，由于时间有限，只考虑土体发生的是线弹性变形的情形。对于土体材料是弹塑性的情况，本构矩阵 D_{ijkl}^T 要发生变化，且需要选择合适的屈服函数，考虑流动法则和硬化规律。

固相的几何方程由固相(土体)的应变—位移关系来表示。在有限变形中，几何关系在直角坐标系中可以表示为：

$$E_{KL}^s = \frac{1}{2} [u_{K,L}^s + u_{L,K}^s + u_{N,L}^s u_{N,L}^s] \quad (3.5.2)$$

式中， u^s 表示固相的位移分量。

3.6 固-流耦合固结问题的数学模型

3.6.1 固相的应力平衡方程

$$\nabla \cdot \sigma_{se} + \rho_s b_s - \text{grad}(p) = 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \quad (3.6.1)$$

该方程是基于现实构形的平衡方程， σ_{se} 为固相骨架的有效应力，以拉应力为正， p 为平均压力。

$$p = S_f p_f + S_g p_g$$

$$S_g + S_f = 1$$

式中： p_f 为液相压力， p_g 为气相压力，以压力为正。 S_g 为气相的饱和度， S_f 为液相的饱和度。

用 Kirchhoff 应力表示的平衡方程为：

$$\frac{\partial}{\partial X_k} (S_{se} \frac{\partial x_i}{\partial X_l}) + \rho_{s0} b_{s0i} - p_i = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \quad (3.6.2)$$

式中， X_l 为 Lagrangian 坐标， x_i 为 Eulerian 坐标； ρ_s 和 ρ_{s0} 分别为现实构形和初始构形的固体质量密度； b_s ， b_{s0} 分别为现实构形和初始构形的外体力密度； S_{se} 表示固相有效的 Kirchhoff 应力。

3.6.2 气相渗流控制方程

考虑理想气体，不考虑气相的吸附与解吸时，其控制方程为：

$$\operatorname{div}\left\{\frac{K_g k_{rg} \rho_g}{\mu_g B_g} \operatorname{grad}(p_g)\right\} - \dot{\theta}_g - \frac{1}{p_g} \dot{p}_g = 0 \quad (3.6.3)$$

3.6.3 液相渗流控制方程

考虑液体是不可压缩的理想流体，其控制方程为：

$$\operatorname{div}\left\{\frac{K_l k_{rl} \rho_l}{\mu_l B_l}\right\} \operatorname{grad}(p_l) - \dot{\theta}_l = 0 \quad (3.6.4)$$

3.6.4 几何方程

$$E_{KL}^s = \frac{1}{2} \left[u_{K,L}^s + u_{L,K}^s + u_{N,L}^s u_{N,L}^s \right] \quad (3.6.5)$$

3.6.5 本构方程

考虑固相骨架为次弹性物质，其率形式为：

$$\hat{\sigma}_{se} = \hat{\sigma}_s(D, A_m) \quad (3.6.6)$$

$$\hat{S}_{se} = \hat{S}_s \left(\dot{E}, A_m \right) \quad (3.6.7)$$

其中：\$A_m\$ 为变形路径函数。其增量形式为：

$$\Delta S_{seij} = C_{ijkl}^0 \Delta E_{kl} \quad \text{超弹性} \quad (3.6.8)$$

$$\dot{S}_{seij} = D_{ijkl}^{ep} \dot{E}_{kl} \quad \text{弹塑性本构关系} \quad (3.6.9)$$

3.6.6 边界条件

$$\sigma_{ik} n_i = \bar{F}_k \quad \text{在 } \Gamma_\sigma \text{ 上} \quad (3.6.10)$$

$$S_{cik} \frac{\partial x_i}{\partial X_l} n_k = \bar{p}_{0k} \quad \text{在 } \Gamma_{ss} \text{ 上} \quad (3.6.11)$$

$$u_k = \bar{u}_k \quad \text{在 } \Gamma_u \text{ 上} \quad (3.6.12)$$

$$p_g = \bar{p}_g \quad \text{在 } \Gamma_{gp} \text{ 上} \quad (3.6.13)$$

$$V_{gs} = \bar{V}_{gs} \quad \text{在 } \Gamma_{vg} \text{ 上} \quad (3.6.14)$$

$$p_f = \bar{p}_f \quad \text{在 } \Gamma_{fp} \text{ 上} \quad (3.6.15)$$

$$V_{fs} = \bar{V}_{fs} \quad \text{在 } \Gamma_{vf} \text{ 上} \quad (3.6.16)$$

3.6.7 初始条件

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_s|_{t=0} = \sigma_0 \\ S_s|_{t=0} = S_0 \end{array} \right\} \quad (3.6.17)$$

初始 Lagrangian 坐标坐标与 Eulerian 坐标重合时, $\sigma_0 = S_0$

$$p_g|_{t=0} = p_{g0} \quad (3.6.18)$$

$$p_f|_{t=0} = p_{f0} \quad (3.6.19)$$

$$V_f|_{t=0} = V_{f0} \quad (3.6.20)$$

$$V_g|_{t=0} = V_{g0} \quad (3.6.21)$$

以上(3.6.1)——(3.6.7)便构成了固—液—气三相介质相互耦合作用的力学边值问题。

第 4 章 固-流耦合渗透固结问题的非线性数值解法

固-流耦合问题中, 固相变形和流相渗流的数学模型是相当复杂的, 对于具体工程问题的解析解是十分困难的, 甚至是不可能的。这主要因为固相与流相介质的相互耦合, 固相在有限变形下, 使得固相和流相方程都是非线性的, 又由于渗流的影响, 使得固流耦合问题为空间域和时间域中的问题。本章给出固流耦合问题的数值解法, 空间域用有限元法, 时间域则用中心差分法进行离散。由于问题的非线性和准静态, 采用增量有限元法。

4.1 有限变形下的虚功原理

4.1.1 虚功原理

虚功原理是变形体有限元法的重要理论基础, 虚位移原理与应力平衡方程和应力边界条件等价。

三种应力的能量共轭应变为:

Cauchy 应力 σ 与关于现实构形的变形率张量 D 能量共轭。

Lagrange 应力 T 与关于初始构形的变形梯度 F 能量共轭。

Kirchhoff 应力 S 与 Green 应变 E 能量共轭。

Euler 应力 (基于现实构形) 形式的虚功方程为:

$$\int_V \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} dV' - \int_V \rho' f_i \delta u_i dV' - \int_S p_i' \delta u_i dS' = 0 \quad (4.1.1)$$

Lagrange 应力 (基于初始构形) 的虚功方程为:

$$\int_V T_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} dV - \int_V \rho f_i \delta u_i dV - \int_S p_i \delta u_i dS = 0 \quad (4.1.2)$$

Kirchhoff 应力 (基于初始构形) 的虚功方程为:

$$\int_V S_{ij} \delta E_{ij} dV - \int_V \rho f_i \delta u_i dV - \int_S p_i \delta u_i dS = 0 \quad (4.1.3)$$

其中, V , S , V' , S' 分别为物体在初始构形和现实构形的体积和面积; ρ , ρ' 分别为物体在初始构形和现实构形的质量密度, p_i , p_i' 分别为物体在初始构形和现实构

形的表面分布荷载。

由于 $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ 、 $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ 的非对称性，故在有限应变中一般不采用方程 (4.1.1)、(4.1.2)

的形式，常采用 (4.1.3) 的形式。

4.1.2 伽辽金法 (Galerkin)

上述虚功原理给出了与微分方程和边界条件等价的积分形式。为了建立有限元解法还可以用加权余量法导出有限元方程，它本身是一种独立的数值解法。伽辽金法 (Galerkin) 为加权余量法的一种，经常用以得到有限元方程，后面章节中的流体渗流有限元方程也由伽辽金法 (Galerkin) 得出。

对于微分方程

$$A(u) = 0 \quad \text{在 } V \text{ 内} \quad (4.1.4)$$

边界条件为：

$$B(u) = 0 \quad \text{在 } \Gamma \text{ 内} \quad (4.1.5)$$

待求量用近似函数表示：

$$u = \bar{u} = \sum_{i=1}^n N_i a_i = N a \quad (4.1.6)$$

权函数为 N ，则可以得到伽辽金方程为：

$$\int_V N^T A dV - \int_{\Gamma} N^T B d\Gamma = 0 \quad (4.1.7)$$

考虑到几何非线性的影响，在处理弹塑材料的几何非线性问题时，一般采用增量求解方法，主要有两种，一是以 $t_0 = 0$ 初始构形为参考构形，这种表达方法称为完全的 Lagrange 法 (简称 T.L 法)；另一种方法是在 t 和 $t + \Delta t$ 两个步长内求解，所有的变量都以 t 时刻构形作为参考构形定义，这样对不同时间步长求解，不断修改参考构形，这种表达方法叫修正的 Lagrange 法 (简称 U.L)。

有限变形问题的求解中究竟采用哪种方法，主要看本构关系和屈服函数是如何定义的，如果本构关系和屈服函数是相对于初始构形的克希荷夫应力定义的，在分析中最好采用 T.L 法；如果本构方程和屈服函数是用欧拉应力定义的最好选用 U.L 方法。

这里选用 T. L 格式，并使其与物体未变形时的初始位置一致。

4.2 固相增量有限元法

如果固相介质某一点未变形前的初始位置为 X ，在 t 时刻的总位移矢量为 u ，那么在 t 时刻的质点坐标为：

$$x = X + u \quad (4.2.1)$$

在总的 Lagrange 公式中，应用 Green 应变，Green 应变矩阵可以表示为：

$$E = \frac{1}{2} \{ [J_D]^T [J_D] - I \} \quad (4.2.2)$$

其中， $[J_D]$ 为 t 时刻的变形雅可比矩阵。

Green 应变也可以写成

$$E = E^L + E^N \quad (4.2.3)$$

式中， E^L 为线性应变， E^N 为非线性应变，其分量形式为：

$$E_{ij} = E_{ij}^N + E_{ij}^L \quad (4.2.4)$$

$$E_{ij}^L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) = e_{ij} \quad (4.2.5)$$

$$E_{ij}^N = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (4.2.6)$$

对于固流耦合问题，固相虚功方程为：

$$\int_V [\delta E]^T S_e dV - \int_V [\delta E]^T m p dV - \hat{f} = 0 \quad (4.2.7)$$

或写成增量形式为：

$$\int_V [\delta E]^T dS_e dV - \int_V [\delta E]^T m p dV - d\hat{f} = 0 \quad (4.2.8)$$

其中：

$$\hat{f} = \int_V \rho f \cdot \delta u dV + \int_S t \cdot \delta u dS \quad (4.2.9)$$

$$d\hat{f} = \int_V \rho df \cdot \delta u dV + \int_S dt \cdot \delta u dS \quad (4.2.10)$$

S_e 为固相骨架的克希荷夫应力。

下面采用位移有限元法, 以单元节点位移、压力为基本未知量, 给出 t_N, t_{N+1} 时刻的位移和位移增量、压力、压力增量的插值变换矩阵。

在 t_{N+1} 时刻, 位移为 $\bar{u}_i$:

$$\bar{u}_i = \bar{x}_i - x_i \quad (4.2.11)$$

对于 t_N 时刻来说, 由于有一个时间增量 Δt , 所产生的位移增量为:

$$\Delta u_i = \bar{x}_i - x_i = \bar{u}_i, \delta \bar{u}_i = \delta(\Delta u_i) \quad (4.2.12)$$

同理, 对于压力值, 在 t_{N+1} 时刻的压力 $\bar{P}$ 相对于 t_N 时刻的压力 P 为:

$$\bar{P} = P + \Delta P, \delta \bar{P}_i = \delta(\Delta P) \quad (4.2.13)$$

单元坐标、位移、压力值有:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \sum_1^n N_k x_i^k, x = Nx_e \\ \bar{x}_i &= \sum_1^n N_k \bar{x}_i^k, \bar{x} = N\bar{x}_e \\ u &= Na_e, \bar{u} = N\bar{a}_e \\ \Delta u &= \sum_1^n N_k u_i^k, \Delta u = N\Delta a_e \\ P &= \sum_1^n \bar{N}_i P_i, P = \bar{N}b \\ \bar{P} &= \sum_1^n \bar{N}_i \bar{P}_i, \bar{P} = \bar{N}\bar{b} \\ \Delta P &= \sum_1^n \bar{N}_i \Delta P_i, \Delta P = \bar{N}\Delta b \end{aligned} \right\} \quad (4.2.14)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} N &= [N_1 I, N_2 I, \dots, N_n I] \\ a_e &= [u_1^1, u_2^1, u_3^1, \dots, u_1^n, u_2^n, u_3^n]^T \\ b &= [P_1, P_2, \dots, P_n]^T \\ \bar{N} &= [N_1, N_2, \dots, N_n]^T \end{aligned} \right\} \quad (4.2.15)$$

Δa_e 与 a_e 有类似的形式, Δb 与 b 有类似的形式。应变相对于初始构形定义, 可以得到 Green 应变的 T.L 增量为:

$$\Delta E_{IJ}(t_N) = \frac{1}{2}(\Delta u_{I,J} + \Delta u_{J,I} + u_{M,J}\Delta u_{M,I} + u_{M,I}\Delta u_{M,J} + \Delta u_{M,I}\Delta u_{M,J}) \quad (4.2.16)$$

将 (4.2.14) 带入 (4.2.16) 有:

$$\Delta E = \bar{B}\Delta a_e \quad (4.2.17)$$

$$\delta\Delta E = B\delta(\Delta a_e) \quad (4.2.18)$$

$$\Delta E = [\Delta E_{11}, \Delta E_{22}, \Delta E_{33}, 2\Delta E_{23}, 2\Delta E_{32}, 2\Delta E_{21}]^T \quad (4.2.19)$$

$$\bar{B} = B_{L0} + B_{L1} + \bar{B}_{NL} \quad (4.2.20)$$

$$B = B_{L0} + B_{L1} + B_{NL} \quad (4.2.21)$$

其中, $B_{L0} = LN$, $B_{L1} = AG$, $\bar{B}_{NL} = \frac{1}{2}\Delta AG$, $B_{NL} = \Delta AG$

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.22)$$

$$G = HN \quad (4.2.23)$$

$$H = \begin{bmatrix} I \frac{\partial}{\partial x_1} \\ I \frac{\partial}{\partial x_2} \\ I \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (4.2.24)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial u^T}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u^T}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u^T}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial u^T}{\partial x_3} & \frac{\partial u^T}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u^T}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial u^T}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u^T}{\partial x_2} & \frac{\partial u^T}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.25)$$

上式中将 u^T 换成 Δu^T 则得到 ΔA 的矩阵形式。

1. 推导增量平衡方程

相对于 Green 应变张量, 采用克希荷夫应力 S_e , 其增量为 ΔS_e , 矩阵形式为:

$$\Delta S_e = [\Delta S_{e11}, \Delta S_{e22}, \Delta S_{e33}, \Delta S_{e23}, \Delta S_{e31}, \Delta S_{e21}]^T \quad (4.2.26)$$

ΔS_e 矩阵与 S_e 矩阵具有相同的形式。

设

$$\bar{E} = E + \Delta E \quad (4.2.27)$$

$$\Delta \bar{S}_e = S_e + \Delta S_e \quad (4.2.28)$$

$$\Delta \bar{u} = u + \Delta u \quad (4.2.29)$$

$$\Delta \bar{P} = P + \Delta P \quad (4.2.30)$$

t_N 时刻的位移 u 、应变 E 、压力 P 为已知量, 故有:

$$\delta \bar{E} = \delta(\Delta E) \quad (4.2.31)$$

$$\delta \bar{u} = \delta(\Delta u) = N \delta(\Delta u_e) \quad (4.2.32)$$

$$\delta \bar{P} = \delta(\Delta P) = \bar{N} \delta(\Delta b) \quad (4.2.33)$$

在 t_{N+1} 时刻应用虚功原理有:

$$\int_V [\delta E]^T \bar{S}_e dV - \int_V [\delta E]^T m(\bar{Nb}) dV - \int_V \delta u^T \rho f dV - \int_S \delta u^T t dS = 0 \quad (4.2.34)$$

将 (4.2.26) ~ (4.2.31) 及 (4.2.18) 代入 (4.2.34) 得

$$\delta \Delta a_e^T \left[\int_V B^T \bar{S}_e dV - \int_V B^T m(\bar{Nb}) dV - \int_V N^T \rho \bar{f} dV - \int_S N^T \bar{t} dS \right] = 0 \quad (4.2.35)$$

由于 $\delta \Delta a_e$ 任意性, 有:

$$\int_V B^T \bar{S}_e dV - \int_V B^T m(\bar{Nb}) dV - \int_V N^T \rho \bar{f} dV - \int_S N^T \bar{t} dS = 0 \quad (4.2.36)$$

由 (4.2.22) ~ (4.2.25) 可知, 从 t_N 到 t_{N+1} 时刻, 增量步 B_{L0} 和 B_{L1} 为已知, 对

(4.2.36) 进一步简化, 有:

$$\begin{aligned} & \int_V B^T \Delta S_e dV + \int_V B_{NL}^T S_e dV + \int_V (B_{L0}^T + B_{L1}^T) S_e dV = \left[\int_V B^T m(\bar{Nb}) dV \right] \\ & + \int_V N^T \rho \bar{f} dV + \int_S N^T \bar{t} dS \end{aligned} \quad (4.2.37)$$

$$\int_V B^T \Delta S_e dV + \int_V B_{NL}^T S_e dV = R_o + R_p - R_s \quad (4.2.38)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} R_o &= \int_V N^T \rho \bar{f} dV + \int_S N^T \bar{t} dS \\ R_p &= \int_V B_L^T m(\bar{Nb}) dV \\ R_s &= \int_V (B_{L0}^T + B_{L1}^T) S_e dV = \int_V B_L^T S_e dV \\ B_L &= B_{L0} + B_{L1} \end{aligned} \right\} \quad (4.2.39)$$

实际计算时, 对 R_p 的计算作如下处理, 以 t_N 时刻的值代入 R_p , 即有

$$R_p = \int_V B_L^T m[\bar{Nb}(t_N)] dV \quad (4.2.39a)$$

式 (4.2.38) 变为:

$$\int_V B^T \Delta S_e dV + \int_V B_{NL}^T S_e dV - R_o - R_p + R_s = 0 \quad (4.2.40)$$

为应力增量平衡方程, 它是关于位移增量的非线性方程。

由 ΔA 、 G 的矩阵形式, 有:

$$\int_V B_{NL}^T S_e dV = \left(\int_V G^T M G dV \right) \Delta a = K_S \Delta a \quad (4.2.41)$$

其中:

$$K_s = \int G^T M G dV \quad (4.2.42)$$

$$M = \begin{bmatrix} S_{11}I & S_{12}I & S_{13}I \\ S_{21}I & S_{22}I & S_{23}I \\ S_{31}I & S_{32}I & S_{33}I \end{bmatrix} \quad (4.2.43)$$

方程 (4.3.40) 可写成:

$$\int B^T \Delta S_e dV + K_s \Delta a + R_s - R_p - R_o = 0 \quad (4.2.44)$$

其中:

K_s 为几何刚度矩阵, 由有限应变中的非线性项引起。

R_s 为 t_N 时刻的应力引起的等效节点力矢量。

R_N 为 t_{N+1} 时刻载荷的等效节点力。

方程 (4.2.44) 为关于位移增量的非线性应力平衡方程, 为达到求解目的, 尚须进一步进行线性化处理。

平衡方程 (4.2.44) 的线性化处理包括两个方面, 即本构关系的线性化和 Green 应变的线性化。

2. 线性化问题

(1) 本构关系的线性化

设本构关系具有如下形式:

$$\Delta S_e = D(\Delta E) \Delta E \quad (4.2.45)$$

$D(\Delta E)$ 为参考初始位形定义的本构张量。实际上, 以上关系是非线性的。方程 (4.2.45) 的线性化, 即使本构矩阵 D 在增量步内为常量, 在 t_N 时刻的切线模量值为 D_T , 方程 (4.2.45) 变为:

$$\Delta S_e = D_T \Delta E \quad (4.2.46)$$

(2) Green 应变增量的线性化

Green 应变增量取其线性化形式为:

$$\Delta E = \Delta E_0 = (B_{L0} + B_{L1})\Delta a \quad (4.2.47)$$

将式 (4.2.46)、(4.2.47) 代入式 (4.2.45), 便可以得到用节点位移增量表示的平衡方程的线性化形式:

$$(K_L + K_S)\Delta a + R_s - R_O - R_P = 0 \quad (4.2.48)$$

方程 (4.2.48) 中, 含有压力项, 该项反映了流相对土体的作用。其中

$$\begin{aligned} K_L &= \int_V (B_{L0}^T + B_{L1}^T) D_T (B_{L0} + B_{L1}) dV \\ K_S &= \int_V G^T M G dV \\ R_P &= \int_V (B_{L0}^T + B_{L1}^T) m(\bar{N}b) dV \\ R_O &= \int_V N^T \rho \bar{f} dV + \int_S N^T \bar{t} dS \\ R_s &= \int_V (B_{L0}^T + B_{L1}^T) S_s dV \end{aligned} \quad (4.2.49)$$

4.3 气相渗流的有限元方程

根据气相渗流方程, 其边值问题为:

$$\nabla \cdot \left(\frac{K_g}{\mu_g} \nabla P_g \right) - F(P_g) \dot{P}_g - \dot{\theta}_s = 0 \quad , \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \quad (4.3.1)$$

边界条件存在两种边界:

(I) 在边界 Γ_1 上给定气体的流量, 即:

$$\bar{B} = V_g - q_0 = 0 \quad \text{在边界 } \Gamma_1 \text{ 上}$$

也就是

$$-n^T \frac{K_g}{\mu_g} \nabla P_g - q_{g0} = 0 \quad (4.3.2)$$

其中, n 为边界表面的外法向单位矢量, q_0 为通过边界表面的单位面积的外流速率。

(II) 在边界 Γ_2 上给定气体的压力值:

$$P_g = P_g^b \quad (4.3.3)$$

利用伽辽金法得到与气相渗流控制方程 (4.3.1) 及边界条件 (4.3.2) 和 (4.3.3) 等价积分形式为:

$$\int_{\Omega} N^T [\nabla \cdot (\frac{K_g}{\mu_g} \nabla P_g) - F(P_g) \dot{P}_g - \dot{\theta}_s] d\Omega + \int_{\Gamma_2} \bar{N}^T (P_g - P_g^b) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{N}^T (V_g - q_{g0}) d\Gamma = 0 \quad (4.3.4)$$

对于 Γ_2 上的边界条件在选择 P_g 的近似函数时得到满足, 则上式可不出现 Γ_2 上的积分。具体有限元实现时, 通过求解前强行引入条件(4.3.3)来实现。

对方程(4.3.4)作变换(分部积分), 得到:

$$\int_{\Omega} \nabla N^T \frac{K_g}{\mu_g} \nabla P_g d\Omega + \int_{\Omega} N^T F(P_g) \dot{P}_g d\Omega + \int_{\Omega} N^T \dot{\theta}_s d\Omega + \int_{\Gamma_{1g}} N^T q_{g0} d\Gamma = 0 \quad (4.3.5)$$

采用与前面固相有限元法中相同的网格和插值函数, 有:

$$\left. \begin{aligned} u &= Na, \bar{u} = N\bar{a} \\ \Delta u &= \sum_1^n N_i u_i^k, \Delta u = N\Delta a \\ P_g &= \sum_1^n \bar{N}_i P_{gi}, P_g = \bar{N}b_g \\ \bar{P}_g &= \sum_1^n \bar{N}_i \bar{P}_{gi}, \bar{P}_g = \bar{N}\bar{b}_g \\ \Delta P_g &= \sum_1^n \bar{N}_i \Delta P_{gi}, \Delta P_g = \bar{N}\Delta b_g \end{aligned} \right\} \quad (4.3.6)$$

对于典型增量步 $[t_N, t_{N+1}]$, 有:

$$\begin{aligned} \bar{P}_g(t_{N+1}) &= P_g(t_N) + \Delta P_g \\ \bar{b}_g(t_{N+1}) &= b_g(t_N) + \Delta b_g \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

将方程(4.3.5)变成:

$$\begin{aligned} &\int_V \nabla \bar{N}^T \frac{K_g}{\mu_g} \nabla \bar{N} dV + \int_V \bar{N}^T F[\bar{N}b_g(t_{N+1})] \bar{N} dV \\ &+ \int_V N^T m^T B_L \Delta a dV + \int_{\Gamma_1} N^T q_{g0} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

将式(4.3.7)代入式(4.3.8), 有:

$$H_{gg} \Delta b_g + H_{gn} \Delta b_g + f_{g0} + \Delta f_{g1} = 0 \quad (4.3.9)$$

其中:

$$H_{gg} = \int_V \nabla \bar{N}^T \frac{K_g}{\mu_g} \nabla \bar{N} dV$$

$$H_{gn} = \int_V \bar{N}^T F[\bar{N} \bar{b}_g(t_{N+1})] \bar{N} dV$$

$$f_{ga} = \int_V \bar{N}^T m B_L \dot{\Delta a}_g dV$$

$$\Delta f_{g1} = H_{gL} b_g(t_N) + \int_{\Gamma_1} \bar{N}^T q_0 d\Gamma$$

式 (4.3.9) 即为气相渗流方程增量形式的有限元公式。

对时间域的离散采用差分形式：

$$\dot{b}_g = \frac{\Delta b_g}{\Delta t} = \frac{\bar{b}_g(t_{N+1}) - \bar{b}_g(t_N)}{\Delta t} \quad (4.3.10a)$$

$$\dot{a} = \frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{\bar{a}(t_{N+1}) - \bar{a}(t_N)}{\Delta t} \quad (4.3.10b)$$

将式 (4.3.10a)、(4.3.10b) 代入式 (4.3.9)，得：

$$H_{gL} \Delta b_g + H_{gn} \frac{\Delta b_g}{\Delta t} + f_{ga} + \Delta f_{g1} = 0 \quad (4.3.11)$$

记 $H_g = H_{gL} + \frac{H_{gn}}{\Delta t}$ ，有：

$$H_g \Delta b_g + f_{ga} + \Delta f_{g1} = 0 \quad (4.3.12)$$

4.4 液相渗流的有限元方程

根据液相渗流方程，其边值问题为：

$$\nabla \cdot \left(\frac{K_l}{\mu_l} \nabla P_l \right) - \dot{\theta}_s = 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \quad (4.4.1)$$

边界条件存在两种边界：

(I) 在边界 Γ_1 上给定液体的流量，即：

$$\bar{B} = V_l - q_0 = 0 \quad \text{在边界 } \Gamma_1 \text{ 上}$$

也就是：

$$-n^T \frac{K_r}{\mu_l} \nabla P_l - q_{l0} = 0 \quad (4.4.2)$$

其中, n 为边界表面的外法向单位矢量, q_0 为通过边界表面的单位面积的外流速率。

(II) 在边界 Γ_2 上给定液体的压力值:

$$P_l = P_l^b \quad (4.4.3)$$

利用伽辽金法得到与液相渗流控制方程 (4.4.1) 及边条件 (4.4.2) 和 (4.4.3) 等价积分形式为:

$$\int_{\Omega} N^T \left[\nabla \cdot \left(\frac{K_r}{\mu_l} \nabla P_l \right) - \dot{\theta}_s \right] d\Omega + \int_{\Gamma_2} \bar{N}^T (P_l - P_l^b) d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{N}^T (V_{lc} - q_{l0}) d\Gamma = 0 \quad (4.4.4)$$

对于 Γ_2 上的边界条件在选择 P_l 的近似函数时得到满足, 则上式可不出现 Γ_2 上的积分。具体有限元实现时, 通过求解前强行引入条件 (4.4.3) 来实现。

对方程 (4.4.4) 作变换 (分部积分) 得到:

$$\int_{\Omega} \nabla N^T \frac{K_r}{\mu_l} \nabla P_l d\Omega + \int_{\Omega} N^T \dot{\theta}_s d\Omega + \int_{\Gamma_1} N^T q_{l0} d\Gamma = 0 \quad (4.4.5)$$

采用与前面固相有限元法中相同的网格和插值函数, 有:

$$\left. \begin{aligned} u &= N a_e, \bar{u} = N \bar{a} \\ \Delta u &= \sum_1^n N_i u_i^k, \Delta u = N \Delta a \\ P_l &= \sum_1^n \bar{N}_i P_{li}, P_l = \bar{N} b_l \\ \bar{P}_l &= \sum_1^n \bar{N}_i \bar{P}_{li}, \bar{P}_l = \bar{N} \bar{b}_l \\ \Delta P_l &= \sum_1^n \bar{N}_i \Delta P_{li}, \Delta P_l = \bar{N} \Delta b_l \end{aligned} \right\} \quad (4.4.6)$$

对于典型增量步 $[t_N, t_{N+1}]$, 有:

$$\begin{aligned} \bar{P}_g(t_{N+1}) &= P_g(t_N) + \Delta P_g \\ \bar{b}_g(t_{N+1}) &= b_g(t_N) + \Delta b_g \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

将方程 (4.4.5) 变成:

$$\int_V \nabla \bar{N}^T \frac{K_L}{\mu_l} \nabla \bar{N} dV + \int_V \bar{N}^T m^T B_L \dot{\Delta a} dV + \int_{\Gamma_1} \bar{N}^T q_{l0} d\Gamma = 0 \quad (4.4.8)$$

将 (4.4.7) 代入 (4.4.8), 有:

$$H_{ll} \Delta b_l + f_{la} + \Delta f_{l1} = 0 \quad (4.4.9)$$

其中:

$$H_{ll} = \int_V \nabla \bar{N}^T \frac{K_L}{\mu_l} \nabla \bar{N} dV$$

$$f_{la} = \int_V \bar{N}^T m B_L \dot{\Delta a}_l dV$$

$$\Delta f_{l1} = H_{ll} b_l(t_N) + \int_{\Gamma_1} \bar{N}^T q_{l0} d\Gamma$$

式 (4.4.6) 即为液相渗流方程增量形式的有限元公式。

对时间域的离散采用差分形式:

$$\dot{b}_l = \frac{\Delta b_l}{\Delta t} = \frac{b_l(t_{N+1}) - b_l(t_N)}{\Delta t}, \quad (4.4.10a)$$

$$\dot{a} = \frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{\bar{a}(t_{N+1}) - \bar{a}(t_N)}{\Delta t} \quad (4.4.10b)$$

将式 (4.4.10a)、(4.4.10b) 代入式 (4.4.9), 得:

$$H_{ll} \Delta b_l + H_{ln} \frac{\Delta b_l}{\Delta t} + f_{la} + \Delta f_{l1} = 0 \quad (4.4.11)$$

记 $H_l = H_{ll} + \frac{H_{ln}}{\Delta t}$, 有:

$$H_l \Delta b_l + f_{la} + \Delta f_{l1} = 0 \quad (4.4.12)$$

4.5 固流耦合问题的数值解

综合 (4.2) ~ (4.4) 中的方程, 可以得到典型增量步 $[t_N, t_{N+1}]$ 内, 固—液—气三相介质耦合作用时, 增量有限元方程:

$$(K_L + K_S)\Delta a + R_s + R_o - R_p = 0 \quad (4.5.1)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} K_L &= \int_V (B_{L0}^T + B_{L1}^T) D_T (B_{L0} + B_{L1}) dV \\ K_s &= \int_V G^T M G dV \\ R_p &= \int_V (B_{L0}^T + B_{L1}^T) m(\bar{N}\bar{b}) dV \\ R_o &= \int_V N^T \rho \bar{f} dV + \int_S N^T \bar{t} dS \\ R_s &= \int_V (B_{L0}^T + B_{L1}^T) S_e dV \end{aligned} \right\} \quad (4.5.2)$$

$$(H_{gg} + \frac{H_{gn}}{\Delta t})\Delta b_g + f_{ga} + \Delta f_{g1} = 0 \quad (4.5.3)$$

$$\left. \begin{aligned} H_{gg} &= \int_V \bar{N}^T \frac{K_g}{\mu_g} \nabla \bar{N} dV \\ H_{gn} &= \int_V \bar{N}^T F[\bar{N}\bar{b}_g(t_{N+1})] \bar{N} dV \\ f_{ga} &= \int_V \bar{N}^T m B_L \dot{\Delta a}_g dV \\ \Delta f_{g1} &= H_{gl} b_g(t_N) + \int_{\Gamma_V} \bar{N}^T q_0 d\Gamma \end{aligned} \right\} \quad (4.5.4)$$

$$H_{ll}\Delta b_l + f_{la} + \Delta f_{l1} = 0 \quad (4.5.5)$$

$$\left. \begin{aligned} H_{ll} &= \int_V \bar{N}^T \frac{K_l}{\mu_l} \nabla \bar{N} dV \\ f_{la} &= \int_V \bar{N}^T m B_L \dot{\Delta a}_l dV \\ \Delta f_{l1} &= H_{ll} b_l(t_N) + \int_{\Gamma_l} \bar{N}^T q_{l0} d\Gamma \end{aligned} \right\} \quad (4.5.6)$$

$$P = S_l P_l + S_g P_g \quad (4.5.7)$$

$$S_g + S_l = 1 \quad (4.5.8)$$

式中, Δa 为结点位移增量列向量;

Δb_g 为结点气相压力增量列向量;

Δb_l 为结点液相压力增量列向量;

K_L 为固相的刚度矩阵，由有限应变中的线性项引起；

K_S 为固相的几何刚度矩阵，由有限应变中的几何非线性项引起；

H_{gg} 为由气相渗流引起的矩阵；

H_{gm} 为由气相压缩性引起的矩阵；

R_S 为 t_N 时刻应力引起的等效节点力列向量；

R_0 为 t_{N+1} 时刻载荷的等效节点力列向量；

R_P 为 t_N 时刻气相压力引起的等效节点力列向量；

f_{ga} 为由固相对气相的作用引起的节点压力列向量；

f_{g1} 为初始气相压力引起的节点气相压力列向量；

H_{LL} 为由液相渗流引起的矩阵；

f_{la} 为由固相对液相的作用引起的节点压力列向量；

f_{l1} 为初始液相压力引起的节点液相压力列向量。

式(4.5.1)～(4.5.8)构成了固—液—气三相介质耦合问题的有限元方程。从中可以看出，固—液—气相互作用在方程中表现为：(1)气相压力、液相压力对固相位移有影响；(2)固相位移对气相渗流压力场和液相渗流压力场有影响。

第5章 固-液耦合渗透固结问题的数值模拟

5.1 固-液两相介质耦合渗透固结问题的有限变形程序

5.1.1 程序概述

本章以第四章讨论的非线性有限元法及建立的基本方程组为基础, 采用有限元自动生成系统 IFEPG 形成了固-液两相介质耦合渗透固结问题的平面和空间非线性有限变形有限元程序, 该程序包括大变形和小变形两种情况。用该程序对典型固结问题进行了数值计算, 包括压力场、位移场、应力场。本文采用增量法可以计算固-液两相介质耦合作用, 在每一时间增量步的应力场、位移场和压力场。由于以前大多数学者采用的都是半耦合法, 有一定的缺陷性, 本文采用了全耦合法计算程序。

5.1.2 固-液耦合问题的计算框图

根据第四章给出的固-液-气三相介质耦合问题的有限元方程:

$$(K_L + K_S)\Delta a + R_s + R_0 - R_p = 0 \quad (5.1.1)$$

$$K_L = \int (B_{L0}^T + B_{L1}^T) D_T (B_{L0} + B_{L1}) dV$$

$$K_s = \int G^T M G dV$$

$$R_p = \int (B_{L0}^T + B_{L1}^T) m(\bar{N}b) dV$$

$$R_0 = \int N^T \rho \bar{f} dV + \int N^T \bar{t} dS$$

$$R_s = \int (B_{L0}^T + B_{L1}^T) S_e dV$$

$$H_{ll} \Delta b_l + f_{la} + \Delta f_{ll} = 0 \quad (5.1.2)$$

$$H_{ll} = \int_V \nabla \bar{N}^T \frac{K_b}{\mu_l} \nabla \bar{N} dV$$

$$f_{la} = \int_V \bar{N}^T m B_L \dot{\Delta a}_l dV$$

对上述方程进行耦合求解, 可以获得耦合问题的位移场和压力场, 然后根据位移场和压力场获得问题的应力场和渗流场。固-液两相介质耦合法如图 5.1 所示。

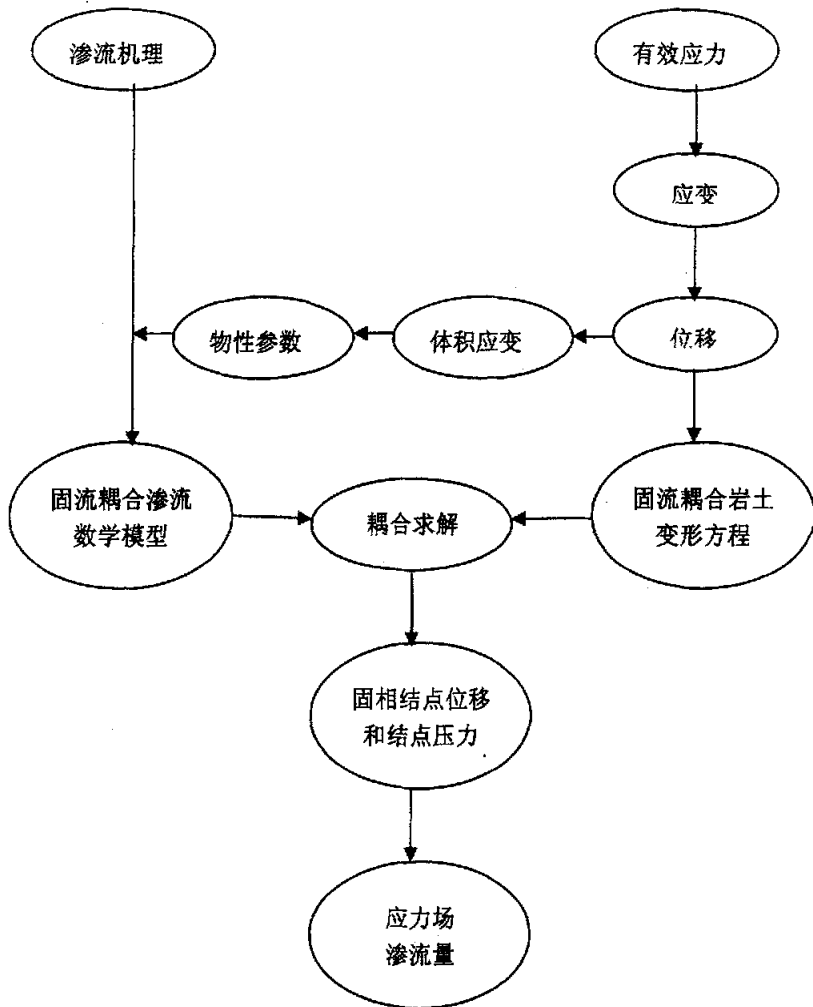


图 5.1 固—液两相介质耦合问题求解示意图

5.2 固—液耦合渗透固结问题的数值模拟

在前面各章已经对土层固流耦合渗流的基本理论和方法作了论述，这一节里将针对土体固结的实例进行数值计算，由此验证固流耦合渗透固结模型的有效性。

模型一. 一粘性土层，上部是渗透性边界，其余均为刚性不透水边界。一个大小为 10kPa 的均布荷载作用在上表面，土层长度为 48m，厚度为 16m。假设两侧和底部位移固定，土体被认为是线弹性体。土体参数为：渗透系数 $k_x = k_y = 1.782 \times 10^{-3} m/d$ ，泊

松比 $\mu = 0.3$ ，变形模量 $E=40000\text{kPa}$ 。如图 5.2 所示。

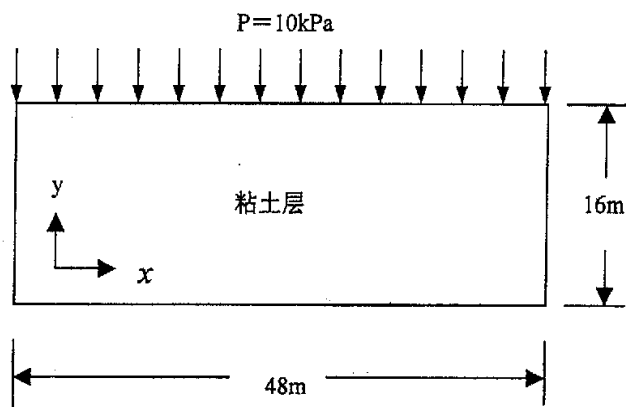


图 5.2 平面应变固结问题

把模型进行离散化，共划分为 64 个单元。由于对于本问题的分析，可以选用四结点等参元，也可以选用八结点等参元。为了比较精确性，这里分别采用了四结点和八结点等参元，并对它们相同的结点做了比较，但模型划分的单元总数保持不变。计算中所选用的结点数据如表 5-1 和表 5-2 所示。

表 5-1 选取的几个特定点位置(4 结点等参元)

点号	坐标	点号	坐标
36	(24, 0)	45	(24, 16)
41	(24, 8)	54	(30, 16)
42	(24, 10)	72	(42, 16)

表 5-2 选取的几个特定点位置(8 结点等参元)

点号	坐标	点号	坐标
101	(24, 0)	127	(24, 16)
112	(24, 8)	152	(30, 16)
114	(24, 10)	199	(42, 16)

模型二. 一假定软土地基，地基上部为渗透性边界，其余为刚性不渗透性边界。长度为

120 米，厚度为 15 米，在中心两侧各 21 米范围内受到均布压力 P 的作用。该地基的力学模型可简化如下：

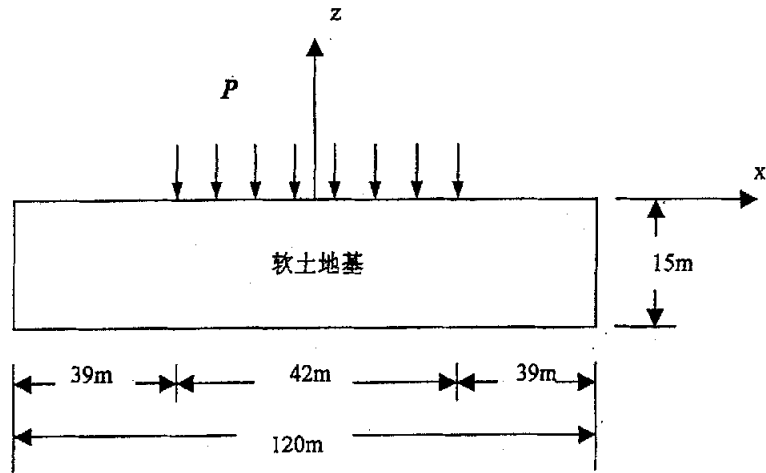


图 5.3 软土地基固结示意图

计算中根据荷载、土性参数和厚度的不同选择了 6 个算例，固结时间取为 750 天，采用了线弹性本构关系。此外，为了便于分析，假定土体渗透性在固结过程中不发生任何变化。有限元计算中采用的参数如表 5-3 所示。

表 5-3 有限元计算参数

序号	土层厚度 H (m)	荷载 P (kPa)	泊松比 μ	土层变形模 量 E (kPa)	渗透系数 K (m/d)
1	15	10	0.3	500	0.000216
2	15	50	0.3	500	0.000216
3	15	50	0.2	500	0.000216
4	15	50	0.3	500	0.000864
5	15	50	0.3	1200	0.000216
6	30	50	0.3	1200	0.000216

考虑到所选用的地基刚性较大，可以认为其不产生变形，因而，土体在垂直于 xz 平面的方向上不产生变形，则该问题也成为平面应变问题，孔隙水的渗流也成为 xz 平面的渗流。

位移场边界条件为:

$$u_x = 0, u_z = 0, x = \pm 60m, z = -15m$$

渗流场边界条件为:

$$p = 0, x = \pm 60m, z = -15m$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0, z = 0m$$

初始边界条件为:

$$p = p_0, t = 0$$

$$u_x = u_z = 0, t = 0$$

把模型进行有限元离散, 共划分为 200 个单元, 246 个结点。当土层厚度增加一倍, 即厚度为 30m 时, 仍采用 200 个单元和 246 个结点。计算中所选用的结点数据如表 5-4 和表 5-5 所示。

表 5-4 所选用的结点位置(土层厚度为 15m)

结点号	坐标	结点号	坐标	结点号	坐标
47	(36, 0)	121	(0, 0)	124	(0, -9)
79	(21, 0)	123	(0, -6)	126	(0, -15)
97	(12, 0)				

表 5-5 所选用的结点位置(土层厚度为 30m)

结点号	坐标	结点号	坐标	结点号	坐标
30	(36, 0)	118	(0, 0)	123	(0, -18)
72	(21, 0)	120	(0, -12)	132	(0, -30)
91	(12, 0)				

5.3 计算结果的分析

计算结果的分析及比较主要包括垂直沉降、水平位移、孔隙水压力及不同受力情

况下应力的变化情况及其分布。本文的主要目的是分析大变形的有限元计算与小变形的有限元计算结果的差别，以及不同的参数对它们差别的影响程度，另外，本文还考虑了两种不同受力情况下应力分布及其变化的差别。

5.3.1 计算模型一的结果分析

(1) 总体分析 当粘性土层上表面都受到均布压力作用时，由于所受荷载是对称分布的，并且土层所受的边界条件也是对称的，这样，土层的孔隙水压力、水平位移、垂直沉降和应力都呈对称变化分布趋势。荷载水平较低，大小变形得出的结果差别不大。

(2) 固结时间 当粘性土层上表面都受到均布压力作用时，由于所受荷载水平较低，弹性模量较大，渗透系数大，固结时间比较短，第7天已经基本稳定下来。

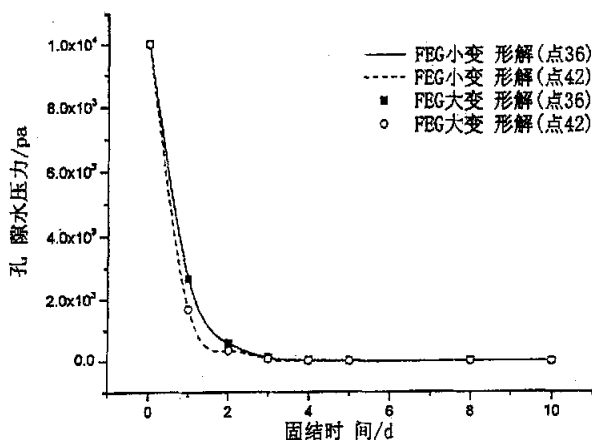


图 5-1 (1) 孔隙水压力随固结时间变化分布曲线

(3) 孔隙水压力 图 5-1 (1) 表明，孔隙水压力的总体变化情况是随着固结时间而逐渐减小，孔隙压力消散的程度越快。当固结时间达到 7 天时，孔隙压力已经基本上消散完毕。在同一时刻，随着深度的增加，孔隙压力越来越大。由于所受荷载水平较低，大变形和小变形的孔隙水压力随着时间变化基本上没有什么差别，只是在土层下部不排水面上，大变形和小变形的孔隙水压力有一点差异，但最终基本上都消散完毕。

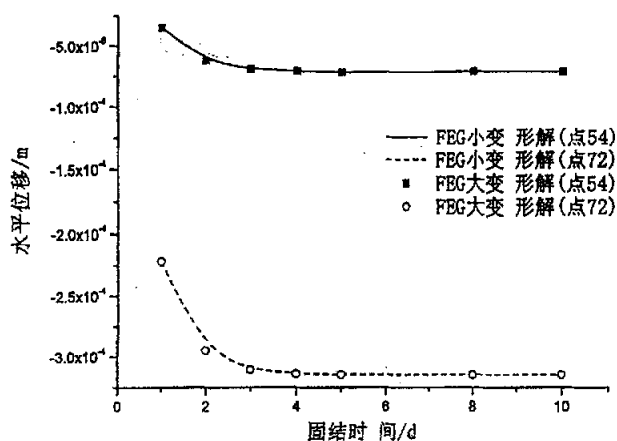


图 5-1 (2) 水平位移随固结时间变化分布曲线

(4) 水平位移 图 5-1 (2) 表明, 水平位移总体变化情况是随着固结时间而呈逐渐递减的趋势, 并且在同一时刻, 随着水平距离的增加水平位移逐渐增大。由于所受荷载水平较低, 大变形和小变形的水平位移随着时间变化基本上没有什么差别。大变形比小变形计算的最终水平位移只增加 0.16%, 小于 5% 可以忽略不计, 认为用小变形就可以达到理想的结果。

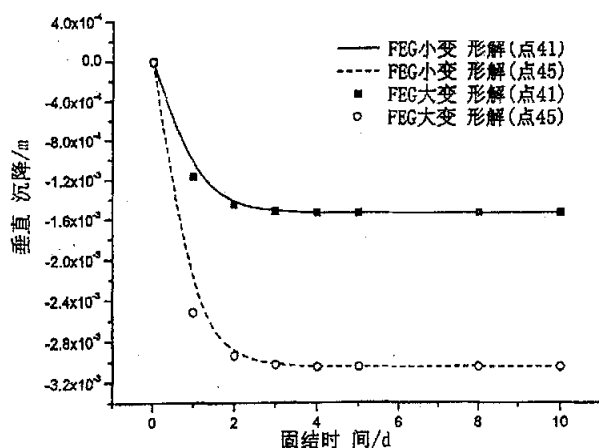


图 5-1 (3) 垂直沉降随固结时间变化分布曲线

(5) 垂直沉降 图 5-1 (3) 表明, 垂直沉降随着固结时间呈逐渐增加的趋势, 并且随着深度的增大而逐渐减小。由于所受荷载水平较低, 大变形和小变形的垂直沉降随着时间变化基本上没有什么差别。大变形比小变形计算出的中心点的最终垂直沉降只增加 2.9%, 在不大于 5% 的情况下, 这种差别可以不考虑, 认为小变形计算的结果可以满足工程要求。

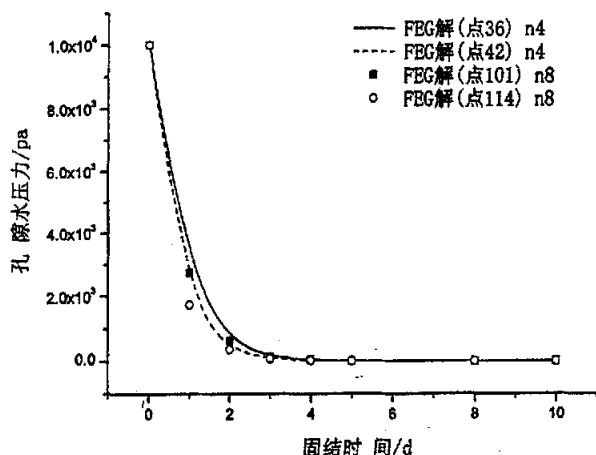


图 5-2 (1) 孔隙水压力随固结时间变化分布曲线

(6) 4 结点和 8 结点等参元计算结果的比较

由图 5-2 的曲线可以看出, 不论采用 4 结点等参元或 8 结点等参元, 计算出的孔隙水压力、水平位移、垂直沉降差别都很小, 如计算出中心点的最终垂直沉降相差 0.31mm, 这种变化可以忽略, 认为两者基本趋于一致。由此说明, 在计算软土地基这种变化量不很大的模型中, 我们在有限元中采用 4 结点等参元结果是可靠的。

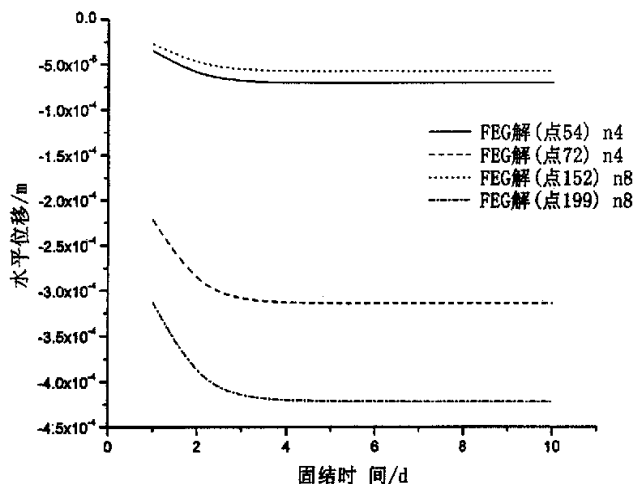


图 5-2 (2) 水平位移随固结时间变化分布曲线

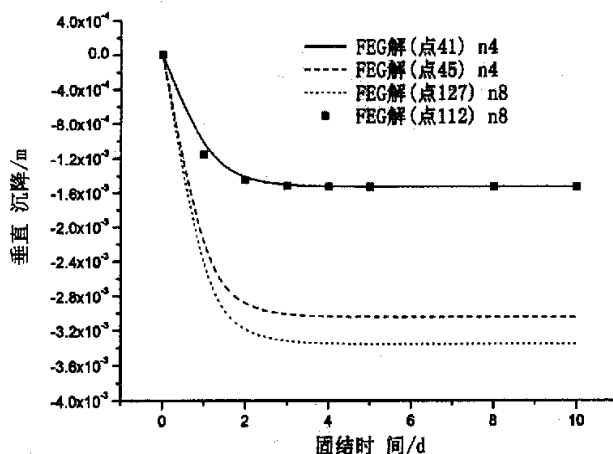


图 5-2 (3) 垂直沉降随固结时间变化分布曲线

(7) 应力分布 随着变形的增加, 应力逐渐增大, 随着固结时间变化, 应力的影响范围发生了变化, 如图 5-3 和图 5-4 应力变化云图所示。由于大变形的变形较小变形稍微大一些, 因此大变形的应力比小变形的稍大, 但不是很明显, 这种情况可以不予考虑, 认为小变形的结果是可靠的。在正应力变化图 5-3 (1-4) 和图 5-4 (1-4) 中可以看出, 在荷载作用边缘处, 出现局部应力集中, 且随着时间逐渐增大。剪应力成对

称分布，在两侧比较大，这主要是由于应力集中现象导致的，且随着固结时间影响区域逐渐加大。

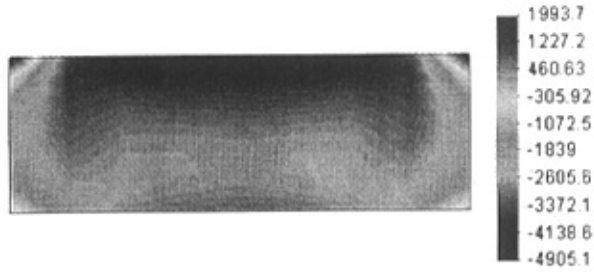


图 5-3 (1) 大变形正应力 σ_x 分布云图 (第 1 天) (M1)

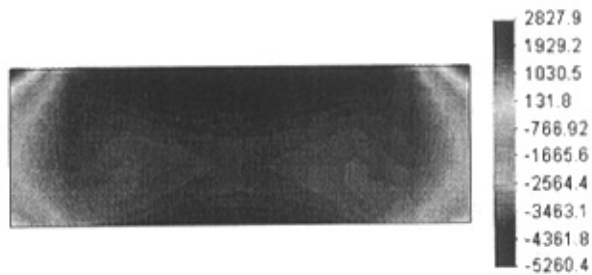


图 5-3 (2) 大变形正应力 σ_x 分布云图 (第 10 天) (M1)

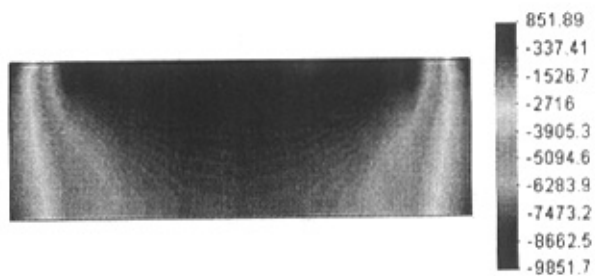


图 5-3 (3) 大变形正应力 σ_y 分布云图 (第 1 天) (M1)



图 5-3 (4) 大变形正应力 σ_y 分布云图 (第 10 天) (M1)

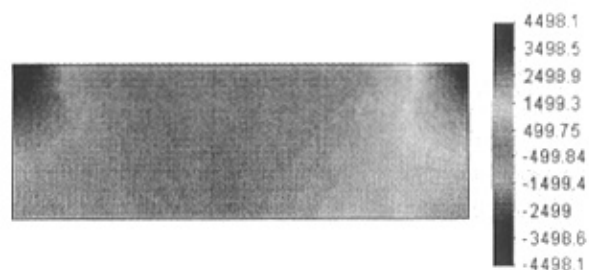


图 5-3 (5) 大变形剪应力 τ_{xy} 分布云图 (第 1 天) (M1)



图 5-3 (6) 大变形剪应力 τ_{xy} 分布云图 (第 10 天) (M1)

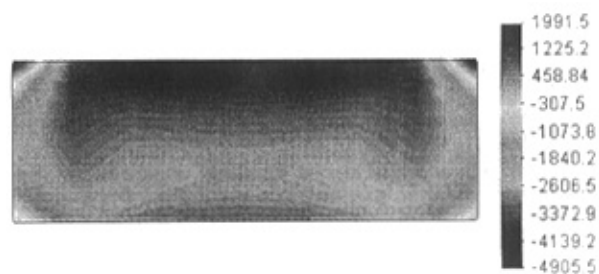


图 5-4 (1) 小变形正应力 σ_x 分布云图 (第 1 天) (M1)

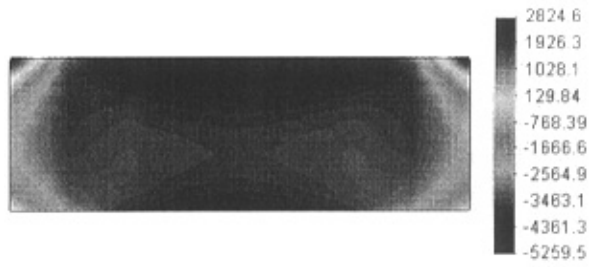


图 5-4 (2) 小变形正应力 σ_x 分布云图 (第 10 天) (M1)

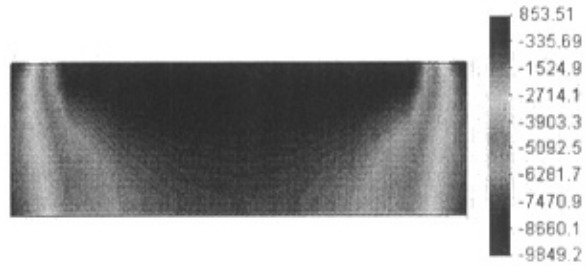


图 5-4 (3) 小变形正应力 σ_y 分布云图 (第 1 天) (M1)

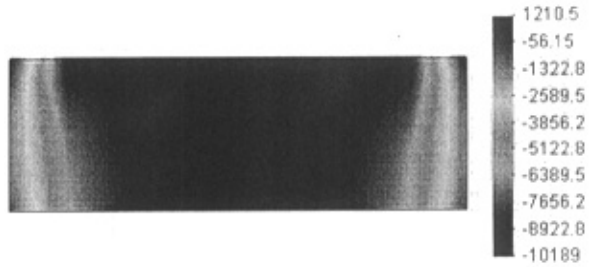


图 5-4 (4) 小变形正应力 σ_y 分布云图 (第 10 天) (M1)

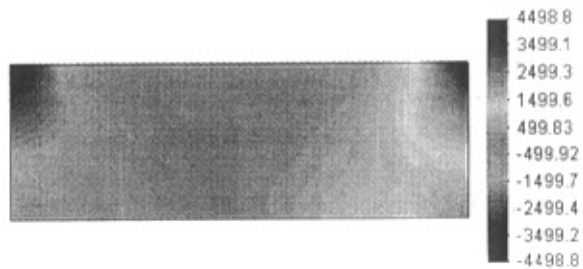


图 5-4 (5) 小变形剪应力 τ_{xy} 分布云图 (第 1 天) (M1)

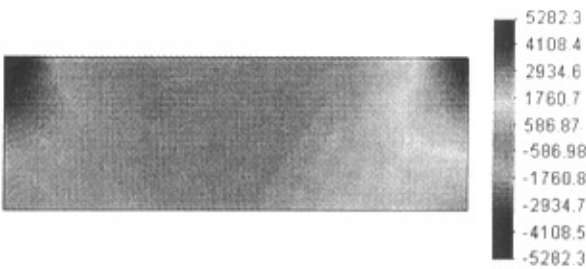


图 5-4 (6) 小变形剪应力 τ_{xy} 分布云图 (第 10 天) (M1)

5.3.2 模型二的结果分析

(1) 总体分析 当粘性土层上表面部分受到均布压力作用时, 由于所受荷载是对称分布的, 并且土层所受的边界条件也是对称的, 这样, 土层的孔隙水压力、水平位移、垂直沉降和应力都呈对称变化分布趋势。随着弹性模量和渗透系数的增加, 泊松比的增大, 大变形和小变形的计算结果差别逐渐减小。

(2) 固结时间 当粘性土层上表面部分受到均布压力作用时, 由于所受荷载水平不同, 土性参数 (弹性模量, 渗透系数) 的不同, 固结稳定时间也不一样, 当弹性模量、泊松比及渗透系数大时, 固结稳定时间就比较短。当荷载水平较高, 弹性模量及泊松比较小, 渗透系数不大时, 固结稳定时间就比较长。如图 5-5。

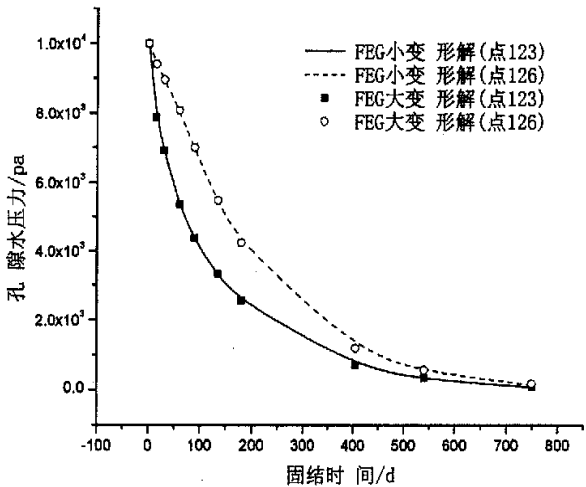


图 5-5 (1) 孔隙水压力随固结时间的变化分布曲线
($p=10\text{kPa}$, $E=500\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $\mu=0.3$, $H=15\text{m}$)

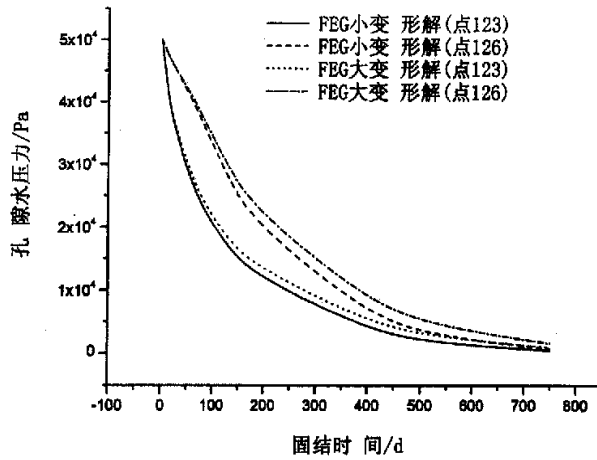


图 5-5 (2) 孔隙水压力随固结时间的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=500\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $\mu=0.3$, $H=15\text{m}$)

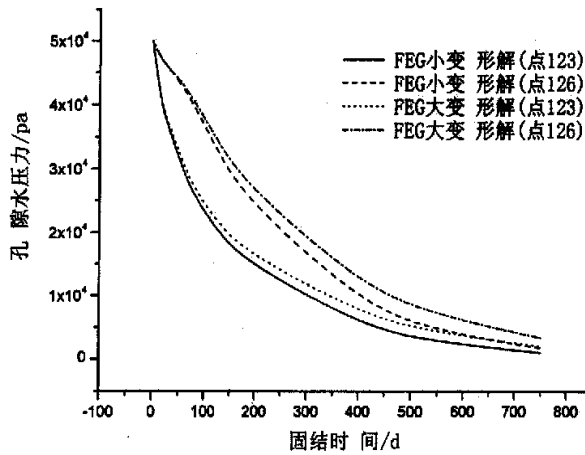


图 5-5 (3) 孔隙水压力随固结时间的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=500\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $\mu=0.2$, $H=15\text{m}$)

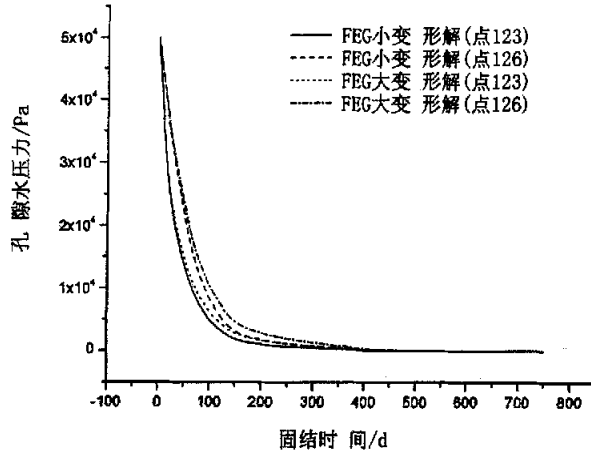


图 5-5 (4) 孔隙水压力随固结时间的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=500\text{kPa}$, $K=0.000864\text{m/d}$, $\mu=0.3$, $H=15\text{m}$)

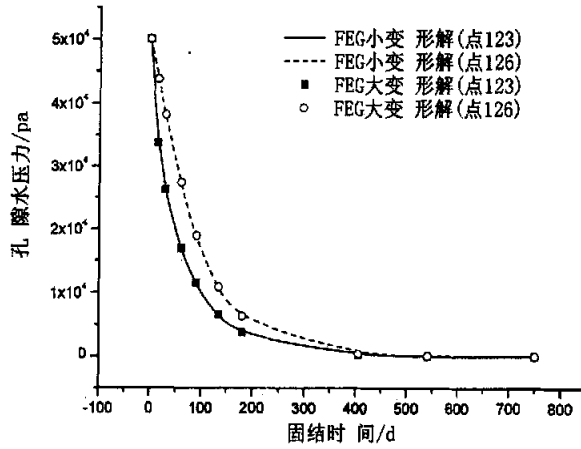


图 5-5 (5) 孔隙水压力随固结时间的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=1200\text{kPa}$, $K=0.000864\text{m/d}$, $\mu=0.3$, $H=15\text{m}$)

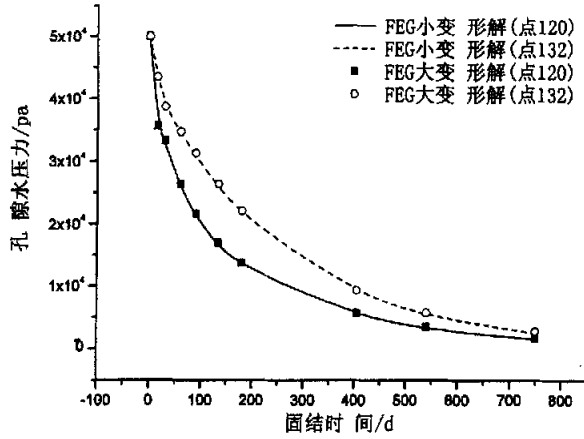


图 5-5 (6) 孔隙水压力随固结时间的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=1200\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $H=30\text{m}$)

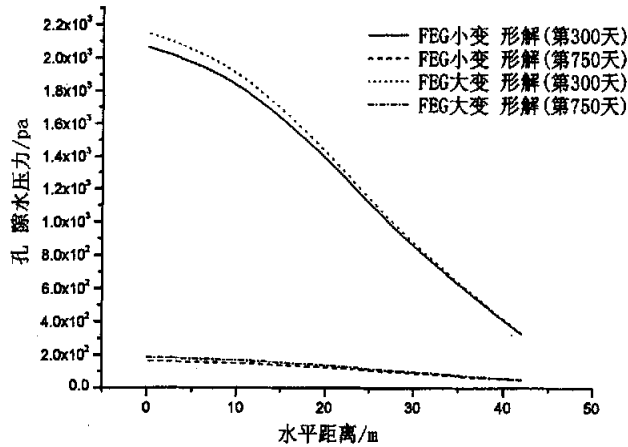


图 5-6 (1) 孔隙水压力随水平距离的变化分布曲线
($p=10\text{kPa}$, $E=500\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $\mu=0.3$, $H=15\text{m}$)

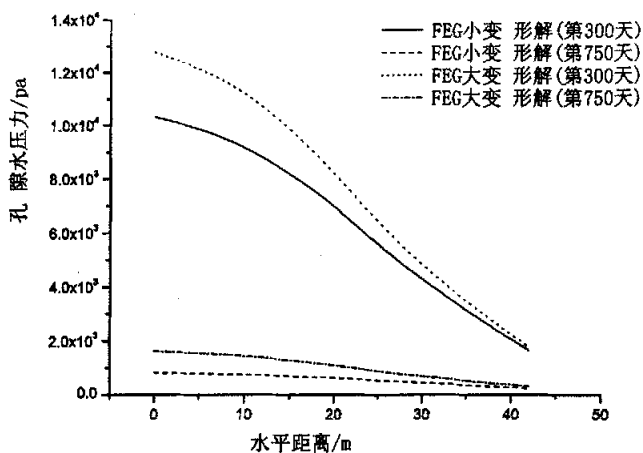


图 5-6 (2) 孔隙水压力随水平距离的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=500\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $\mu=0.3$, $H=15\text{m}$)

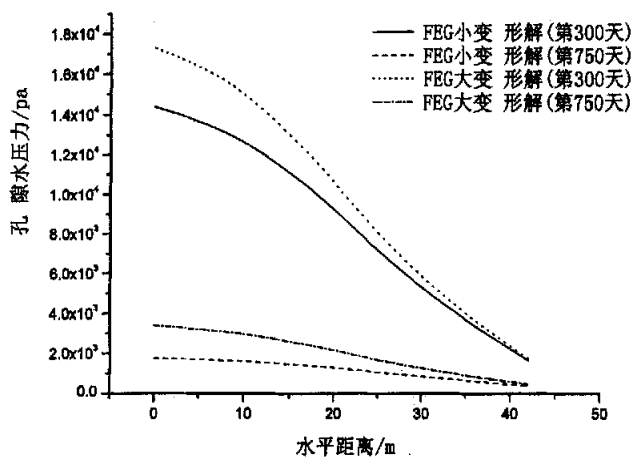


图 5-6 (3) 孔隙水压力随水平距离的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=500\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $\mu=0.2$, $H=15\text{m}$)

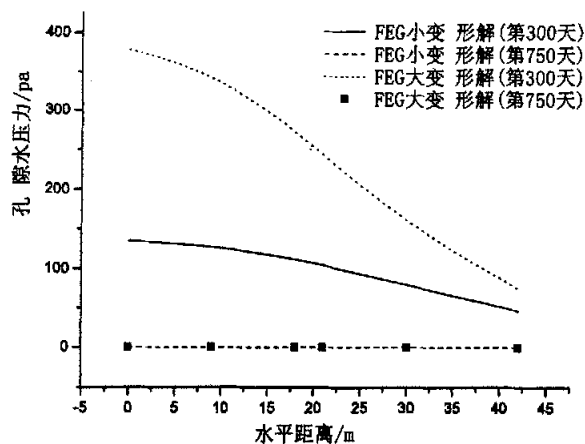


图 5-6 (4) 孔隙水压力随水平距离的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=500\text{kPa}$, $K=0.000864\text{m/d}$, $\mu=0.3$, $H=15\text{m}$)

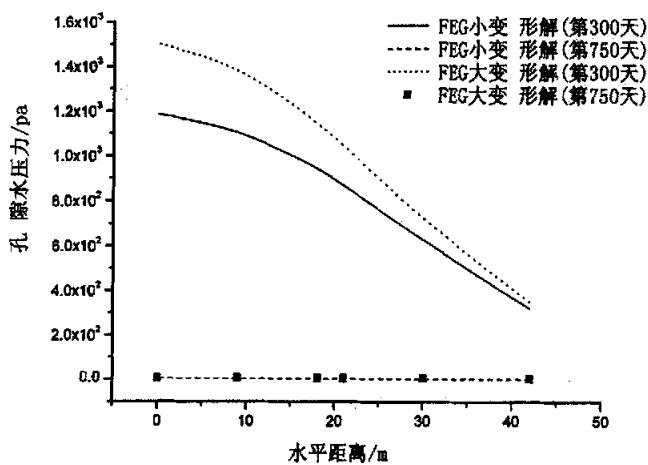


图 5-6 (5) 孔隙水压力随水平距离的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=1200\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $H=15\text{m}$)

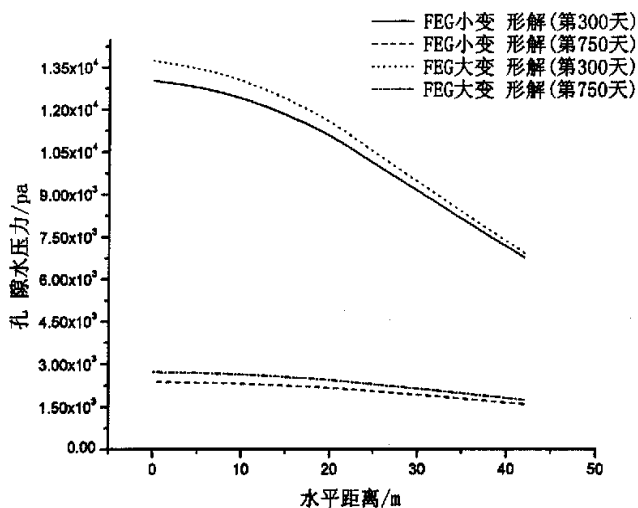


图 5-6 (6) 孔隙水压力随水平距离的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=1200\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $H=30\text{m}$)

(3) 孔隙水压力 图 5-5 表明, 随着固结时间孔隙压力逐渐消散, 随着深度增加, 孔隙水压力增大, 且大变形和小变形的结果差异也大, 特别是在底部不排水面上, 孔隙压力值最大, 大小变形的差别也大。在较低的荷载水平下, 大变形和小变形计算的孔隙压力差别很小, 在较高的荷载水平下, 土体产生较大的沉降变形时, 大变形计算的孔隙压力大于小变形计算的孔隙压力。从孔隙压力计算结果图 5-6 表明, 随着土体压缩模量、泊松比和渗透系数的增加, 大变形和小变形计算的孔隙压力逐渐趋于一直, 接近重合。在同一水平面上, 随着水平距离的增加, 孔隙水压力逐渐减小, 在地基中心线上孔隙压力比较大, 特别是在底部中心点处, 压力最大。当土层厚度较大时, 大变形和小变形计算的孔隙压力差别比同条件下的浅地基计算结果稍微大一些。对有限元的中间计算结果表明, 大变形和小变形计算出的初期孔隙压力差异较大, 后来逐渐减小, 这是由于在有限元计算中对孔隙水压力的计算采用和与位移计算相同的有限元插值模式所致的。由于所选用的土性参数不同, 固结时间达到 750 天时, 孔隙水压力消散程度不一样。

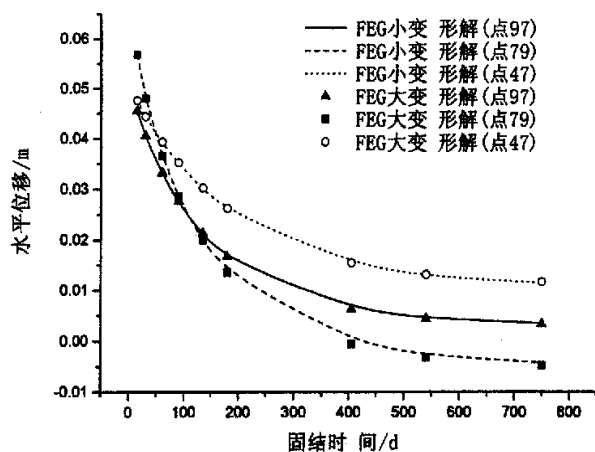


图 5-7 (1) 水平位移随固结时间的变化分布曲线
($p=10\text{kPa}$, $E=500\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $\mu=0.3$, $H=15\text{m}$)

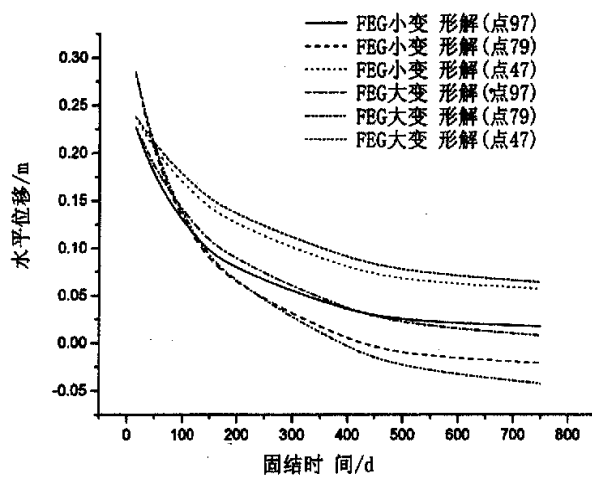


图 5-7 (2) 水平位移随固结时间的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=500\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $\mu=0.3$, $H=15\text{m}$)

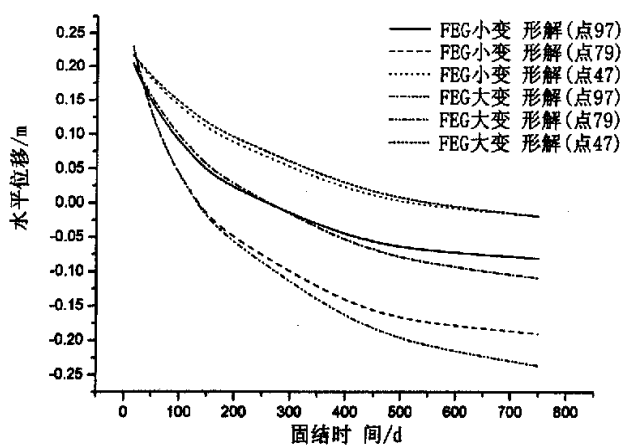


图 5-7 (3) 水平位移随固结时间的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=500\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $\mu=0.2$, $H=15\text{m}$)

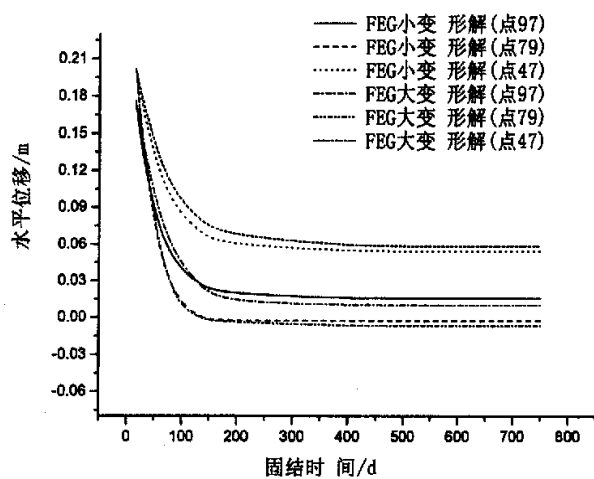


图 5-7 (4) 水平位移随固结时间的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=500\text{kPa}$, $K=0.000864\text{m/d}$, $\mu=0.3$, $H=15\text{m}$)

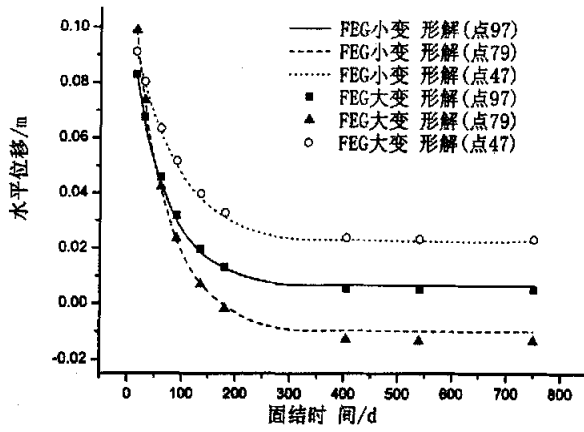


图 5-7 (5) 水平位移随固结时间的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=1200\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $H=15\text{m}$)

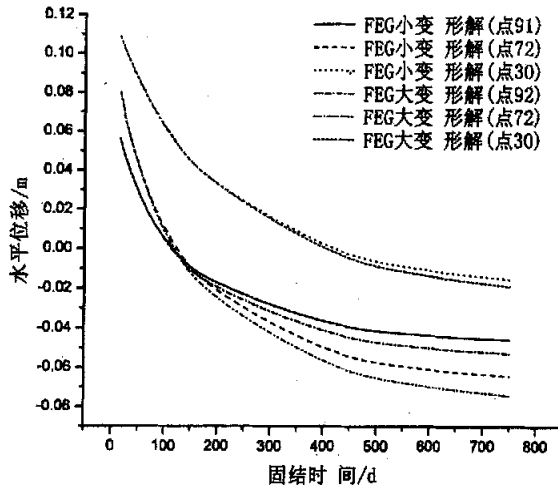


图 5-7 (6) 水平位移随固结时间的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=1200\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $H=30\text{m}$)

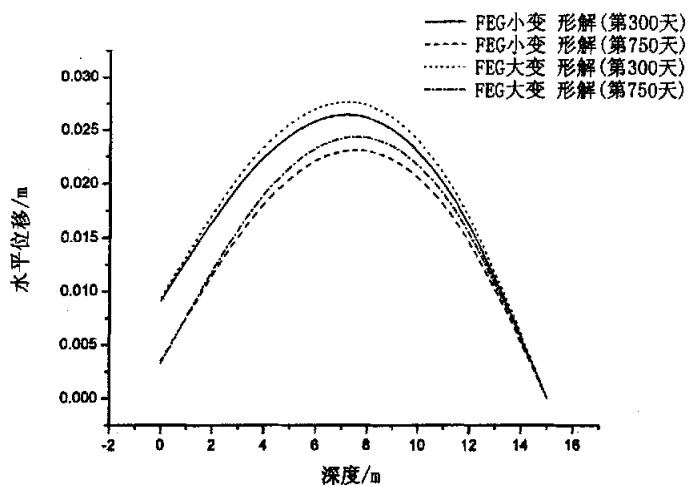


图 5-8 (1) 水平位移随深度的变化分布曲线
($p=10\text{kPa}$, $E=500\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $\mu=0.3$, $H=15\text{m}$)

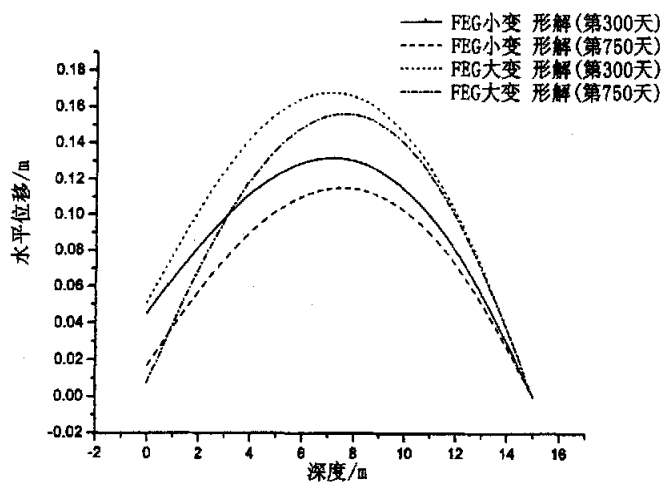


图 5-8 (2) 水平位移随深度的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=500\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $\mu=0.3$, $H=15\text{m}$)

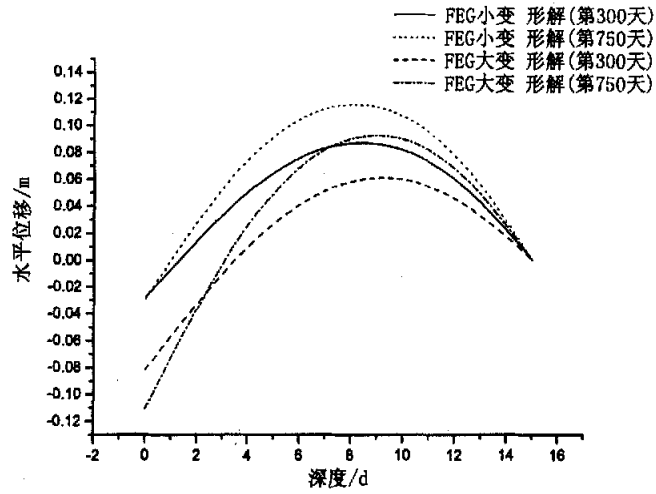


图 5-8 (3) 水平位移随深度的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=500\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $\mu=0.2$, $H=15\text{m}$)

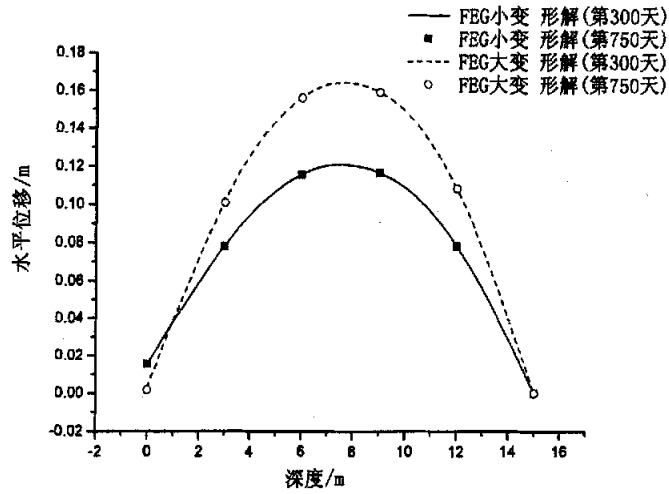


图 5-8 (4) 水平位移随深度的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=500\text{kPa}$, $K=0.000864\text{m/d}$, $\mu=0.3$, $H=15\text{m}$)

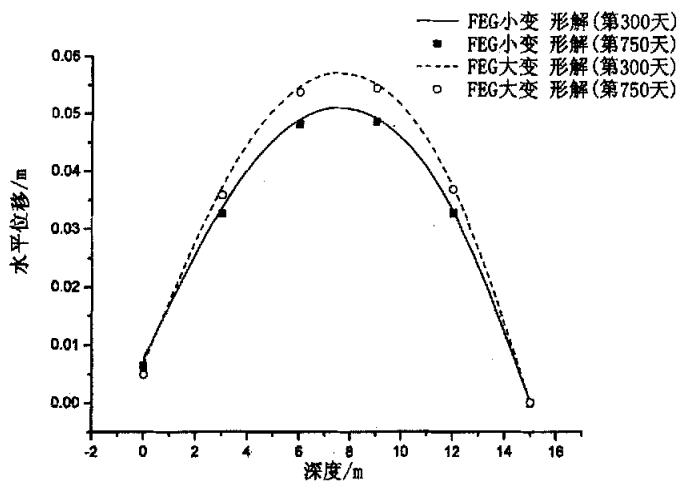


图 5-8 (5) 水平位移随深度的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=1200\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $H=15\text{m}$)

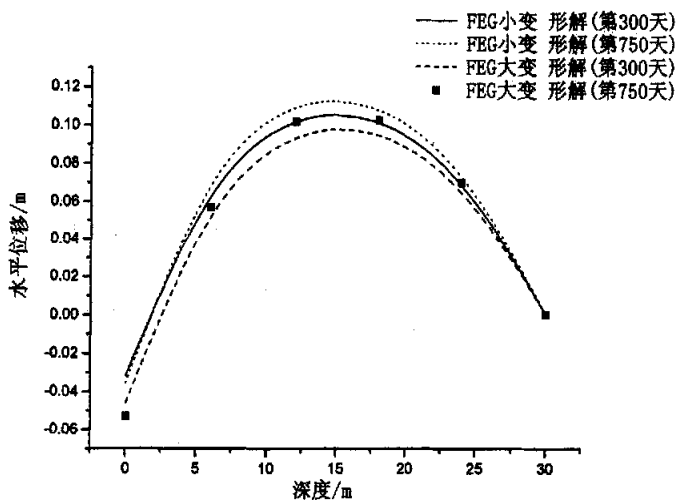


图 5-8 (6) 水平位移随深度的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=1200\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $H=30\text{m}$)

(4) 水平位移 对于土体表层, 图 5-7, 大变形和小变形得到的水平位移有相同的变化趋势, 都随着固结时间而逐渐减少, 它们得到的最大水平位移点都在靠近地基中心的地方, 且变化明显。通过对大变形和小变形的计算表明, 当土层所受荷载较高且渗透性较好时, 在水平距离 21m 处, 水平位移有向地基中心收缩的趋势。由图 5-8 的变化曲线, 在深度方向上, 大变形和小变形得到的水平位移是先随着深度逐渐增加, 在 7m 左右达到最大 (对于厚度为 30m 的土层, 在 15m 左右达到最大), 而后又随着深度逐渐减小。大变形和小变形计算的最大水平位移, 在土体变形模量、泊松比和渗透系数较小时, 差别比较明显, 当土体变形模量为 1200kPa 或者渗透系数为 0.000864m/d 时, 图 5-8 (5) 和图 5-8 (4), 两者的差别就很小了。

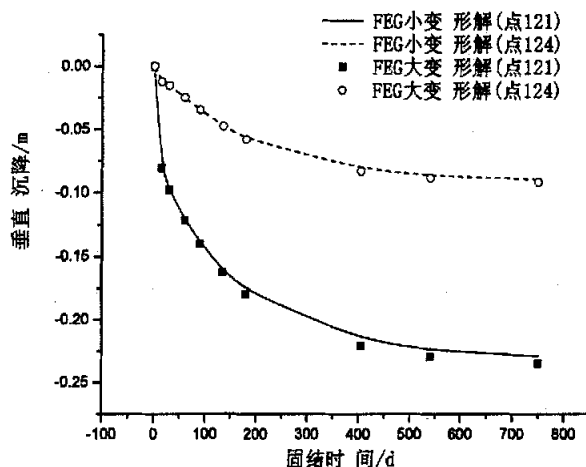


图 5-9 (1) 垂直沉降随固结时间的变化分布曲线
($p=10\text{kPa}$, $E=500\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $\mu=0.3$, $H=15\text{m}$)

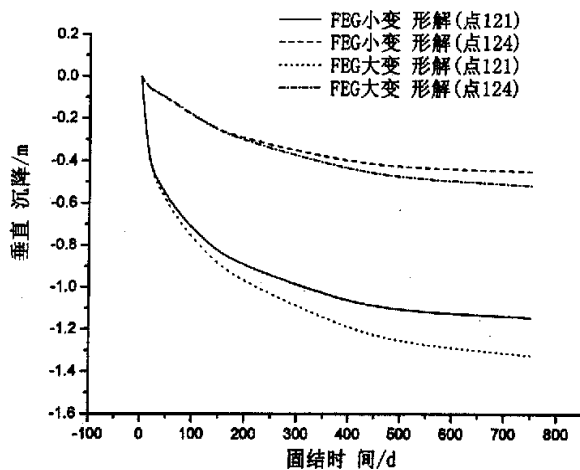


图 5-9 (2) 垂直沉降随固结时间的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=500\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $\mu=0.3$, $H=15\text{m}$)

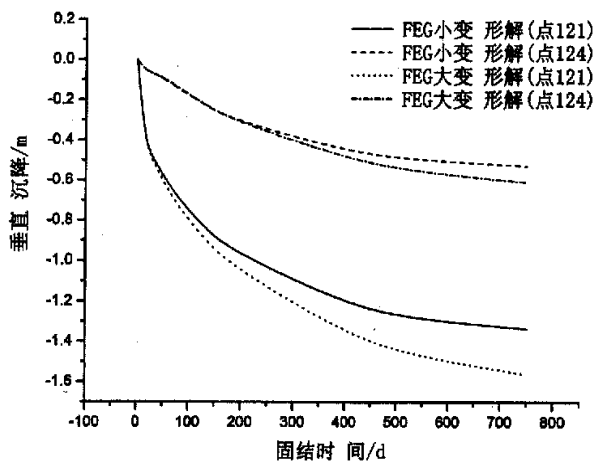


图 5-9 (3) 垂直沉降随固结时间的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=500\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $\mu=0.2$, $H=15\text{m}$)

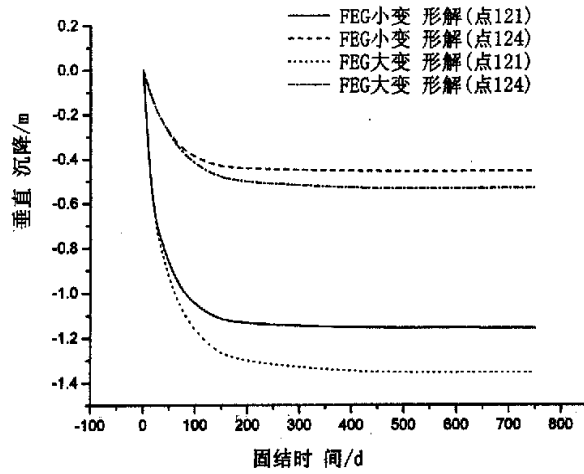


图 5-9 (4) 垂直沉降随固结时间的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=500\text{kPa}$, $K=0.000864\text{m/d}$, $\mu=0.3$, $H=15\text{m}$)

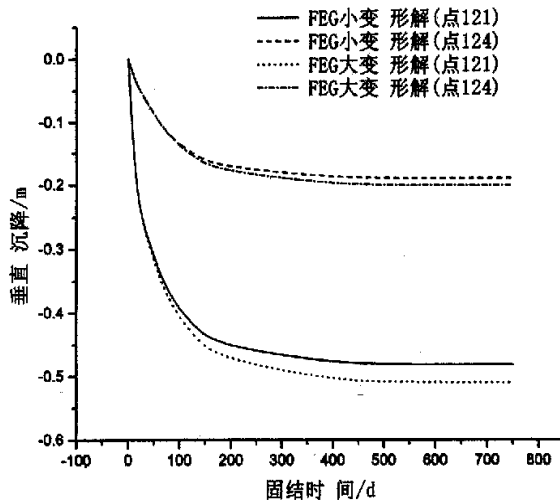


图 5-9 (5) 垂直沉降随固结时间的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=1200\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $H=15\text{m}$)

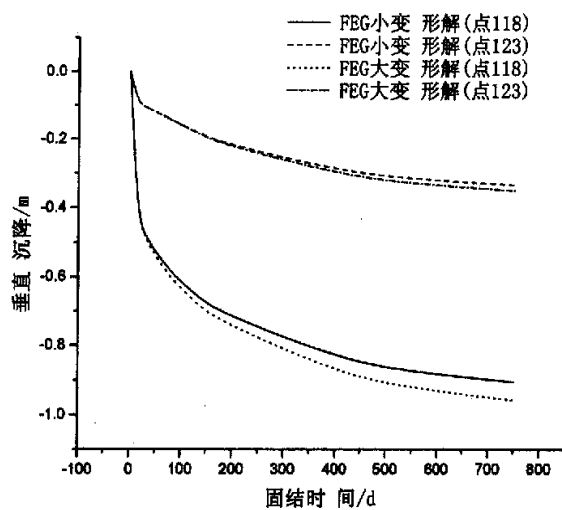


图 5-9 (6) 垂直沉降随固结时间的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=1200\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $H=30\text{m}$)

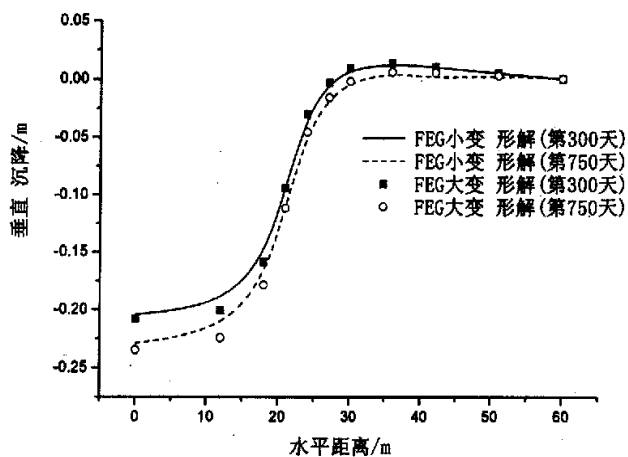


图 5-10 (1) 垂直沉降随水平距离的变化分布曲线
($p=10\text{kPa}$, $E=500\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $\mu=0.3$, $H=15\text{m}$)

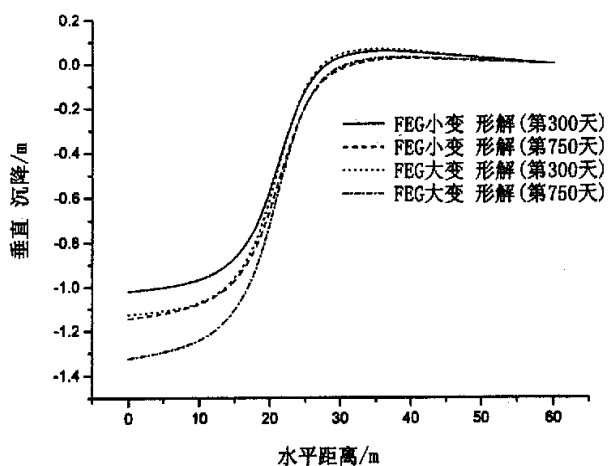


图 5-10 (2) 垂直沉降随水平距离的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=500\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $\mu=0.3$, $H=15\text{m}$)

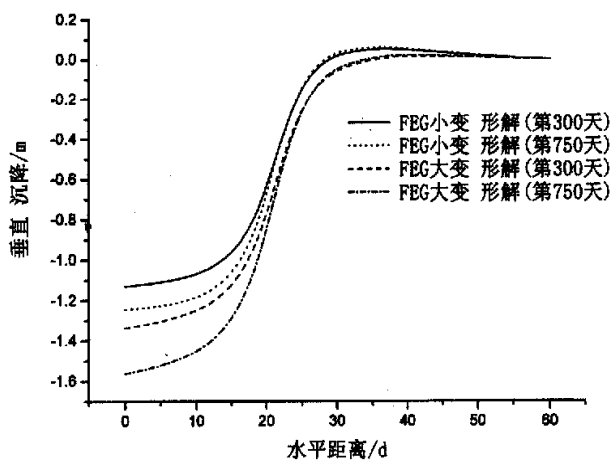


图 5-10 (3) 垂直沉降随水平距离的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=500\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $\mu=0.2$, $H=15\text{m}$)

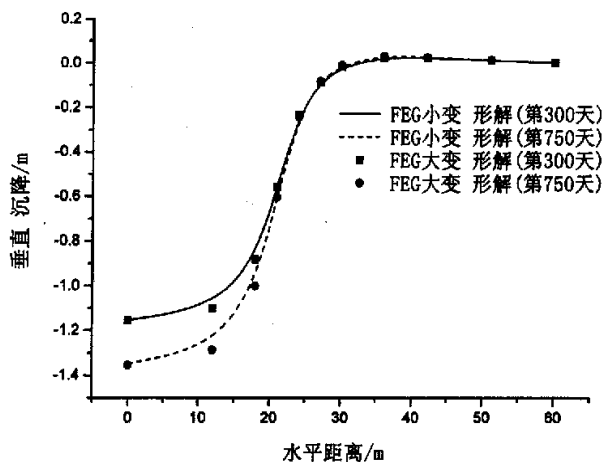


图 5-10 (4) 垂直沉降随水平距离的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=500\text{kPa}$, $K=0.000864\text{m/d}$, $\mu=0.3$, $H=15\text{m}$)

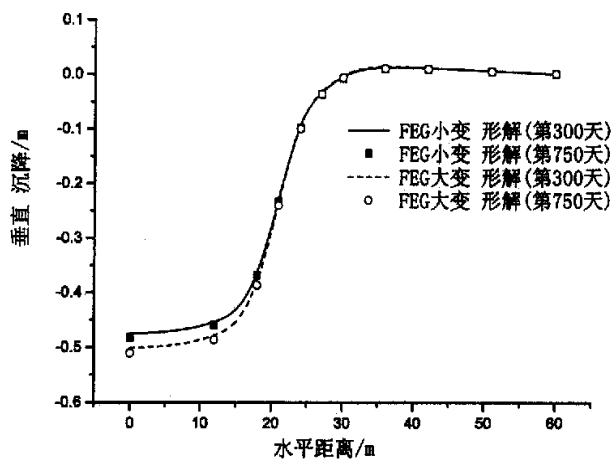


图 5-10 (5) 垂直沉降随水平距离的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=1200\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $H=15\text{m}$)

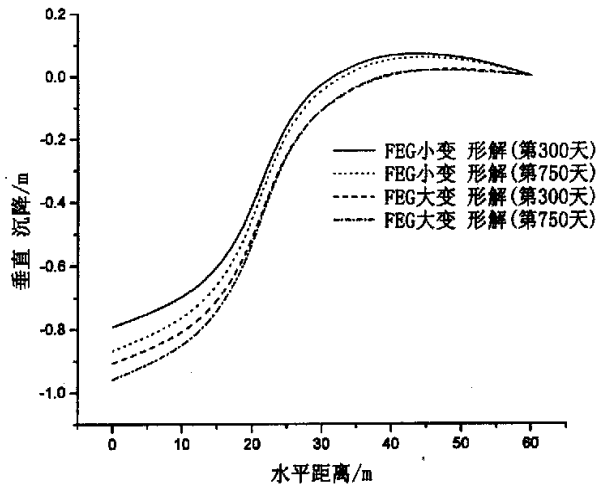


图 5-10 (6) 垂直沉降随水平距离的变化分布曲线
($p=50\text{kPa}$, $E=1200\text{kPa}$, $K=0.000216\text{m/d}$, $H=30\text{m}$)

(5) 垂直沉降 当荷载水平较低, 土层不太厚时, 大变形和小变形分析的结果差别很小, 但是大变形的结果稍微大一点, 如图 5-9 (1) 的曲线, 大变形比小变形得出的地基中心点最终垂直沉降增加了 2.5%。由此可以看出, 对于荷载水平较低, 土层不太厚的软土层, 我们可以用小变形来对土层变形情况进行分析, 它的计算结果是可靠的。当荷载水平较高时, 大变形和小变形的计算结果就出现较大差异, 大变形的结果要大于小变形的计算结果, 如图 5-9 (2) 的曲线, 大变形比小变形得出的地基中心点最终垂直沉降增大 13.5%, 但随着深度和固结时间的增加, 其差别越来越小, 这种情况下就必须采用大变形理论来进行计算才能得到精确的结果。当土层厚度增加到 30m 时, 大变形和小变形的结果差异增大, 这说明对于厚土层, 当荷载水平比较高时, 大变形的影响是不能忽视的。从垂直沉降随水平距离变化的曲线图 5-10 上, 可以看到在水平距离为 30m 的地方, 不论是大变形还是小变形的计算结果都有表面隆起的现象, 并且随着水平距离的增加, 这种隆起现象逐渐减弱。引起这种现象的原因主要是因为地基中部受到均布荷载作用, 而两侧没有受到均布力的作用, 中部受压, 由于尺寸效应引起两侧隆起, 而在两侧较远处, 这种现象就不太明显了, 基本上可以忽略。

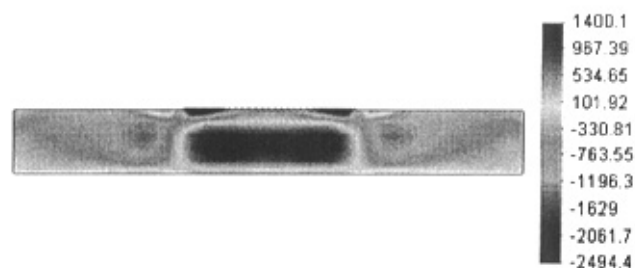


图 5-11 (1) 大变形正应力 σ_x 分布云图 (第 15 天) (M2)

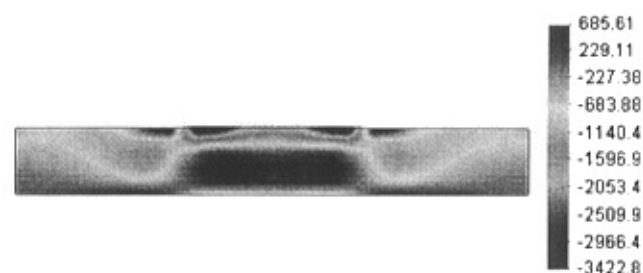


图 5-11 (2) 大变形正应力 σ_x 分布云图 (第 45 天) (M2)

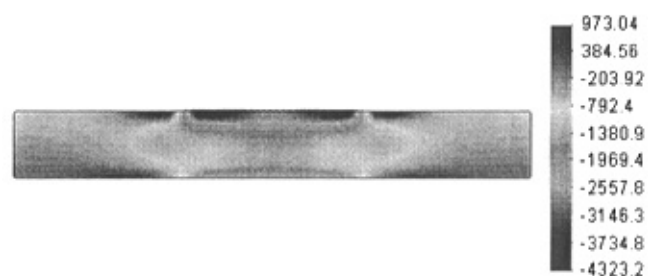


图 5-11 (3) 大变形正应力 σ_x 分布云图 (第 150 天) (M2)

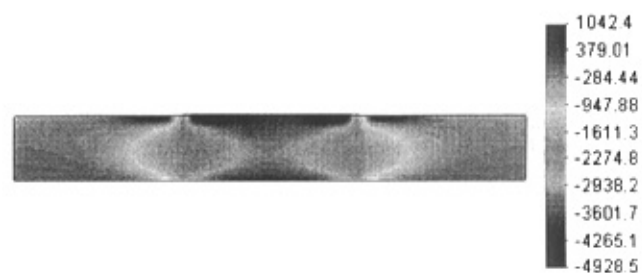


图 5-11 (4) 大变形正应力 σ_x 分布云图 (第 450 天) (M2)

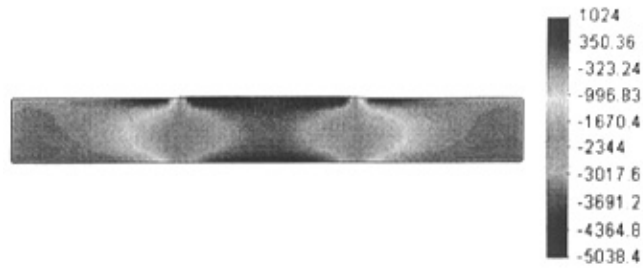


图 5-11 (5) 大变形正应力 σ_x 分布云图 (第 750 天) (M2)

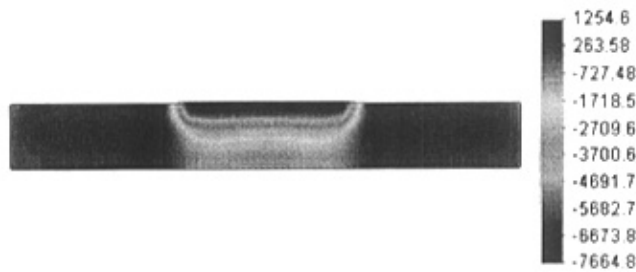


图 5-12 (1) 大变形正应力 σ_y 分布云图 (第 15 天) (M2)

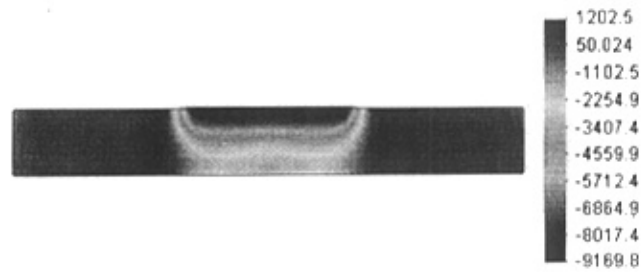


图 5-12 (2) 大变形正应力 σ_y 分布云图 (第 45 天) (M2)

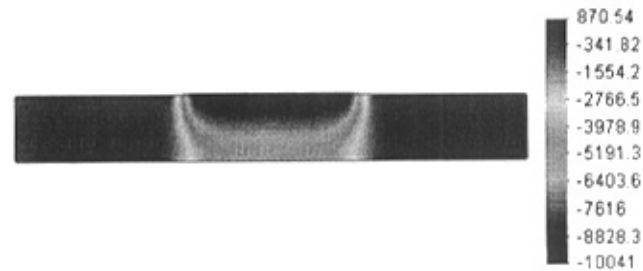


图 5-12 (3) 大变形正应力 σ_y 分布云图 (第 150 天) (M2)



图 5-12 (4) 大变形正应力 σ_y 分布云图 (第 450 天) (M2)

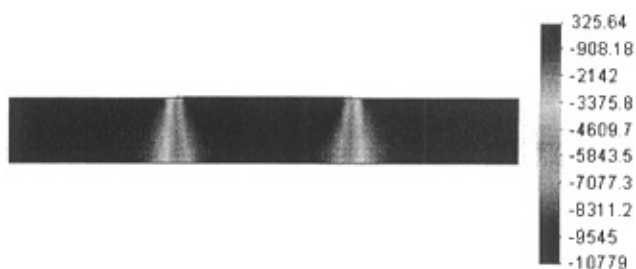


图 5-12 (5) 大变形正应力 σ_y 分布云图 (第 750 天) (M2)

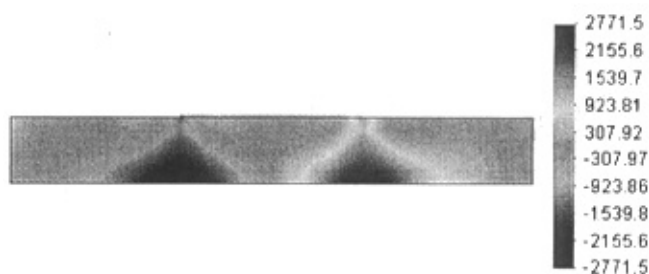


图 5-13 (1) 大变形剪应力 τ_{xy} 分布云图 (第 15 天) (M2)

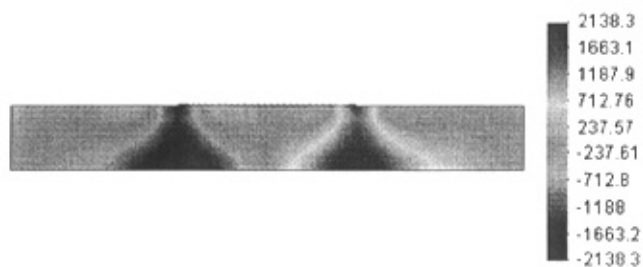


图 5-13 (2) 大变形剪应力 τ_{xy} 分布云图 (第 150 天) (M2)

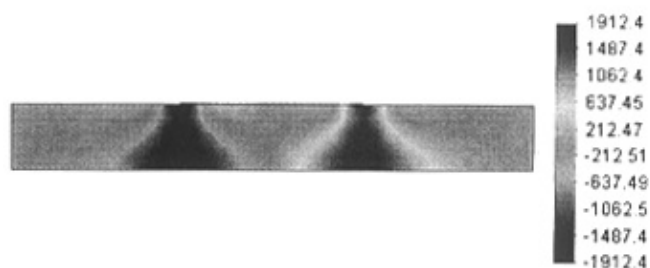


图 5-13 (3) 大变形剪应力 τ_{xy} 分布云图 (第 750 天) (M2)

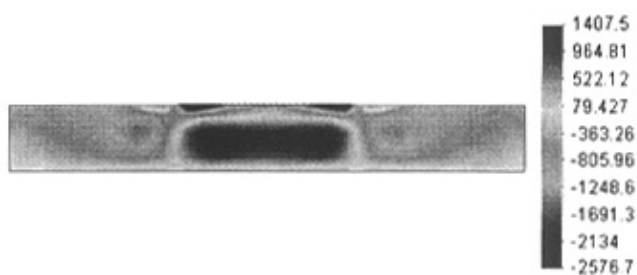


图 5-14 (1) 小变形正应力 σ_x 分布云图 (第 15 天) (M2)

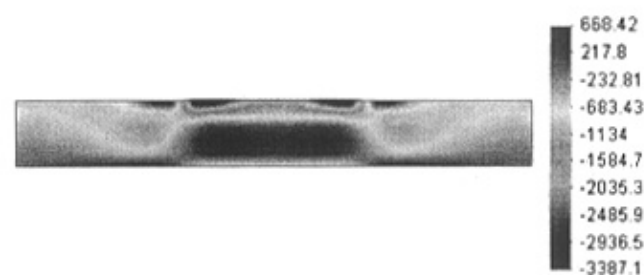


图 5-14 (2) 小变形正应力 σ_x 分布云图 (第 45 天) (M2)

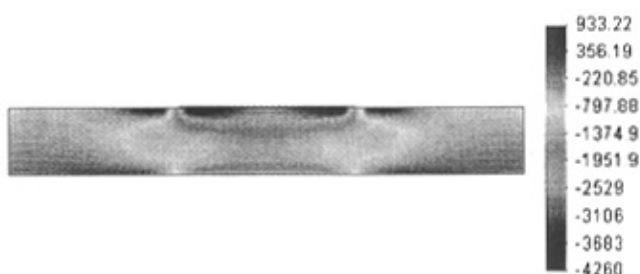


图 5-14 (3) 小变形正应力 σ_x 分布云图 (第 150 天) (M2)

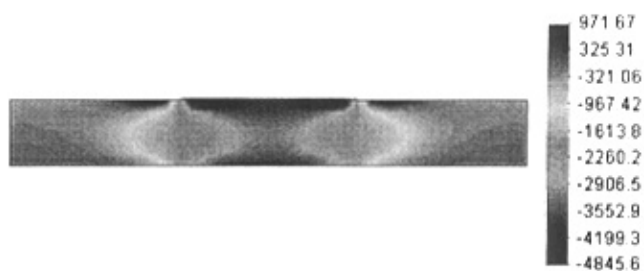


图 5-14 (4) 小变形正应力 σ_x 分布云图 (第 450 天) (M2)

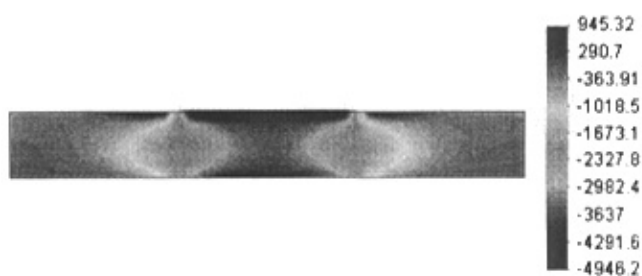


图 5-14 (5) 小变形正应力 σ_x 分布云图 (第 750 天) (M2)

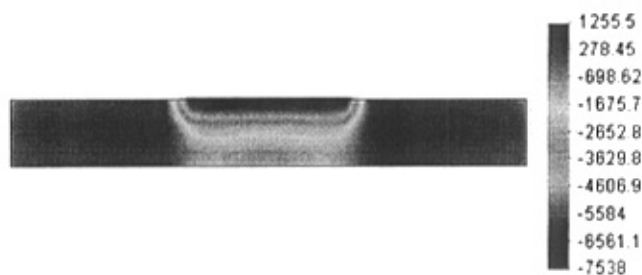


图 5-15 (1) 小变形正应力 σ_y 分布云图 (第 15 天) (M2)

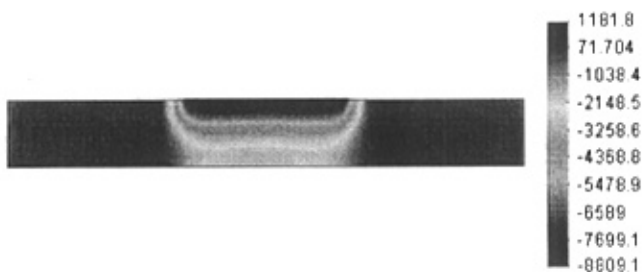


图 5-15 (2) 小变形正应力 σ_y 分布云图 (第 45 天) (M2)

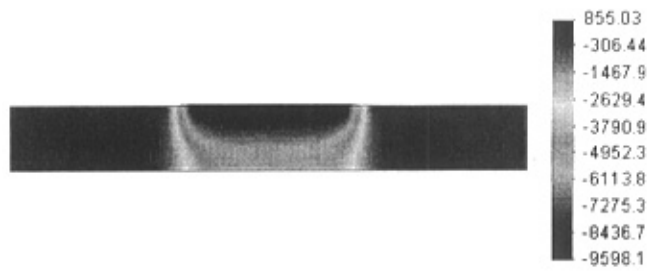


图 5-15 (3) 小变形正应力 σ_y 分布云图 (第 150 天) (M2)

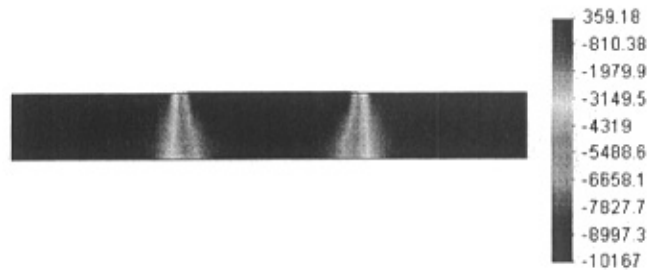


图 5-15 (4) 小变形正应力 σ_y 分布云图 (第 450 天) (M2)

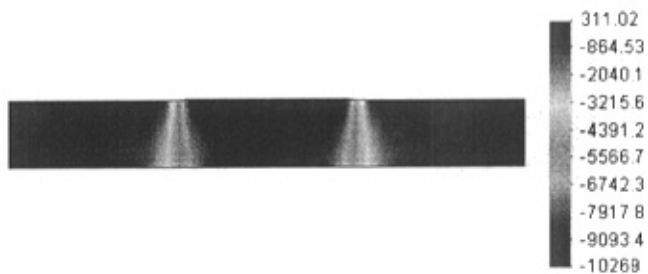


图 5-15 (5) 小变形正应力 σ_y 分布云图 (第 750 天) (M2)

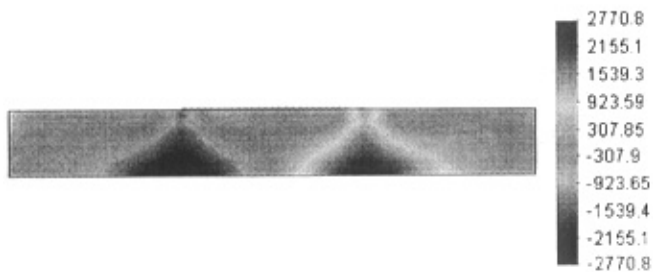
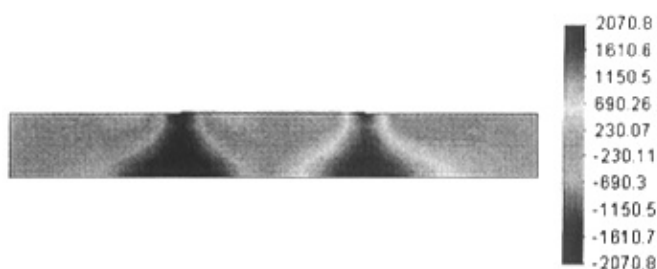
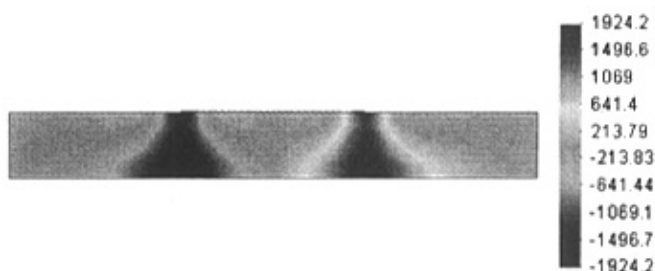


图 5-16 (1) 小变形剪应力 τ_{xy} 分布云图 (第 15 天) (M2)

图 5-16 (2) 小变形剪应力 τ_{xy} 分布云图 (第 150 天) (M2)图 5-16 (3) 小变形剪应力 τ_{xy} 分布云图 (第 450 天) (M2)

(6) 应力分布 随着变形的增加, 应力逐渐增大, 在荷载水平高, 土体变形模量及泊松比、渗透系数不大的情况下, 由于土体变形中大变形比小变形的大, 因此得出的应力大变形比小变形的要大。当土体变形模量增加到 1200 kPa 时, 大变形和小变形的应力分布基本上就没有差别了。在正应力 σ_x 变化分布云图中看到, 在荷载作用处, 由于发生变形, 导致这部分土颗粒压缩, 两侧向外膨胀, 出现一些拉应力区, 且随着时间增加, 这部分区域越来越大, 拉应力也随之增大, 后来由于变形减小, 应力就又逐渐减小。从图 5-12 正应力 σ_y 变化分布云图中看到, 在荷载作用两侧, 正应力出现了拉应力区, 表明中部由于荷载作用, 导致两侧土颗粒被挤出。在荷载作用附近, 由于尺寸效应, 这种拉应力比较大, 而距作用荷载比较远的外部区域这种现象就不太明显了。随着时间的增加, 这种现象就越来越小。但压应力逐渐增大。剪应力成对称分布, 在荷载作用边缘由于局部效应, 这部分比较大, 随着固结时间逐渐减小。和模型一中的应力分布情况比较, 模型二应力集中现象比较明显, 且尺寸效应能很好的体现。

第 6 章 结论及工作展望

固流耦合问题是目前科学研究的热点之一, 其研究不仅具有重要的理论意义, 而且在工程中有广泛的实际应用价值。在地下工程中的固流耦合问题更为突出, 涉及范围很广, 而且很复杂, 但目前有关这方面的研究工作尚属于探索阶段。

本文的研究工作, 是在多相连续介质力学的理论基础上, 根据固相变形和其中流体渗流的相互影响和相互作用机理, 建立了固一流耦合渗流固结过程中三相介质相互耦合的变形力学模型和数学模型。基于这些模型利用有限元法对固流耦合问题建立了有限元数值分析模型, 并对典型耦合渗流固结问题进行数值模拟, 且对数值计算结果进行了分析, 从中获得了一些有意义的结论。

6.1 主要结论

(1) 在固结问题中, 土体是以固相为宿主相的固-流耦合介质, 在受力和变形上相互耦合。利用连续介质力学理论, 把土体抽象为叠合连续体, 建立了有限变形下固-流耦合渗透固结问题的数学模型, 模型中反映了固-流相的相互耦合作用, 证明了在土体固结过程中, 固相骨架的变形、力学性质指标及流体压力这三个主要因素相互作用, 相互影响。

(2) 在有限变形理论的前提下, 建立了固-流耦合两相介质耦合问题的非线性大变形有限元方程。基于 IFEFG 有限元自动生成系统, 编制了相应的计算程序。程序中考虑了单元形式对固相变形场和流体压力场的影响。在本文中, 对于平面问题, 分析了采用 4 结点等参元和 8 结点等参元这两种不同的单元形式对土体变形和孔隙水压力所产生的影响。计算结果表明, 两种单元形式下得到的位移场、应力场和压力场计算结果差别非常小。因此, 在单元形式上采用 4 结点等参元就可以满足工程要求。

(3) 采用有限变形理论和研究方法, 对典型的土体固结问题进行了数值模拟, 并与同样情况下的小变形计算结果进行了分析比较。结果表明, 在荷载水平不高, 土体厚度不大, 土体变形模量及泊松比、渗透系数比较大的情况下, 大变形的计算结果和小变形的计算结果几乎没有多大差别。因此, 在这种情况下, 我们可以认为采用小变形对土体固结问题进行分析, 就可以达到理想结果, 而且用起来也比较简便。

(4) 本文通过对饱和软粘土的固结大变形有限元分析, 得出在荷载水平较高, 土体

厚度比较大,土体变形模量、泊松比和渗透系数较小的情况下,大变形计算的地基垂直沉降、孔隙水压力比较精确,其值明显大于小变形得出的计算结果,这种情况下,采用大变形分析才能得到预期精确的结果。通过固-流耦合作用时固体应力场的分析,得出大变形情况下的应力场比小变形要大。但是,随着固结时间的进行,两者的差别逐渐减小。

(5)采用两种不同的土体模型,对大小变形引起土体应力的分布进行了分析。结果充分体现了尺寸效应和应力集中现象,说明考虑固-流耦合作用时,由于土中水的渗流,在应力分布区内出现了拉应力现象,这样容易导致土体发生破坏,地基不稳定。但随着固结时间的进行,这种现象逐渐减弱。

6.2 工作展望

(1)多相固流耦合理论涉及到了地质学和数学的诸多热点和难题,涉及渗流力学、岩土力学、物理化学、传热学、计算数学等众多学科和领域,用岩土应力与流体渗流耦合方法研究固流耦合仍属于起步阶段,要比较全面地反应各个领域的实际情况,还需做许多工作。

(2)在大变形固结有限元分析中,土体的本构关系是根本,本文由于时间有限,采用了线弹性的本构关系,无疑对计算结果有一定影响。当选用合适的弹塑性本构关系和合适的屈服准则,可以使计算结果更合乎实际,因此,在有限元分析中引入非线性本构关系是需要的。

(3)有限元方法是求解地下固流耦合模型方程的一种重要的方法,但是在计算过程中难免会出现计算误差及简化处理造成的差别,因此,须进一步加强有限元理论与技术两方面的研究工作。

(4)从资料积累、发展理论模型到与现场结合为思路的研究方法,将为地下固流耦合理论在土体固结、地面沉降、石油生产领域的快速发展提供坚实的基础,由此也将对完善相关的土体固结、石油生产技术等具有重要的推动作用。

参考文献

- [1] 章梦涛. 变形与渗流相互作用的岩石力学问题[J]. 岩石力学与工程学报, 1989, 8 (3): 299~308.
- [2] 王仁. 地质材料的力学问题[J]. 力学与实践, 1986, 8 (4): 2~6.
- [3] 郭尚平. 渗流力学的近况和展望[J]. 力学与实践, 1981, 3 (3): 11~16.
- [4] 刘建军. 地下水渗流的固液耦合理论及数值方法[J]. 勘察科学技术, 2000, 4: 7~10.
- [5] Hiroshi Y and Hurofumi N. Consolidation of soils by vertical drain well with finite permeability[J]. Soil and Foundation, 1974, 6: 35~46.
- [6] 刘广胜, 赵维炳, 朱国忠. 固结、渗流和沉积控制方程研究[J]. 南京水利科学研究院, 水利水电科技研究, 1999, 2: 207~212.
- [7] 陶震宇, 沈小莹. 库区应力场的耦合分析[J]. 武汉水利电力学院学报, 1988, (1): 8~14.
- [8] 罗晓辉. 深基坑开挖渗流与应力耦合分析[J]. 工程勘察, 1996, 6: 37~41.
- [9] 陈平, 张有天. 裂隙岩体渗流与应力耦合分析[J]. 岩石力学与工程学报, 1994, 13 (3): 299~308.
- [10] 李尧臣, 陈洁, 周顺华. 铁路路基施工的渗流-应力耦合模型分析[J]. 岩土工程学报, 2004, 26 (4): 565~568.
- [11] 李术才, 李树忱等. 泰安抽水蓄能电站围堰稳定性的流-固耦合分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23 (8): 1275~1279.
- [12] 章梦涛, 潘一山, 梁冰等. 煤岩流体力学[M]. 北京, 科学出版社, 1995.
- [13] 赵阳升. 矿山岩石流体力学[M]. 北京, 煤炭工业出版社, 1995.
- [14] 汪有刚, 刘建军等. 煤与瓦斯流固耦合渗流的数值模拟[J]. 煤炭学报, 2001, 26 (3): 285~289.
- [15] 赵国景, 丁继辉. Non-linear Numerical Simulation on Coal-Methane Outburst of Solid-Fluid Biphasic Media Coupling Problem[J]. 中国矿业大学学报, 1998, 2: 103~

- 107.
- [16] 丁继辉, 麻玉鹏等. 有限变形下煤与瓦斯突出的固流两相介质耦合失稳理论[J]. 河北农业大学学报, 1998, 1:74~82.
- [17] 丁继辉, 麻玉鹏等. 煤与瓦斯突出的固一流耦合失稳理论及数值分析 [J]. 工程力学, 1999, 4: 47~53.
- [18] 王自明. 油藏热流固耦合模型研究及应用初探[T]. 博士学位论文, 2002.
- [19] 刘建军. 裂缝性低渗透油藏流-固耦合理论与数值模拟[J]. 力学学报, 2002, 34 (5): 779~784.
- [20] Jian-Jun, Liu etc. Theoretical and experimental studies on the fluid - solid coupling processes for oil recovery from low permeability fractured[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining sciences, 2004, 41.
- [21] 袁奔群等. 黑油模型在油田开发中的应用[M]. 北京, 石油工业出版社, 1995.
- [22] 刑景棠, 周盛, 崔尔杰. 流固耦合力学概述[J]. 力学进展, 1997, 1: 19~37.
- [23] 陈正汉等. 非饱和土固结的混合物理论 I[J]. 应用数学和力学, 1993, 14 (2): 123~130.
- [24] 丁洲祥. 对“各向异性饱和土体的渗流耦合分析和数值模拟”一文的讨论[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23 (20), 3559~3562.
- [25] Terzaghi K. Theorecial soil mechanics[M]. Wiley, New York, 1943.
- [26] Biot M A. General theory of three dimensional consolidation[J]. J. Appl. Phys, 1941, 12:155~164.
- [27] Biot M A. General solution of the equation of elasticity and consolidation for a porous material [J]. J. Appl. Mech, 1956, 78:91~96.
- [28] Biot M A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid[J]. J. Appl. Phys, 1954, 26:182.
- [29] Biot M A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media [J]. J. Appl. Phys, 1962, 33:1482.
- [30] Lubinski A. Theory of elasticity for porous bodies displaying a strong pore structure [J]. Proc. U.S. National Congress of Applied Mechanics, 1954:247~256.

- [31] Geertsman J. A remark on the analogy between thermo-elasticity and the elasticity of saturated porous media [J]. J. Mech. Phys. solids, 1957, 6:13~16.
- [32] Bear J. 多孔介质流体动力学 [M]. 李竞生, 陈崇希译. 北京, 建筑工业出版社, 1984.
- [33] Gibson. R. E., R. L. Schiffman & K. W. Cargill. The theory of finite one-dimensional consolidation of saturated clays [J]. Can. Geotech, 1981, 19(1).
- [34] Savage W Z and Braddock W A. A model for hydrostatic consolidation of Pierre shale [J]. Int. J. Rock Mech. Min. sci. & Geomech. Abstr. 1991, 28:345~354.
- [35] Zienkiewicz. O. C. and Shiomi T. Dynamic behaviour of saturated porous media: the generalized of Biot formulation and its numerical solution [J]. Int. J. Num. and Anal. Meth. in Geomech. 1984, 8:71~96.
- [36] 李锡夔等. 饱和土固结效应的结构—土壤相互作用分析及其有限元解 [J]. 计算力学及其应用. 1990, 7 (3): 1~11.
- [37] 张洪武, 钟万勰, 钱令希. 土体固结分析的一种有效算法 [J]. 计算结构力学及其应用, 1991, 8 (4): 71~96.
- [38] 董平川. 储层流固耦合的数学模型及其有限元方程 [J]. 石油学报, 1998, 19(1): 64~70.
- [39] 李宁, 陈飞熊. 饱和土体固—液两相介质动力耦合问题有限元解析 [J]. 西安公路交通大学学报, 1999, 19 (4): 6~10.
- [40] 杨林德, 杨志锡. 各向异性饱和土体的渗流耦合分析和数值模拟 [J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21 (10): 1447~1451.
- [41] Cater. J. P., J. C. Small & J. R. Booker. A theory of finite elastic consolidation [J]. Int. J. Solids Structure, 1977, 13.
- [42] Chopra. M. B. & G. F. Dargush. Finite-element analysis of time-dependent large-deformation problems. International J. for Numerical and Analytical Method in Geotechnics, 1992, 16.

- [43] 周正明. 饱和土体大变形固结有限元分析[J]. 水利水运科学研究, 1992, 1.
- [44] 谢新宇. 一维大变形固结理论的研究[T]. 浙江大学博士学位论文, 1996.
- [45] 何开胜等. 两种 Lagrangian 大变形固结有限元法及其与小变形的比较[J]. 岩土工程学报, 2000, 22 (1): 30~34.
- [46] 沈珠江. 用有限元法计算软土地基的固结变形[J]. 水利水运科技情报, 1977, 11 (2).
- [47] His. P. & Small J C. Simulation of excavation in a poro-elastic material[J]. Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. 1992, 16:25~43.
- [48] 丁继辉, 麻玉鹏等. 固——流两相介质耦合问题的数值解法, 矿山建设与岩土的理论与实践一书收录[M]. 中国矿业大学出版社, 1998.
- [49] 丁继辉等. 固流耦合失稳问题的非线性数值模拟[J]. 工程力学增刊, 2001, 1: 674~676.
- [50] 丁继辉, 麻玉鹏, 李凤莲. 有限变形下固流多相介质耦合问题的数学方程及失稳条件[J]. 水利水电技术, 2004, 6:18~21.
- [51] 王志亮. 无单元伽辽金法解固结问题[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23 (7), 1141~1145.
- [52] 王志亮等. 固结问题的非线性局部点插值法解研究[J]. 岩土力学, 25(2):199~202.
- [53] 郭志强. 大变形的非线性固结问题的一种数值解法在胜利油田桩西海堤工程中的应用[J]. 岩土工程师, 1995, 7 (2).
- [54] 李冰河等. 软黏土非线性一维大应变固结分析[J]. 岩土工程学报, 2000, 23 (3): 368~370.
- [55] 章根德. 固体-流体混合物连续介质力学及其工程上应用[J]. 力学进展, 1993, 1.
- [56] 张引科. 非饱和土混合物理论及其应用[T]. 博士学位论文, 2001.
- [57] Roland W. Lewis, Bernard A. Schrefler. The finite element method in the Deformation and Consolidation of Porous Media[M]. Wiley, 1987.

致谢

在本文完成之际，我要衷心地感谢导师丁继辉教授、王维玉高工、王岷副教授。在整个硕士学习阶段给予的悉心指导和帮助。从选题、进展方向、研究关键问题到论文的结构，均倾注了导师很多的精力，导师所给予的指导、帮助使我学到很多新东西，受益匪浅。导师一丝不苟、兢兢业业的学术态度，勤奋的工作作风，活跃的学术思想，渊博的专业知识以及忘我的奉献精神，都给我留下了深刻的印象，为我以后的工作事业树立了一个好榜样。同时，我还感谢导师教会了我许多做人的道理。

在本论文完成过程中，曾遇到过很多困难，机建学院的张建辉教授、李文秀教授、方有亮教授、刚芹果教授、李书歧教授、麻玉鹏高工等均给了我悉心的帮助。02 力研的翟淑花、乔金丽、李会云、马丽红、王华丽同学在不同的知识领域给我以支持，同时在生活中，相互团结，相互帮助，给我提供了一个良好的学习环境。此外，特别提及师弟李正同学，他在本论文完成过程中，也做了一定的协助工作，有益于本论文的完成。在此向他们表示衷心的感谢！

感谢我的家人及朋友，三年来，他们给予我深深的理解和爱心，并全力支持和帮助。

感谢各位专家、教授对本论文的审阅，对文中不当之处敬请指正。